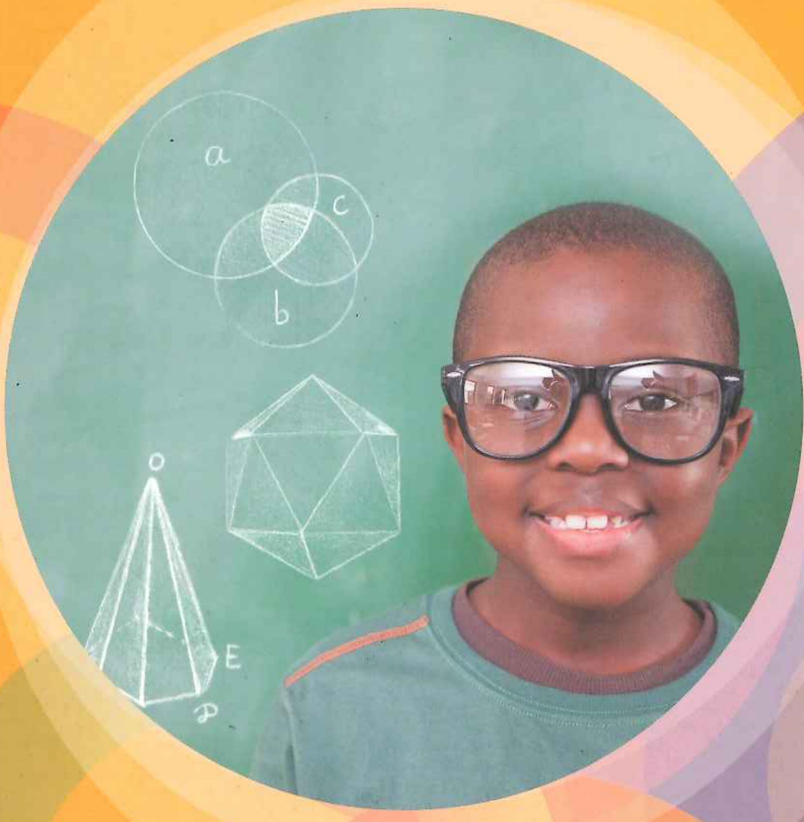
Vamos a aprender

Matemáticas

Libro del estudiante

6



Libro de distribución gratuita

PRESIDENCIA DE LA REPÚBLICA

MINEDUCACIÓN

TODOS POR UN NUEVO PAÍS

PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

Vamos a aprender

Matemáticas 6

Libro del estudiante

El proyecto **Vamos a aprender** para la Educación Básica y Media es una propuesta pedagógica orientada a que los estudiantes adquieran un aprendizaje eficaz.

Cumple su función pedagógica y didáctica ofreciendo al docente la posibilidad de darle vida a los materiales, haciéndolos significativos para los estudiantes.

Esta propuesta entiende la escuela como un espacio de convivencia imprescindible para la formación integral de los alumnos.

Favorece una **formación integral** y desarrolla temáticas para la vida y la convivencia.

Ofrece una **ruta didáctica** clara y organizada que facilita el desarrollo de diversos procesos cognitivos.

Permite valorar y evaluar el **progreso del aprendizaje** por medio de diversos tipos de actividades.

Comprende los referentes básicos para el **diseño curricular** de cada área.

ISBN 978-958-780-187-3

Libro de distribución gratuita

PRESIDENCIA DE LA REPÚBLICA

MINEDUCACIÓN

sm

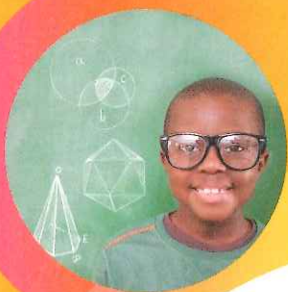
TODOS POR UN NUEVO PAÍS

PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

Vamos a aprender

Matemáticas

Libro del estudiante



6

Vamos a aprender

es el proyecto en el que los estudiantes se convierten en protagonistas de su proceso de formación. Por medio de materiales que motivan a estudiar y a participar de forma activa, se consigue un aprendizaje eficaz y significativo.

Los contenidos se relacionan con el entorno más inmediato y trabajan competencias esenciales para poder desarrollar las habilidades que la vida exija el día de mañana.

El proyecto es una apuesta por el desarrollo integral de los estudiantes. Junto con una sólida formación académica, proporciona herramientas de reflexión y análisis de la sociedad en la que vivimos por medio de sus temas de Educación ambiental, Estilos de vida saludable y Educación para la sexualidad y la ciudadanía.

Aprendiendo a convivir de manera armónica, lograremos todos juntos que el colegio llegue a ser un espacio de crecimiento que nos haga mejores y en el que todos queramos estar.

Así que es hora de comenzar y aceptar el reto:

¡Vamos a aprender!

Libro de distribución gratuita

PRESIDENCIA DE LA REPÚBLICA

MINEDUCACIÓN

TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

Vamos a aprender

Matemáticas

Libro del estudiante

6

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL

PRESIDENTE DE LA REPÚBLICA
Juan Manuel Santos Calderón
MINISTRA DE EDUCACIÓN NACIONAL
Yaneth Cristina Giha Tovar
VICEMINISTRO DE EDUCACIÓN PREESCOLAR, BÁSICA Y MEDIA
Víctor Javier Saavedra Mercado
DIRECTORA DE CALIDAD DE EDUCACIÓN PREESCOLAR, BÁSICA Y MEDIA
Paola Andrea Trujillo Pulido
SUBDIRECTOR DE FOMENTO DE COMPETENCIAS
Alfredo Olaya Toro (E)
SUBDIRECTORA DE REFERENTES Y EVALUACIÓN DE LA CALIDAD EDUCATIVA
María Claudia Sarta Herrera
EQUIPO DE MATERIALES PEDAGÓGICOS
COORDINADORA: Angélica Ortega Santacruz
PROFESIONALES: Deyanira Alfonso Sanabria, Edna Maritza Corredor Suárez, Diana Patricia Tobón Maldonado, Andrés Alberto Andrade Ceballos
EQUIPO TÉCNICO DE MATEMÁTICAS
ASESORA: Yadira Sanabria Mejía
PROFESIONALES: Jenny Andrea Blanco Guerrero, Guillermo Andrés Salas Rodríguez, Jairo Anibal Rey Monroy
EQUIPO TÉCNICO EVALUADOR DE MATERIALES MATEMÁTICAS
Ricardo Cañón Moreno, María Isabel Noreña, Diana Velásquez Rojas, Ana Celia Castiblanco Paiba, María Beatriz Rocha
EQUIPO PROGRAMAS TRANSVERSALES Y COMPETENCIAS CIUDADANAS
COORDINADORA: Olga Lucía Zárate Mantilla
PROFESIONALES: Francine Botero Garnica, Sandra Patricia Mora Varela, Juan Camilo Caro Daza

EQUIPO EDICIONES SM

DIRECTOR EDITORIAL
Jaime Marco Frontelo
GERENTE EDITORIAL
Jeannette Benavides Escobar
EDITORA JEFE DE ÁREA
Luz Stella Alfonso Orozco
EDITORES
Leidi Gil Fuentes, Deysi Roldán Hernández, Josué Malagón Montaña
COLABORADORES
Víctor Hernando Ardila Gutiérrez, Andrés Camilo Carrillo Acosta, Mario Alberto Cañón Gutiérrez, Miguel Ángel Alfonso Orozco, John Álvaro Munar Ladino.
COORDINADOR DE CORRECCIÓN
Rafael Humberto Castro Fernández
CORRECCIÓN DE ESTILO
Adriana Marcela Casas Guzmán, Claudia Martínez Suárez
GERENTE DE ARTE Y DISEÑO
Leonardo Rivas Agudelo
COORDINACIÓN DE DISEÑO
Elkin Vargas Bohórquez
DISEÑO DE LA SERIE
Elkin Vargas Bohórquez, Magaly Duque Santos, Liliana Bohórquez Algecira, Ana Lilly Pardo Beltrán
DISEÑO DE CUBIERTA
Juan Camilo López Rojas
DIAGRAMACIÓN
Alexandra León Ruíz, Rafael Niebles Montoya, Alejandro Bohórquez Rodríguez, Diego Camacho Arciniegas, Milena Buenaventura
FOTOGRAFÍA
Archivo SM, Ángel Camacho Linares, Rafael Niebles, Wikimedia Commons, Shutterstock.com, A.RICARDO, Andrey Khrolenok, Radu Razvan, Giuseppe Costantino, Kaliva, Teddy Leung, Zeynep Demi, Anthony Hall, rmnoa357, Luckies, Chones.
RETOQUE DIGITAL
Ángel Camacho Linares, Mario Alarcón Orozco, Kenny Bacares Fonseca, Fernando Amézquita Quintana

Carrera 85 K N° 46 A - 66
Bogotá, D. C., Colombia
ISBN 978-958-780-187-3
IMPRESIÓN
Impreso en Colombia / *Printed in Colombia*
Impreso en Quad/Graphics

Presentación

Aceptar el reto de hacer de Colombia la nación más educada de América Latina en el 2025 es una decisión que genera una gran responsabilidad. La necesidad de no perder ni un segundo en el camino hacia la calidad es un llamado urgente a rectores, docentes y padres de familia que se levantan cada mañana comprometidos con el futuro de miles de estudiantes.

Lograr una educación de calidad es el objetivo que nos hemos trazado para construir un país con igualdad de oportunidades para todos y en paz. Una igualdad que no sólo contempla el derecho que cada uno de los colombianos tiene a la educación, sino que se refuerza en la idea de equilibrar la cancha de juego y hacer que todos nuestros niños, niñas y adolescentes tengan las mejores condiciones en los colegios, incluyendo materiales pedagógicos de alta calidad que contribuyan al fortalecimiento de su proceso de aprendizaje.

Como Ministerio sabemos que la excelencia educativa se gesta en el aula, y es allí donde se deben concentrar todos los esfuerzos de transformación. Por esto, dotar de herramientas pedagógicas suficientes e idóneas que acompañen y refuercen la práctica en el salón de clase, es la forma en la que se hará visible el esfuerzo de un equipo de rectores y docentes pioneros comprometidos con el mejoramiento de la calidad en la educación.

Por esta razón, el Ministerio de Educación Nacional presenta el siguiente material de apoyo para el proceso pedagógico de enseñanza de lenguaje y matemáticas, de alta calidad. Este material ha sido seleccionado de manera juiciosa por expertos, para que docentes y estudiantes lo incorporen a la práctica de aula, los trabajen, los disfruten con su familia, aprendan con ellos y descubran un mundo de narraciones mágicas y problemas matemáticos que les dará paso a un nuevo universo de posibilidades.

Estos libros, cuadernos de trabajo y guías llegarán a los colegios y cobrarán vida en el aula gracias al compromiso y dedicación de cada uno de ustedes. Por esto es importante explorarlos, conocerlos y apropiarlos; con seguridad este será un paso más hacia nuestra meta de hacer de Colombia la más educada con ustedes como los protagonistas en este nuevo capítulo de su historia.

Sin lugar a duda, esta es una de las apuestas más importantes por el futuro del país.

Estructura de tu libro

Este libro está organizado en seis divisiones o unidades. Cada una de ellas se compone de subdivisiones o temas. Las unidades presentan la siguiente estructura:

Apertura de unidad

En esta doble página recordarás **aquello que ya sabes** y **conocerás lo que vas a aprender** y su aplicación en tu vida cotidiana.

Ruta didáctica

El desarrollo de todos los contenidos presenta la siguiente **ruta didáctica**.

Conoce

Desarrolla los contenidos del tema. Sintetiza los conceptos básicos que debes aprender.

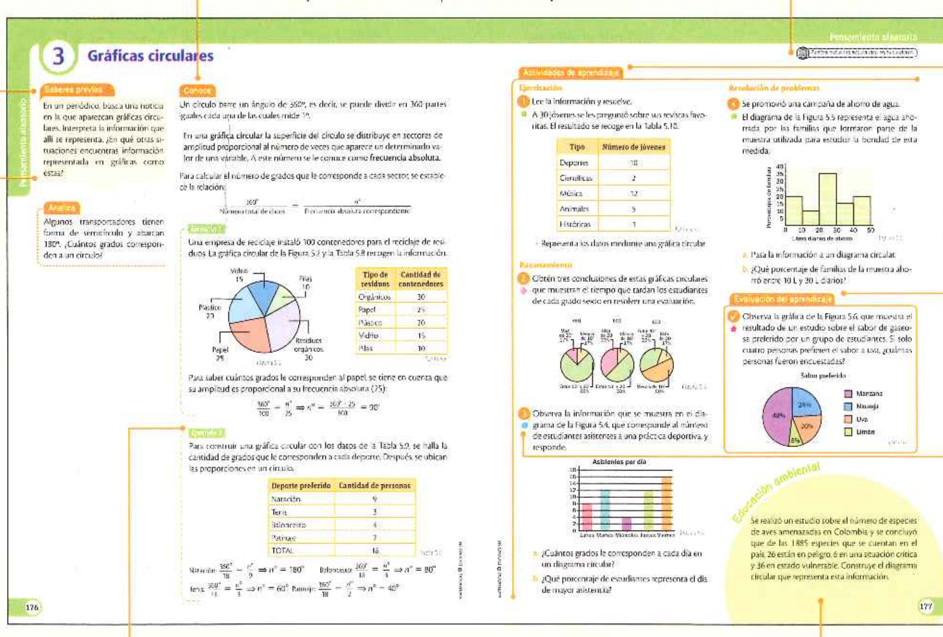
Recuerda que estas actividades las debes realizar en tu cuaderno.

Saberes previos

Explora lo que ya sabes.

Analiza

Establece la conexión entre los conocimientos previos y los nuevos contenidos, mediante una situación problema.



Actividades de aprendizaje

Desarrolla y refuerza lo que has aprendido.

Evaluación del aprendizaje

Evalúa tus conocimientos.

Procesos cognitivos

- Memoria
- Comprensión
- Análisis
- Aplicación
- Síntesis
- Evaluación

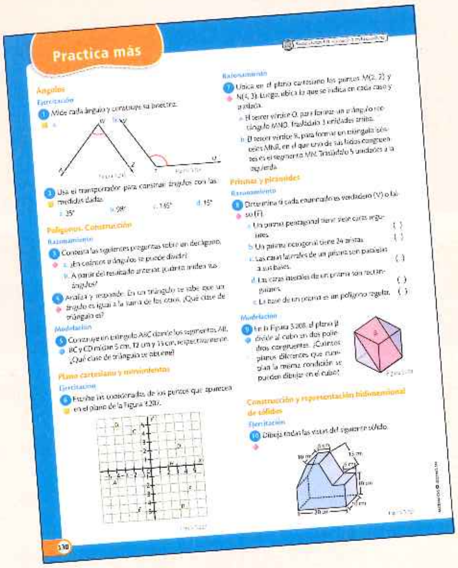
Ejemplos

Aplicación inmediata de los conceptos explicados.

Temas transversales

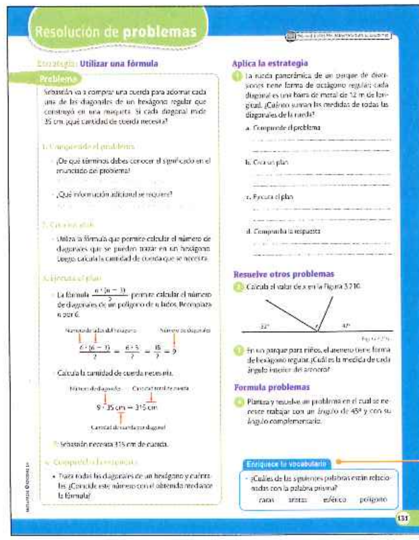
Practica más

Resuelve **más actividades** relacionadas con los temas de la unidad y **desarrolla habilidades matemáticas**.



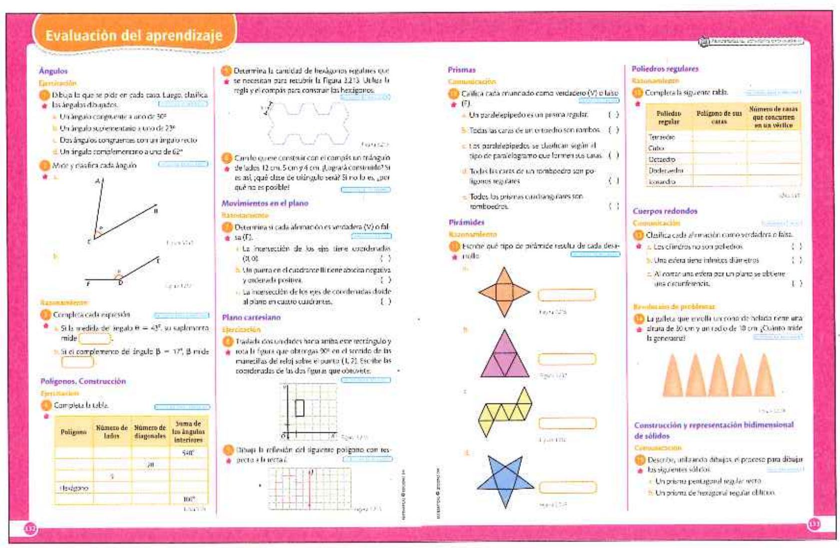
Resolución de problemas

Resuelve problemas con el uso de diferentes estrategias. Sigue el **ejemplo resuelto** como guía y pon en práctica la estrategia estudiada.



Enriquece tu vocabulario

Amplía tu vocabulario matemático.



Evaluación del aprendizaje

En esta sección tendrás la oportunidad de **aplicar los temas vistos** y **reforzar tus conocimientos**.

Temas transversales

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Con este tema desarrollarás competencias para **ejercer, respetar y promover los derechos humanos**, los cuales están presentes en tus relaciones cotidianas.

Educación ambiental

Plantea actividades, ejemplos y situaciones en las que podrás reflexionar sobre las **relaciones entre el individuo y su entorno natural**, como proceso interactivo, y **la protección y el cuidado** de los recursos naturales y los seres vivos.

Estilos de vida saludable

Presenta actividades, ejemplos y situaciones con las cuales aprenderás a **tomar decisiones sobre tu salud y tu bienestar** físico, emocional e intelectual, tanto individual como colectivo.

Contenido Matemáticas 6

1

Pensamiento numérico

Números naturales y teoría de números Pág. 8

2

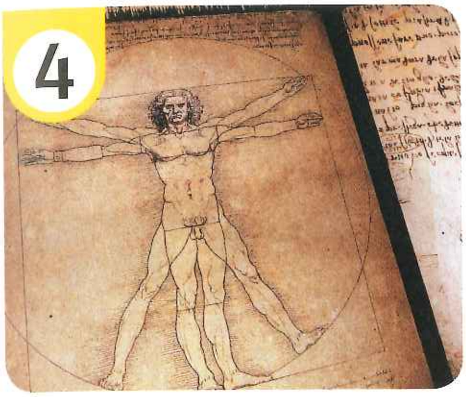
Pensamiento numérico

Fracciones y decimales. Números enteros Pág. 44

3

Pensamiento espacial

Polígonos, cuerpos geométricos y movimientos en el plano Pág. 88



4

Pensamiento métrico

Unidades de medida Pág. 134

5

Pensamiento aleatorio

Estadística y probabilidad Pág. 170

6

Pensamiento variacional

Proporcionalidad. Ecuaciones e inecuaciones Pág. 188

1 Números naturales y teoría de números

Ya sabemos

- Determinar la descomposición de números naturales.
- Identificar números primos y compuestos.

Vamos a aprender

- A identificar y aplicar los criterios de divisibilidad.
- A hallar el m. c. d. y el m. c. m.

Nos sirve para

- Para realizar conversiones entre fracciones y decimales.
- Para ubicar números enteros en la recta numérica.

1 Sistema de numeración decimal

Saberes previos

¿Cuántos grupos de 10 objetos se necesitan para completar 1 000?

Analiza

Según los historiadores, el sistema de numeración decimal surgió a partir del hecho de que las personas tienen diez dedos en las manos y siempre los han empleado para contar.

- Además de ser un sistema de base 10, ¿cuáles son otras características del sistema de numeración decimal?

Conoce

En el **sistema de numeración decimal** cualquier cantidad se puede escribir utilizando solo diez símbolos:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Diez unidades de un orden dado forman una unidad del orden inmediatamente superior.

- 10 unidades = 1 decena
- 100 unidades = 10 decenas = 1 centena
- 1 000 unidades = 10 centenas = 1 unidad de mil
- 10 000 unidades = 10 unidades de mil = 1 decena de mil

El **sistema de numeración decimal** es un sistema posicional que utiliza diez símbolos, o **dígitos**: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 a partir de los cuales se puede escribir cualquier cantidad.

Ejemplo 1

A continuación se observa una tabla de valor posicional (Tabla 1.1). Esta permite determinar el valor de las cifras de un número.

Millones			Miles			Unidades		
Centenas de millón	Decenas de millón	Unidades de millón	Centenas de mil	Decenas de mil	Unidades de mil	Centenas	Decenas	Unidades
cM	dM	uM	cm	dm	um	c	d	u
10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0

Tabla 1.1

De acuerdo con la tabla anterior, el número 814 372 468 tiene:

Millones			Miles			Unidades		
8 cM	1 dM	4 uM	3 cm	7 dm	2 um	4 c	6d	8 u

Por lo tanto, los valores correspondientes de las cifras de este número son:

$$\begin{array}{lllllll}
8\ \text{cM} & = & 8 \cdot 10^8 & = & 8 \cdot 100\,000\,000 & = & 800\,000\,000 \\
1\ \text{dM} & = & 8 \cdot 10^7 & = & 1 \cdot 10\,000\,000 & = & 10\,000\,000 \\
4\ \text{uM} & = & 8 \cdot 10^6 & = & 4 \cdot 1\,000\,000 & = & 4\,000\,000 \\
3\ \text{cm} & = & 8 \cdot 10^5 & = & 3 \cdot 100\,000 & = & 300\,000 \\
7\ \text{dm} & = & 8 \cdot 10^4 & = & 7 \cdot 10\,000 & = & 70\,000 \\
2\ \text{um} & = & 8 \cdot 10^3 & = & 2 \cdot 1\,000 & = & 2\,000 \\
4\ \text{c} & = & 8 \cdot 10^2 & = & 4 \cdot 100 & = & 400 \\
6\ \text{d} & = & 8 \cdot 10^1 & = & 6 \cdot 10 & = & 60 \\
8\ \text{u} & = & 8 \cdot 10^0 & = & 8 \cdot 1 & = & 8
\end{array}$$

En el sistema de numeración decimal, un número se puede representar según la **posición de sus cifras**, como la **suma de los valores de sus cifras** y mediante su **desarrollo exponencial**.

Ejemplo 2

El número 74 305 se puede representar como sigue.

Según la posición de sus cifras

$$74\,305 = 7\text{ dm} + 4\text{ um} + 3\text{ c} + 0\text{ d} + 5\text{ u}$$

Como la suma de los valores de sus cifras

$$74\,305 = 70\,000 + 4\,000 + 300 + 0 + 5$$

Con su desarrollo exponencial

$$74\,305 = (7 \cdot 10^4) + (4 \cdot 10^3) + (3 \cdot 10^2) + (0 \cdot 10^1) + (5 \cdot 10^0)$$

Ejemplo 3

Se observa que:

$$8 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 7$$
$$= 800\,000 + 30\,000 + 1\,000 + 40 + 7 = 831\,047$$

1.1 Lectura de números grandes

En el sistema de numeración decimal, las cifras de los números se organizan en órdenes, clases y periodos, conforme a lo que se observa en la Tabla 1.2.

Periodos	Billones						Millones						Unidades					
Clases	6.ª clase			5.ª clase			4.ª clase			3.ª clase			2.ª clase			1.ª clase		
Órdenes	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u

Tabla 1.2

Para leer un número se agrupan sus cifras de tres en tres, comenzando de derecha a izquierda, y se identifican las correspondientes clases y periodos.

Ejemplo 4

Escribe cómo se lee el número 572 648 703.

Se ubica el número 572 648 703 en una tabla de valor posicional (Tabla 1.3).

Millones			Miles			Unidades		
Centenas de millón	Decenas de millón	Unidades de millón	Centenas de mil	Decenas de mil	Unidades de mil	Centenas	Decenas	Unidades
5	7	2	6	4	8	7	0	3
Quinientos setenta y dos millones			seiscientos cuarenta y ocho mil			setecientos tres		

Tabla 1.3

Se lee: "quinientos setenta y dos millones seiscientos cuarenta y ocho mil setecientos tres".

1 Sistema de numeración decimal

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Escribe el valor relativo de las cifras que están resaltadas en cada número.

a. 679 065 b. 21 056 021
c. 3 707 611 d. 29 100 297
e. 76 023 929 f. 83 002 901
g. 54 433 010 h. 106 654 696

2 Encuentra el desarrollo exponencial de cada número.

a. 876 908 b. 5 087 329
c. 12 378 097 d. 46 024 122
e. 30 032 211 f. 75 198 077

3 Identifica el número que corresponde a cada desarrollo exponencial. Luego, escríbelo.

a. $4 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10$

b. $6 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 6$

c. $8 \cdot 10^7 + 5 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^3 + 10 + 4$

d. $5 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7$

e. $6 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 8$

f. $4 \cdot 10^{12} + 3 \cdot 10^{10} + 2 \cdot 10^7 + 2 \cdot 10^5 + 10^3$

g. $2 \cdot 10^{10} + 3 \cdot 10^9 + 2 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^2 + 10$

h. $2 \cdot 10^{14} + 3 \cdot 10^{12} + 2 \cdot 10^{11} + 2 \cdot 10^{10} + 10^9 + 3 \cdot 10^8 + 2 \cdot 10^7 + 5 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 8$

i. $5 \cdot 10^{12} + 3 \cdot 10^{11} + 2 \cdot 10^{10} + 2 \cdot 10^9 + 2 \cdot 10^8 + 3 \cdot 10^7 + 2 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 2$

j. $3 \cdot 10^{13} + 7 \cdot 10^{11} + 4 \cdot 10^{10} + 5 \cdot 10^9 + 1 \cdot 10^8 + 9 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 7$

Razonamiento

4 Escribe cada número en el cuaderno como la suma de los valores de sus cifras.

a. 7 804 b. 9 746
c. 23 876 d. 67 043
e. 98 431 f. 104 648
g. 129 400 h. 306 190

5 Escribe el número mayor y el número menor que se pueden formar con los dígitos de cada lista. Usa cada cifra una única vez.

a. 5, 9, 3, 1 b. 9, 6, 2, 8, 1
c. 5, 1, 3, 9, 7, 6 d. 7, 2, 4, 1, 3, 9
e. 8, 1, 4, 6, 7, 3 f. 6, 5, 8, 4, 2, 0

6 Indica cómo se escribe cada número. Luego, representa su desarrollo exponencial.

a. Tres millones ochocientos mil tres.
b. Doce millones tres mil doscientos uno.
c. Quince millones trescientos un mil treinta y uno.
d. Un millón doscientos tres mil doce.
e. Siete millones un mil uno.

7 Califica cada enunciado como verdadero (V) o falso (F).

a. En el sistema de numeración decimal un número se puede representar únicamente mediante su desarrollo exponencial.
b. El sistema de numeración decimal es un sistema solo multiplicativo.
c. En el sistema de numeración decimal cada cifra tiene un valor diferente dependiendo del lugar que ocupe en un número.

8 Escribe en letras cada número.

a. 12 767 965 b. 26 876 643
c. 38 032 100 d. 50 765 987
e. 85 200 200 f. 99 298 109
g. 128 765 277 h. 159 025 932
i. 4 987 532 100 j. 8 158 502 372

9 Identifica el número correspondiente a cada enunciado. Luego, escríbelo.

a. Cuatro decenas de millón.
b. Treinta unidades de billón.
c. Dos millones quinientos veinticinco mil seiscientos treinta y cuatro.
d. Doscientos sesenta y tres millones doscientos sesenta y tres mil ochocientos setenta y ocho.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Razonamiento

10 Lee y escribe cada número. Determina cuál es el mayor y cuál es el menor de todos.

a. Cuarenta y cinco millones setecientos veinticinco mil treinta y dos.

b. Doscientos noventa y tres millones ochocientos cuarenta mil trescientos uno.

c. Setecientos cuarenta y cinco mil millones doscientos veinticuatro mil cuatro.

d. Mil cuarenta y cuatro millones ciento veinticinco mil trescientos dos.

e. Un millón veintiocho.

11 Usa los dígitos del 1 al 9 una sola vez para formar el número más grande y el más pequeño que se puedan con estos. Después, haz lo que se indica.

a. Escribe cómo se lee cada uno de los números que formaste.

b. Indica el valor relativo del 8 en cada uno de los dos números que escribiste.

12 Retoma los números que construiste en la actividad 11 y resuelve cada pregunta.

a. Si se aumenta el número mayor en veinte millones, ¿cuál número resulta?

b. Si se disminuye en cinco millones el número menor, ¿qué número se obtiene?

c. ¿Cuál es la diferencia entre los números que acabas de construir?

13 Lee la información de la Tabla 1.4. Luego, complétala expresando cada cantidad en hectómetros cuadrados.

Continente	Extensión en kilómetros cuadrados	Extensión en hectómetros cuadrados
América	42 000 000	
Europa	10 000 000	
África	30 000 000	
Oceanía	9 000 000	
Asia	44 000 000	
Antártida	14 000 000	

Tabla 1.4

Resolución de problemas

14 Lee la siguiente información y escribe cada dato resaltado en su notación desarrollada y en palabras.

Entre 2000 y 2005, Brasil perdió 3 103 000 hectáreas de bosque al año. El planeta perdió **745 000** hectáreas de bosque cada día en esos mismos años, el equivalente a **37 000** campos de fútbol.

Evaluación del aprendizaje

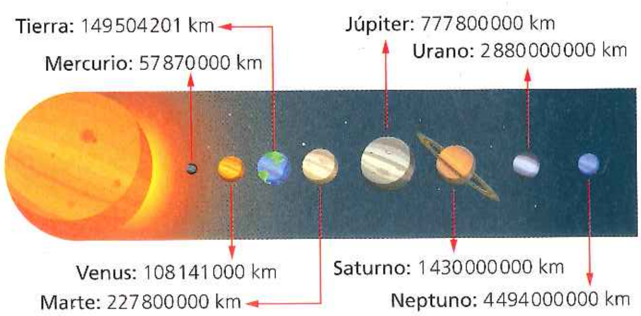
i Resuelve cada situación.

a. El dígito de las decenas de mil de un número de cinco cifras es 6, y el de las unidades es 8. El dígito de las decenas es 0. El de las unidades de mil es el único número par que es primo. Si los dígitos del número suman 20, ¿cuál es el número?

b. Si se aumenta en 3 centenas el número 24 578, ¿qué número se obtiene?

ii Escribe cómo se lee cada una de las distancias del Sol a los planetas (dadas en kilómetros en la Figura 1.1) y decide cuáles dos planetas vecinos son los más cercanos.

Figura 1.1



Educación ambiental

De las 54 871 especies de flora que tiene nuestro país, 22 840 corresponden a especies de orquídeas, de las cuales 1 543 son endémicas. Escribe el desarrollo exponencial de cada número. ¿Por qué crees que Colombia es considerado un país megadiverso?

2 Adición y sustracción de números naturales

Saberes previos

La distancia que separa a Quibdó de Villavicencio es 378 km y la que lo separa de Medellín es 135 km. ¿Cuánto más lejos está Quibdó de una ciudad que de la otra?

Analiza

Lina va de Bogotá a Buenos Aires por una aerolínea y recorre 4 699 km. Una vez allí, toma otro avión que la conduce a Lima, volando esta vez 3 151 km. Finalmente, en Lima toma un vuelo de regreso a Bogotá y vuela 1 893 km.

- ¿Cuántos kilómetros voló Lina en total?

Conoce

2.1 Adición de números naturales

Para saber cuántos kilómetros voló Lina en total en los tres trayectos, se debe efectuar una adición.

1. Se suman las unidades.

$$9 + 1 + 3 = 13$$

El 13 se reagrupa en 3 unidades y 1 decena; esta última se suma en la columna correspondiente.

$$\begin{array}{ccccc} & & & 1 & \\ & 4 & 6 & 9 & 9 \\ + & 3 & 1 & 5 & 1 \\ & 1 & 8 & 9 & 3 \\ \hline & & & & 3 \end{array}$$

2. Se suman las decenas, incluida la que se reagrupó.

$1 + 9 + 5 + 9 = 24$. Las 24 decenas que se obtienen se reagrupan en 4 decenas y 2 centenas. Se escriben las 4 decenas y se reagrupan 2 centenas en la columna correspondiente.

$$\begin{array}{ccccc} & & 2 & 1 & \\ & 4 & 6 & 9 & 9 \\ + & 3 & 1 & 5 & 1 \\ & 1 & 8 & 9 & 3 \\ \hline & & & 4 & 3 \end{array}$$

3. Se suman las centenas, incluidas las 2 que se reagruparon.

$$2 + 6 + 1 + 8 = 17$$

Las 17 centenas se reagrupan en 1 unidad de mil y 7 centenas, que se escriben en la columna que corresponde.

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 1 & \\ & 4 & 6 & 9 & 9 \\ + & 3 & 1 & 5 & 1 \\ & 1 & 8 & 9 & 3 \\ \hline & & 7 & 4 & 3 \end{array}$$

4. Finalmente, se suman las unidades de mil, incluyendo la que se reagrupó.

$$1 + 4 + 3 + 1 = 9$$

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 1 & \\ & 4 & 6 & 9 & 9 \\ + & 3 & 1 & 5 & 1 \\ & 1 & 8 & 9 & 3 \\ \hline & 9 & 7 & 4 & 3 \end{array}$$

Lina voló en total 9 743 km.

La **adición** de números naturales es una operación que permite solucionar situaciones en las que se realizan actividades como agregar, agrupar o comparar. En esta operación los números a sumar reciben el nombre de **sumandos** y al resultado se le denomina **suma**.

El término "reagrupar" indica lo mismo que "llevar", y se basa en el hecho de que en el sistema de numeración decimal cada 10 unidades de un orden forman una unidad del orden siguiente. Así, 10 unidades corresponden a una decena, 10 decenas conforman una centena, 10 centenas forman una unidad de mil, etc.

2.2 Propiedades de la adición

La adición de números naturales satisface las siguientes propiedades:

- Clausurativa. La suma de dos números naturales es otro número natural.
- Conmutativa. La suma de dos números naturales no varía si se cambia el orden de los sumandos. Por ejemplo, $4 + 2 = 2 + 4$.
- Asociativa. Tres o más sumandos pueden agruparse de diferentes maneras y la suma no cambia. Por ejemplo, $(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$.
- Elemento neutro o propiedad modulativa. La suma de cualquier número natural y 0 es igual al mismo número natural. Por ejemplo, $5 + 0 = 5$.

Ejemplo 1

Para hallar el resultado o suma de $345 + 986 + 635 + 114$ se pueden usar de manera conveniente las propiedades de la adición.

$$\begin{aligned} 345 + 986 + 635 + 114 &= 345 + 635 + 986 + 114 \leftarrow \text{Propiedad conmutativa} \\ &= (345 + 635) + (986 + 114) \leftarrow \text{Propiedad asociativa} \\ &= 980 + 1\,100 \leftarrow \text{Propiedad clausurativa} \\ &= 2\,080 \end{aligned}$$

2.3 Sustracción de números naturales

La **sustracción** es una operación por la cual se determina la **diferencia**, es decir, en cuánto es mayor un número, llamado **minuendo**, que otro, denominado **sustraendo**.

En el proceso de sustracción se debe desagrupar siempre que sea necesario.

Ejemplo 2

Hay 395 654 animales en una reserva forestal y 683 732 en otra. ¿Cuál de las dos reservas tiene mayor número de animales? ¿Cuántos más?

Para responder, debemos efectuar la sustracción $683\,732 - 395\,654$.

$$\begin{array}{r} 6\ 8\ 3\ 7\ 3\ 2 \\ -\ 3\ 9\ 5\ 6\ 5\ 4 \\ \hline 2\ 8\ 8\ 0\ 7\ 8 \end{array}$$

Hay 288 078 animales más en la segunda reserva que en la primera.

Ejemplo 3

Calcula en cuánto es mayor 8 738 que 1 376.

El problema se resuelve efectuando la operación: $8\,738 - 1\,376$.

$$\begin{array}{rl} 8\ 7\ 3\ 8 & \leftarrow \text{Minuendo} \\ -\ 1\ 3\ 7\ 6 & \leftarrow \text{Sustraendo} \\ \hline 7\ 3\ 6\ 2 & \leftarrow \text{Diferencia} \end{array}$$

Por lo tanto, 8 738 supera a 1 376 en 7 362.

2 Adición y sustracción de números naturales

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Resuelve cada adición. Reagrupa cuando sea necesario.

a. $\begin{array}{r} 25786 \\ +\ 6932 \\ 59261 \\ \hline \end{array}$ b. $\begin{array}{r} 5697 \\ +\ 4359 \\ 2375 \\ \hline \end{array}$

c. $\begin{array}{r} 16384 \\ +\ 46835 \\ 130859 \\ \hline \end{array}$ d. $\begin{array}{r} 58203 \\ +\ 75322 \\ 32953 \\ \hline \end{array}$

2 Resuelve las siguientes sustracciones.

a. $\begin{array}{r} 5643 \\ -\ 762 \\ \hline \end{array}$ b. $\begin{array}{r} 893 \\ -\ 79 \\ \hline \end{array}$

c. $\begin{array}{r} 802 \\ -\ 148 \\ \hline \end{array}$ d. $\begin{array}{r} 26538 \\ -\ 14148 \\ \hline \end{array}$

(Verifica en cada caso que:
Diferencia + Sustraendo = Minuendo)

3 Usa las propiedades de la adición para hallar el perímetro del polígono (Figura 1.2). Todas las medidas están dadas en cm.

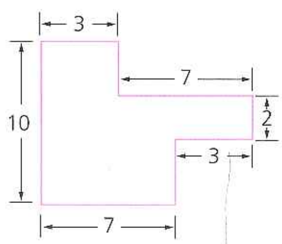


Figura 1.2

4 Usa de manera conveniente las propiedades de la adición para efectuar las sumas que se proponen.

a. 56 + 18 + 22 + 44

b. 120 + 230 + 80 + 70 + 5

c. 450 + 320 + 135 + 150 + 125 + 180

d. 210 + 90 + 765 + 55 + 110

e. 35 890 + 22 500 + 18 210 + 65 500 + 43 560

Razonamiento

5 Decide qué es mayor entre la suma de los primeros diez números impares y la de los primeros diez números pares. Justifica tu respuesta.

6 Determina el valor de cada letra de modo que las sumas sean correctas. Ten en cuenta que letras iguales corresponden a dígitos iguales.

a. $\begin{array}{r} \text{U N O} \\ +\ \text{U N O} \\ \text{U N O} \\ \hline \text{T R E S} \end{array}$ b. $\begin{array}{r} \text{T A C O S} \\ +\ \text{T A C O S} \\ \text{T A C O S} \\ \hline \text{M E X I C O} \end{array}$

7 Analiza si la sustracción satisface las mismas propiedades que la adición de números naturales. Justifica tu respuesta con ejemplos.

Modelación

8 Plantea una operación en cada caso y resuélvela.

a. De 15 798 resta 7 654.

b. De la suma de 76 543 y 13 877 resta 34 876.

c. A la diferencia entre 54 673 y 21 764 suma la diferencia de 76 983 con 23 876.

d. Resta 54 876 de la suma entre 65 432 y 43 765.

e. Resta la suma de 432 y 17 842 de la diferencia entre 43 876 y 22 875.

9 Resuelve.

a. ¿En cuánto es mayor 76 543 que 43 765?

b. ¿En cuánto es menor 45 792 que 81 298?

c. ¿Cuánto se le debe sumar a 43 765 para llegar a 100 000?

d. ¿En cuánto excede 65 498 a 32 987?

e. ¿Cuánto se le debe disminuir a 567 894 para obtener 125 000?

f. ¿Cuánto se le debe agregar a 54 987 para llegar a 100 000?

g. ¿En cuánto difieren 65 434 y 34 965?

h. ¿Cuánto le falta a 64 219 para llegar a 100 000?

i. ¿En cuánto se debe disminuir 65 432 para llegar a 5 decenas de mil?

j. ¿En cuánto se debe disminuir 78 321 para llegar a 23 432?

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Comunicación

10 Observa los letreros que se encuentran en la Figura 1.3 y contesta las preguntas.

Figura 1.3

a. ¿Cuánto dinero se requiere para comprar una libra de carne, tres peras, cinco zanahorias, una libra de papa, media libra de arveja y dos libras de arroz? ¿Es suficiente con $ 15 000?

Determina cuánto dinero falta o cuánto sobra.

b. Supón que quieres comprar 3 kilogramos de arroz y 2 kilogramos de arveja. Si llevas $ 10 000, ¿podrás hacer esa compra? Explica cuánto dinero falta o cuánto sobra en uno u otro caso.

11 Observa la Tabla 1.5 y responde las preguntas a partir de su información.

Poblaciones de ciudades de América	
Ciudad	Número de habitantes
México, D. F.	8 851 000
Sao Paulo	11 320 000
Lima	8 473 000
Santiago de Chile	6 300 000
Guayaquil	2 280 000
Buenos Aires	2 965 000
Bogotá	6 763 000
Nueva York	8 406 000

Tabla 1.5

a. ¿Cuántos habitantes más hay en Lima que en Buenos Aires?

b. ¿Cuántos habitantes más hay en Sao Paulo que en Bogotá?

c. ¿En cuánto excede la población de Nueva York a la de Santiago de Chile?

d. ¿Cuántos habitantes menos hay en Guayaquil que en México, D. F.?

Evaluación del aprendizaje

El mapa muestra las distancias en avión entre algunas ciudades de los países suramericanos.

Figura 1.4

a. Un avión sale de Bogotá, hace escala en Caracas y llega a Sao Luis.
¿Cuántos kilómetros recorre en total?

b. ¿Cuál recorrido es mayor, el de la ruta Bogotá – Quito – Lima – La Paz – Santiago de Chile o el de la ruta Bogotá – Caracas – Sao Luis – Montevideo – Buenos Aires? ¿En cuántos kilómetros supera el recorrido mayor al menor?

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Entre enero y febrero de 2015, se registraron 116 casos de maltrato de niñas de 0 a 4 años y 174 de niñas de 5 a 9 años. ¿Cuántos casos más se presentaron en un grupo de niñas que en otro? ¿Qué acciones deben implementarse para que esas cifras se reduzcan?

3 Multiplicación y división de números naturales

Saberes previos

Angélica escribió las siguientes sumas reiteradas como productos, pero cometió algunos errores.

- $7 + 7 + 7 + 7 = 4 \times 7 = 28$
- $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 6 + 3 = 9$
- $4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 4 \times 4 = 16$
- $15 + 15 + 15 = 3 \times 15 = 35$

Corrige los errores que cometió Angélica.

Analiza

Diana lee 12 páginas diarias de un libro de ficción.

- Si mantiene su ritmo de lectura, ¿cuántas páginas lee en 8 días?

Conoce

3.1 Multiplicación de números naturales

Para saber cuántas páginas lee Diana en 8 días, se puede efectuar la multiplicación:

$$12 \cdot 8 = 96$$

La **multiplicación** de dos números naturales es la suma de una misma cantidad tantas veces como lo indique otra cantidad. Los términos que intervienen en la multiplicación de números naturales son los **factores** y el **producto**.

Ejemplo 1

Para multiplicar $1234 \cdot 567$ se lleva a cabo este procedimiento.

1. Se multiplican 7 unidades del segundo factor por 1234 y se anota el resultado utilizando los lugares necesarios desde las unidades.

$$\begin{array}{r} 1\,2\,3\,4 \\ \times \quad 5\,6\,7 \\ \hline 8\,6\,3\,8 \end{array}$$

2. Se multiplican las 6 decenas del segundo factor por 1234 y se anota el resultado utilizando los lugares necesarios desde las decenas.

$$\begin{array}{r} 1\,2\,3\,4 \\ \times \quad 5\,6\,7 \\ \hline 8\,6\,3\,8 \\ 7\,4\,0\,4 \end{array}$$

3. Se multiplican las 5 centenas del segundo factor por 1234 y se anota el resultado utilizando los lugares necesarios desde las centenas.

$$\begin{array}{r} 1\,2\,3\,4 \\ \times \quad 5\,6\,7 \\ \hline 8\,6\,3\,8 \\ 7\,4\,0\,4 \\ 6\,1\,7\,0 \end{array}$$

4. Se suman los tres números obtenidos para llegar al resultado final.

$$\begin{array}{r} 1\,2\,3\,4 \\ \times \quad 5\,6\,7 \\ \hline 8\,6\,3\,8 \\ 7\,4\,0\,4 \\ 6\,1\,7\,0 \\ \hline 6\,9\,9\,6\,7\,8 \end{array}$$

Ejemplo 2

La cantidad de minutos que hay en un año se puede calcular usando la multiplicación.

- Primero, se halla el número de horas que hay en un año.

$$365 \cdot 24 = 8\,760$$

- Luego, se halla el número de minutos que hay en 8 760 horas.

$$8\,760 \cdot 60 = 525\,600$$

Por lo tanto, en un año hay 525 600 minutos.

3.2 Propiedades de la multiplicación

La multiplicación de números naturales satisface estas propiedades:

- Conmutativa. El orden de los factores no altera el producto: $8 \cdot 6 = 6 \cdot 8$.
- Asociativa. Se pueden agrupar los factores de diversas maneras sin que varíe el producto: $2 \cdot (6 \cdot 4) = (2 \cdot 6) \cdot 4$.
- Distributiva. El producto de un número por una suma es igual que la suma de los productos del número por los sumandos: $4 \cdot (8 + 3) = (4 \cdot 8) + (4 \cdot 3)$.
- Modulativa o elemento neutro. Cualquier número multiplicado por 1 da como resultado el mismo número: $34 \cdot 1 = 1 \cdot 34 = 34$.

3.3 Multiplicaciones abreviadas

Algunos productos se pueden calcular de manera inmediata o abreviada.

- El **producto de un número por una potencia de 10** se obtiene escribiendo el número seguido de tantos ceros como los que tenga la potencia de 10.
- El **producto de un número por 11, 12, 13... o 19** se obtiene aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición, al descomponer el factor 11, 12, 13... o 19 como una suma, así:

$23 \cdot 18 = 23 \cdot (10 + 8) = 23 \cdot 10 + 23 \cdot 8 = 230 + 184 = 414$

3.4 División de números naturales

La **división** es una operación que consiste en repartir una cantidad en partes iguales. Sus términos son: **dividendo**, **divisor**, **cociente** y **resto** o **residuo**.

En toda división se cumple que: Dividendo = Divisor · Cociente + Residuo.

Dividendo → 3 8 9 |2 5 ← Divisor
1 3 9 | 1 5 ← Cociente
Residuo → 1 4

$389 = (25 \cdot 15) + 14$
$= 375 + 14$
$= 389$

Cuando el residuo de una división es 0 se dice que la división es exacta.

4 2 0 |5
2 0 | 8 4
0

$420 = 84 \cdot 5$

Ejemplo 3

Jorge desea repartir entre sus doce amigos 243 chocolates. ¿Cuántos chocolates enteros le corresponden a cada uno?

Para obtener el número de chocolates que le corresponde a cada amigo se resuelve la división $243 \div 12$.

2 4 3 |1 2
0 3 | 2 0

A cada amigo le corresponden 20 chocolates y sobran 3 chocolates.

3 Multiplicación y división de números naturales

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Escribe la operación en forma vertical y calcula.

a. 236 · 46 b. 827 · 23

c. 425 · 61 d. 745 · 13

2 Resuelve de manera abreviada las multiplicaciones que se presentan a continuación.

a. 36 · 1 000 b. 25 · 2 000

c. 46 · 18 d. 76 · 17

e. 876 · 19 f. 3 298 · 11

3 Completa la Tabla 1.6.

Dividendo	Divisor	Cociente	Residuo
364	148	2	68
	3	24	2
872		62	4
1 345	87		
195	26		
		4	2

Tabla 1.6

4 Determina si las siguientes operaciones son correctas.

a. 257 · 36 = 9 242

b. 43 · (23 + 54) = 3 211

c. 4 128 ÷ 86 = 48

d. 3 425 · (17 + 12) = 99 325

5 Escribe las divisiones que corresponden a la igualdad 22 · 11 + 6.

6 Calcula el área de cada rectángulo. Explica cómo usaste la multiplicación para saberlo.

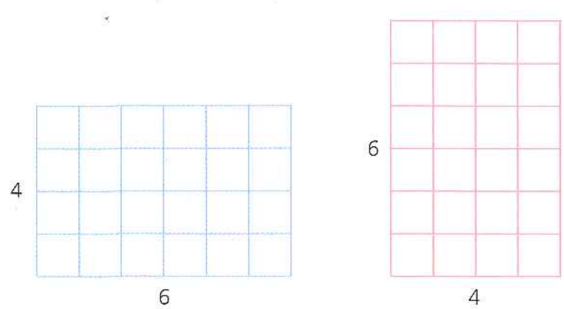


Figura 1.5

7 Determina si la división satisface las propiedades conmutativa, asociativa o clausurativa. Escribe ejemplos que apoyen tu respuesta.

8 Lee y soluciona.

Para hacer una estimación del producto 892 · 18, se puede aproximar 892 a 900 y 18 a 20.

Así, 892 · 18 es aproximadamente igual al producto 900 · 20 = 18 000.

Halla el producto exacto y determina la diferencia entre este y el producto aproximado.

9 Estima cada producto. Sigue el modelo de la actividad anterior.

a. 655 · 98 b. 132 · 47

c. 901 · 62 d. 185 · 55

e. 227 · 87 f. 946 · 33

g. 19 · 7 635 h. 3 500 · 515

i. 20 568 · 314 j. 40 256 · 719

k. 3 215 · 12 l. 329 · 37

Razonamiento

10 Explica si se obtiene el mismo resultado multiplicando 10 · 5 que dividiendo 500 ÷ 10.

11 Escribe las cifras que completan cada operación.

a.
```
     3 2 8
  ×    5
   6 5
 + 1   4
   1 7   6
```

b.
```
3 8   3 | 3
  2       1 2
 1
```

12 Lee y soluciona.

María tiene sembradas cinco hileras de árboles de manzana, y en cada una hay doce árboles. Además, tiene seis hileras de pinos, cada una con 16 árboles. ¿Cuántos árboles en total tiene María entre manzanos y pinos?

13 Escribe dos números que multiplicados den como resultado un número par que se pueda dividir entre 11.

Resolución de problemas

14 Una década corresponde a un lapso de diez años y un siglo corresponde a 100 años. ¿En once décadas hay más años que en un siglo?

15 La papelería "Papel y lápiz" tiene 219 resmas de papel. Si la papelería "Trazos creativos" tiene tres veces más resmas de papel que la primera papelería, ¿cuántas resmas de papel tiene?

16 En la cafetería de un colegio caben doce estudiantes en cada mesa. Si 480 estudiantes van a tomar onces, ¿cuántas mesas se necesitan para que se sienten todos los estudiantes?

17 Si caben nueve personas en un colectivo, ¿cuántos colectivos se necesitan para transportar a 137 personas?

18 Lina va en carro a una finca que está a 441 kilómetros de distancia. Si tarda siete horas en llegar, ¿cuántos kilómetros recorrió cada hora?

19 Milena llevó una bolsa con 700 monedas de $ 500 al banco y las cambió por billetes de $ 2 000. ¿Cuántos billetes recibió?

20 El Ministerio de Educación repartirá en partes iguales 2 250 libros entre 18 colegios oficiales. ¿Cuántos libros recibirá cada colegio?

21 Alfonso tiene tres porta CD: uno tiene dos divisiones con doce compartimentos cada una; otro tiene tres divisiones con nueve compartimentos, y el tercero tiene cuatro divisiones con quince compartimentos cada una. ¿Cuántos CD puede guardar Alfonso como máximo?

22 En un lavadero de autos les pagan a los empleados $ 30 000 diarios por un turno diurno y $ 35 000 por cada turno nocturno. ¿Cuánto ganó José en un mes que trabajó 17 días de día y 4 de noche?

23 En el salón de sexto hay 48 estudiantes. La profesora necesita conformar grupos de limpieza, de tareas y de asistencia sin que ningún estudiante repita grupo. Los grupos deben quedar conformados teniendo en cuenta las siguientes observaciones:

- El grupo de limpieza debe tener ocho veces la cantidad de estudiantes que tiene el grupo de tareas.
- El grupo de asistencia debe tener el triple de estudiantes que el grupo de tareas.

¿Cuántos estudiantes debe haber en cada grupo?

24 En un terreno libre se autoriza la construcción de una cancha múltiple de 6 metros por 4 metros. Si las dimensiones del terreno son 11 metros por 16 metros, ¿qué área quedará disponible para la zona verde?

25 En un concurso de cocina entre siete estudiantes se repartieron en partes iguales 38 tortas y 30 postres. ¿Cuántas tortas y cuántos postres sobran?

Evaluación del aprendizaje

i Hernán trabaja 8 horas diarias de lunes a viernes y 5 horas los sábados. Julián trabaja 9 horas diarias cada día de lunes a viernes y tiene permiso para salir 2 horas antes una vez a la semana. ¿Cuál de los dos trabaja más tiempo a la semana?

ii Josué tiene 25 CD de rock, doce de salsa y 18 de pop. Para ordenarlos compró una repisa con cinco divisiones y puso igual cantidad de discos en cada una. Al finalizar, sacó siete CD de la primera repisa para prestárselos a un amigo. ¿Cuántos discos le quedarán en esa repisa?

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Cada ser humano desarrolla una personalidad diferente que se expresa en diversas formas. Cuando tienes problemas para abordar operaciones matemáticas como la multiplicación, ¿cómo expresas tu preocupación? Habla al respecto con un compañero de clase.

4 Potenciación, radicación y logaritmación de números naturales

Saberes previos

¿Cuál número multiplicado por sí mismo tres veces es igual a 216?

Analiza

Observa los cubos de la Figura 1.6.

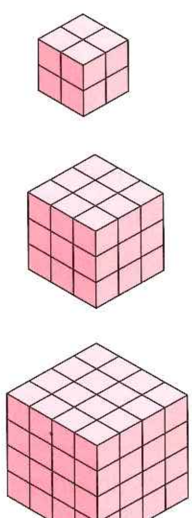


Figura 1.6

- ¿Cuántos cubos pequeños conforman cada figura?

Conoce

El primer cubo de la Figura 1.6 tiene dos cubos pequeños a lo largo, dos a lo alto y dos a lo ancho, es decir que en total tiene $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ cubos.

El segundo cubo tiene tres cubos a lo largo, tres a lo alto y tres a lo ancho; en total, consta de $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ cubos.

El tercer cubo tiene cuatro cubos a lo largo, cuatro a lo alto y cuatro a lo ancho; esto es, se conforma de $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ cubos.

La **potenciación** de números naturales es una operación que permite calcular un producto de factores iguales en forma abreviada.

Los términos que intervienen en la potenciación son:

Base: cantidad que se toma como factor.

Exponente: indica la cantidad de veces que se toma la base como factor.

Potencia: resultado de multiplicar la base por sí misma la cantidad de veces que indica el exponente.

Ejemplo 1

En la situación inicial, el producto de factores iguales que muestra el número de cubos de la primera construcción es:

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Puede escribirse de forma abreviada como: $2^3 = 8$

En esta expresión, el número 2 es la **base**, el 3 es el **exponente** y el 8 es la **potencia**.

4.1 Potencia de un producto y de un cociente

La **potencia de un producto** es igual al producto de las potencias de los factores. La **potencia de un cociente** es igual al cociente entre la potencia del dividendo y la potencia del divisor.

Ejemplo 2

La expresión $(3 \cdot 4)^2$ equivale al producto $3^2 \cdot 4^2$.

Así, $(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2 = 9 \cdot 16 = 144$.

De forma análoga, $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4^2}{5^2} = \frac{16}{25}$

4.2 Producto de potencias de la misma base

El **producto de potencias de la misma base** es igual a una potencia con la misma base, y el exponente, igual a la suma de los exponentes de los factores.

Ejemplo 3

En el producto $3^5 \cdot 3^4 \cdot 3^3$, la base de cada uno de los factores es la misma, así que:

$$3^5 \cdot 3^4 \cdot 3^3 = 3^{(5+4+3)} = 3^{12}$$

4.3 Cociente de potencias de la misma base

El **cociente de dos potencias** de la misma base es una potencia que tiene la misma base y el exponente es igual a la diferencia entre el exponente del dividendo y el exponente del divisor.

Ejemplo 4

Al aplicar el criterio para calcular potencias de la misma base sobre la operación $\frac{5^6}{5^3}$ se tiene que:

$$\frac{5^6}{5^3} = 5^{(6-3)} = 5^3 = 125$$

Ejemplo 5

Para resolver la operación $\frac{7^6 \cdot 7^2}{7^3 \cdot 7^4}$, se puede hacer uso primero del criterio del producto de potencias de la misma base y luego del cociente de potencias de la misma base, como se muestra a continuación.

$$\frac{7^6 \cdot 7^2}{7^3 \cdot 7^4} = \frac{7^{(6+2)}}{7^{(3+4)}} = \frac{7^8}{7^7} = 7^{(8-7)} = 7^1 = 7$$

4.4 Potencia de una potencia

La **potencia de una potencia** se halla dejando la base y multiplicando los exponentes.

Ejemplo 6

Al aplicar el criterio de la potencia de una potencia para calcular $(3^4)^5$, se tiene que:

$$(3^4)^5 = 3^{4 \cdot 5} = 3^{20}.$$

4.5 Radicación de un número natural

La **radicación** es la operación que consiste en buscar un número que, multiplicado por sí mismo cierta cantidad de veces, arroje un producto determinado. La radicación es una operación **inversa** de la **potenciación**.

Exponente — Índice

$$3^3 = 27 \qquad \sqrt[3]{27} = 3$$

Raíz

Potencia — Cantidad subradical

Base

Ejemplo7

Cada par de las siguientes expresiones son inversas.

$4^3 = 64$ y $\sqrt[3]{64} = 4$ | $\sqrt[5]{32} = 2$ y $2^5 = 32$ | $\sqrt[2]{81} = 9$ y $9^2 = 81$

4 Potenciación, radicación y logaritmación de números naturales

4.6 Raíz de un número natural

De acuerdo con su índice, la raíz recibe nombres particulares: para índice 3, se denomina **raíz cúbica**; para índice 4, **raíz cuarta**; para índice 5, **raíz quinta**, y así sucesivamente (es decir, se nombra el número ordinal que corresponda).

Ejemplo 8

Observa cómo se leen estas expresiones.

- $\sqrt[6]{15\,625} = 5$: Raíz sexta de 15 625 es 5.
- $\sqrt[9]{1}$: Raíz novena de 1 es 1.
- $\sqrt[2]{49} = 7$: Raíz cuadrada de 49 es 7. Se acostumbra a omitir el índice en la raíz cuadrada. Es decir, $\sqrt[2]{49} = \sqrt{49}$.

A continuación se presentan algunas **propiedades** de la **radicación** en las que a, b, n y m son números naturales.

- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

Ejemplo 9

En las siguientes igualdades se usan las propiedades de la radicación.

$$\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{4} \times \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\sqrt[3]{\frac{64}{8}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{4096}} = \sqrt[2\times3]{4096} = \sqrt[6]{4096} = 4$$

Observa que $5 = \sqrt{25} = \sqrt{16 + 9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$

En general, $\sqrt[n]{a + b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$.

4.7 Logaritmo de un número natural

El **logaritmo** de un número x, en una base dada a, es el exponente y al cual se debe elevar la base para obtener el número. El logaritmo se denota simplemente con log. Así, si $\log_a x = y$, entonces $a^y = x$.

La logaritmación y la potenciación son operaciones inversas y se relacionan como se muestra a continuación.

Ejemplo 10

Observa cómo está relacionada cada pareja de expresiones.

$\log_2 16 = 4$ y $2^4 = 16$ $\quad$ $\log_5 125 = 3$ y $5^3 = 125$ $\quad$ $\log_7 49 = 2$ y $7^2 = 49$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Escribe los siguientes productos en forma de potencia y determina su valor.

a. $4^3 \cdot 4^2 \cdot 4^1$

b. $2^2 \cdot 2 \cdot 2^4 \cdot 2^3$

c. $5^3 \cdot 5^2 \cdot 5^0 \cdot 5$

d. $6^2 \cdot 6^2 \cdot 6^2 \cdot 6^2$

2 Expresa las siguientes multiplicaciones en forma de producto de la misma base.

a. $9 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot 27$

b. $16 \cdot 2^2 \cdot 4 \cdot 2^0$

c. $5 \cdot 25 \cdot 125 \cdot 5^3 \cdot 5^2$

3 Escribe los logaritmos que se deducen de las siguientes igualdades.

a. $9^3 = 729$ b. $5^2 = 25$

c. $3^7 = 2\,187$ d. $6^2 = 36$

Razonamiento

4 Resuelve y explica las propiedades de la multiplicación y de la potenciación que usaste en cada ejercicio.

a. $\dfrac{3^5 \cdot (2 \cdot 9)^5 \cdot (2^2)^4 \cdot 3^2}{(3 \cdot 9)^2 \cdot 9^3}$

b. $\dfrac{4^4 \cdot 6^4 \cdot 7^2 \cdot 5^3}{7 \cdot 3^2}$

c. $\dfrac{(3^2)^5 \cdot (3^2 \cdot 4^2)^3 \cdot (11^7)^2 \cdot 2^4}{(5^3 \cdot 2^2)^2 \cdot 11^3}$

5 Completa en tu cuaderno.

a. $\sqrt[3]{1000} =$ b. $\sqrt[3]{125} =$

c. $\sqrt{16} =$ d. $\sqrt[6]{64} =$

6 Completa.

a. $\log_6 216 =$ porque:

b. $\log_2 8 =$ porque:

7 3 Lee y soluciona.

a. Si n es un número natural para el cual n^2 está entre 120 y 130, ¿cuál es el valor de n?

b. Halla dos números menores que 100 que tengan raíz cuadrada exacta y cuya suma también la tenga.

c. Si ABC y DEF representan números de tres dígitos de tal manera que $A = D$, $B^2 = E$ y $C^2 = F$, ¿cuál es el mayor valor que puede tener el número DEF?

Resolución de problemas

8 En una bodega hay una pila con ocho cajas de largo, ocho de ancho y ocho de alto. Si cada caja contiene ocho balones de fútbol que se venden a $ 15 000 cada uno, ¿cuánto cuestan todos los balones almacenados?

Evaluación del aprendizaje

i Se quieren distribuir los 529 estudiantes de un colegio formando un cuadrado. ¿Cuántos estudiantes habrá en cada lado del cuadrado?

ii El sonido se mide en una escala logarítmica usando una unidad que se llama **decibel**. Un decibel (d) se define así: $d = 10\log\left(\dfrac{P}{P_0}\right)$, donde P es la potencia o intensidad del sonido y P_0 es el sonido más débil que puede captar el humano.

Demuestra que si $P = 2P_0$, el nivel de sensación sonora aumenta en 3,0 decibelios. (Considera $\log 2 = 0{,}3$).

Estilos de vida saludable

Para saber si tienes una alimentación saludable se calcula el índice de masa corporal (IMC), el cual no puede ser superior a 25. Cálcula tu IMC con la siguiente formula:

$$\text{IMC} = \frac{\text{Tu peso en kg}}{(\text{Tu estatura en m})^2}$$

5 Múltiplos y divisores de un número

Saberes previos

Elige el número intruso en cada secuencia.

- 3, 6, 9, 12, 16, 18, 21...
- 7, 14, 21, 28, 35, 45, 49...
- 9, 18, 29, 36, 45, 54, 63....

Analiza

Carlos llenó el álbum del Mundial Brasil 2014. Cierto día, él compró cinco sobres, en cada uno de los cuales venían seis láminas.

- ¿Cuántas láminas contó Carlos en esa compra?

Conoce

5.1 Múltiplos de un número

Para saber cuántas láminas compró, Carlos puede contar de seis en seis, así:

Figura 1.7

Carlos contó 30 láminas.

Los anteriores son algunos de los múltiplos de 6.

Los **múltiplos** de un número natural son los números naturales que resultan de multiplicar ese número por otros números naturales. Decimos que un número es múltiplo de otro si le contiene un número entero de veces.

Ejemplo 1

Los números 6, 12, 18, 24 y 30 son múltiplos de 6, puesto que:

$6 = 6 \cdot 1$ $\quad 12 = 6 \cdot 2$ $\quad 18 = 6 \cdot 3,$

$24 = 6 \cdot 4$ $\quad 30 = 6 \cdot 5$

Ejemplo 2

El número 96 es múltiplo de 6, pues $96 = 6 \cdot 16$, mientras que 100 no lo es porque no existe ningún número natural que multiplicado por 6 dé 100.

Ejemplo 3

Se pueden obtener ordenadamente los múltiplos de cualquier número con ayuda de su tabla de multiplicar.

Por ejemplo, los primeros múltiplos de 7 son:

$7 \cdot 0 = 0$ $\quad 7 \cdot 1 = 7$ $\quad 7 \cdot 2 = 14$ $\quad 7 \cdot 3 = 21$

$7 \cdot 4 = 28$ $\quad 7 \cdot 5 = 35$ $\quad 7 \cdot 6 = 42$ $\quad 7 \cdot 7 = 49$

Se puede escribir: $M_7 = \{0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49... \}$

Algunas propiedades de los múltiplos son las siguientes:

- La suma o la diferencia de varios múltiplos de un número es otro múltiplo de dicho número.
- Si un número es múltiplo de otro, y este lo es de un tercero, el primero es múltiplo del tercero.

5.2 Divisores de un número

Los **divisores** de un número natural son los números naturales que lo pueden dividir de manera exacta, es decir, sin dejar residuo. Ser divisor es recíproco de ser múltiplo. Por lo tanto si al dividir un número D entre otro d se obtiene que su resto es 0, se puede decir que D es múltiplo de d.

Ejemplo 4

Dado que 48 se puede expresar como el producto de números naturales, así: $1 \cdot 48$, $2 \cdot 24$, $3 \cdot 16$, $4 \cdot 12$, $6 \cdot 8$, $8 \cdot 6$, $12 \cdot 4$, $16 \cdot 3$, $24 \cdot 2$ y $48 \cdot 1$, entonces los divisores de 48 son 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 y 48, pues al dividir a 48 entre cualquiera de ellos se obtiene una división exacta.

Ejemplo 5

Como 9 es múltiplo de 3, entonces 3 es divisor de 9.

Un número es divisor o factor de otro cuando la división del segundo por el primero es exacta.

Ejemplo 6

Para mostrar que 12 es múltiplo de 3 y que 3 es divisor de 12, se puede pensar en una forma de distribuir 12 donas en 3 filas con 4 donas en cada una, así: $12 = 3 \cdot 4$.

De otra parte, al dividir 12 entre 3, se obtiene 4 como cociente y 0 como residuo.

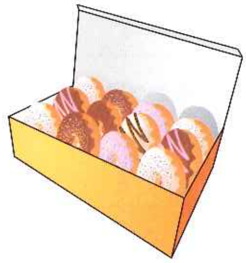


Figura 1.8

Algunas de las propiedades de los divisores son:

- Todo número distinto de 0 es divisor de sí mismo.
- La unidad es divisor de cualquier número.
- Si un número es divisor de otros dos, también lo es de su suma y de su diferencia.
- Si un número es divisor de otro, también lo es de cualquiera de sus múltiplos
- Si un número es divisor de otro y este lo es de un tercero, el primero es divisor del tercero.

Ejemplo 7

El 5 es divisor de 5, pues $5 \div 5 = 1$.

El 1 divide a 5, pues $5 \div 1 = 5$.

El 5 es divisor de 15 y de 20, y también es divisor de $15 + 20$ y de $20 - 15$.

El 5 es divisor de 5 y también de $5 \cdot 2$, $5 \cdot 3$, $5 \cdot 4$ y cualquier otro múltiplo de 5.

El 5 es divisor de 10 y el 10 es divisor de 30; por tanto, 5 es divisor de 30.

5.3 Cálculo de los divisores de un número

Cuando se expresa un número como producto de dos factores, cada factor es un divisor de ese número.

Ejemplo 8

Existen varias formas para dividir una barra de chocolate de 24 pastillas en pedazos de manera que en cada uno quede el mismo número de pastillas, como se muestra en la Tabla 1.7.

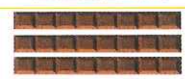
Número de pedazos	Pastillas en cada pedazo	Gráfica	Producto
1	24		$1 \cdot 24$
2	12		$2 \cdot 12$
3	8		$3 \cdot 8$
4	6		$4 \cdot 6$
6	4		$6 \cdot 4$
8	3		$8 \cdot 3$
12	2		$12 \cdot 2$
24	1		$24 \cdot 1$

Tabla 1.7

Si se intenta separar 24 entre 5, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22 o 23 la división no es exacta.

Por ejemplo, $24 \div 5$ deja como cociente 4 y como residuo 4; es decir, la barra quedaría separada en 4 pedazos con 5 pastillas en cada uno y otra barra de 4 pastillas.

Por consiguiente, los divisores de 24 son: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24.

Ejercicio 9

Encuentra los divisores de 6.

Para encontrar los divisores de 6, se tiene que dividir 6 entre 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Si la división es exacta es porque el número es divisor de 6.

$6 \div 1 = 6$, $6 \div 2 = 3$, $6 \div 3 = 2$ y $6 \div 6 = 1$ (son divisiones exactas).

$6 \div 4$ deja 1 como cociente y 2 como residuo, $6 \div 5$ deja 1 como cociente y 1 como residuo. Por lo tanto, los divisores de 6 son 1, 2, 3 y 6.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Relaciona cada número de la columna de la izquierda con los divisores que le corresponden en la columna de la derecha.

Números	Divisores
72	6
51	17
32	4
34	2
81	9
27	3

2 Halla los seis primeros múltiplos de cada uno de los siguientes números.

a. 13
b. 9
c. 5
d. 19

3 Encuentra los divisores de cada número.

a. 28
b. 90
c. 78
d. 800

Razonamiento

4 Encuentra un número que cumpla las condiciones dadas.

a. Es divisor de 96 y múltiplo de 4.
b. Es múltiplo de 7, 8, 9 y 10.
c. Es divisor de 300, 66 y 51.

Modelación

5 Responde cada pregunta teniendo en cuenta los números de la Figura 1.9.

23 67 45 10 96 64 35 98

Figura 1.9

a. ¿Qué balotas contienen números divisibles por 2 y por 3 a la vez?
b. ¿Cuántas contienen múltiplos de 3?
c. ¿Qué números luego de sumárseles 15 se transforman en números divisibles entre 2?
d. ¿Cuáles números al sumárseles 3 arrojan un múltiplo de 5?
e. ¿Cuáles números son divisibles por 12 y por 8 a la vez?

6 Responde.

a. ¿Cuántos divisores comunes tienen el 28 y el 36?
b. ¿Cuántos múltiplos comunes de 8 y 12 hay entre 0 y 100?

Comunicación

7 Contesta las siguientes preguntas.

a. ¿Es 56 múltiplo de 2, 7 y 14 a la vez?
b. ¿Es 12 un divisor de 36, 48, 96 y 360?
c. ¿Qué número es múltiplo de 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 al mismo tiempo?
d. ¿Qué número se le debe sumar a 35 para obtener un múltiplo de 3, 4, 5, 6 y 8?
e. ¿Cuáles son los divisores de 1?
f. ¿Cuáles son los múltiplos de 1?
g. ¿El 0 tiene múltiplos o divisores?

8 Para subir a la montaña rusa en un parque de diversiones, solo pueden pasar grupos de siete personas. Si hay 112 personas delante de Sara, ¿cuántos grupos pasan antes de que ella pueda subir?

Evaluación del aprendizaje

i Un conejo da un salto de 2 metros y luego uno de 3 metros hasta atravesar un puente de 32 metros de longitud. ¿Cuántos saltos de 2 metros y de 3 metros realiza?

ii Mario tiene una lista de precios en su tienda como la de la Tabla 1.8. Completa la información que falta.

Lista de precios de los huevos			
Cantidad	Precio	Cantidad	Precio
1	250	7	
2		8	
3		9	2 250
4	1 000	10	2 500
5		11	

Tabla 1.8

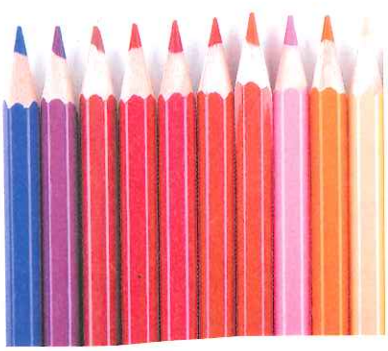
6 Criterios de divisibilidad

Saberes previos

Samuel tiene 18 canicas. ¿Podrá hacer grupos de tres canicas sin que le sobre ninguna?

Analiza

Leonardo quiere separar diez lápices en grupos con igual número en cada uno.



- ¿De qué maneras puede hacerlo?

Conoce

Para separar los diez lápices en grupos iguales, Leonardo puede formar:

Un grupo con diez lápices, dos grupos con cinco lápices en cada uno, cinco grupos con dos lápices en cada uno o diez grupos con un lápiz en cada uno.

Para resolver este problema, se puede hacer uso también de algunas reglas o criterios que indican cuándo un número se puede dividir entre otro sin dejar residuo.

Los **criterios de divisibilidad** permiten determinar cuándo un número es divisible por otro sin necesidad de realizar la división.

6.1 Divisibilidad por 2, por 5 y por 10

Un número es **divisible por 2** si termina en 0, 2, 4, 6 o en 8.

Un número es **divisible por 5** si termina en 0 o en 5.

Un número es **divisible por 10** si termina en 0.

Cuando entre dos números se establece una relación de divisibilidad, el número mayor es múltiplo del menor y el número menor es divisor del mayor.

Ejemplo 1

Como 45 es múltiplo de 5, entonces 5 es divisor de 45.

Al construir un rectángulo con los números de 1 a 50 (como el de la Tabla 1.9) y marcar con un círculo verde las casillas que contienen números que son divisibles por 2, con un círculo rojo aquellas con números divisibles por 5 y con un círculo azul las que muestran números divisibles por 10, se observan algunos patrones.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Tabla 1.9

- Todos los números que son divisibles entre 10 también son divisibles entre 2 y entre 5. Así, 10, 20, 30, 40, 50... son divisibles a su vez por 2, 5 y 10.
- Ningún número terminado en 5 es divisible ni por 2 ni por 10.
- Si mentalmente se completara el rectángulo hasta 100, se podría afirmar, por ejemplo, que 80 es divisible entre 2, 5 y 10; que ningún número terminado en 7 es divisible ni por 2, ni por 5, ni por 10; que hay 20 números divisibles entre 5, etc.

6.2 Divisibilidad por 4, por 25 y por 100

Un número es **divisible por 4** si lo es el número formado por sus dos últimas cifras o si termina en 00.

Un número es **divisible por 25** si lo es el número formado por sus dos últimas cifras o si termina en 00.

Un número es **divisible por 100** si termina en 00.

Ejemplo 2

Para observar algunos patrones con aquellos números que son divisibles entre 4, se puede construir una tabla numérica y tachar las casillas que contienen números que no son divisibles por tal número, siguiendo el criterio correspondiente. Al final, se obtiene la Tabla 1.10.

Si se observa la tabla numérica en forma vertical, se deduce que entre un número y el siguiente hay 20 unidades: 12, 32, 52, 72, 92. Siguiendo ese patrón, es claro que otros números divisibles entre 4 son 112, 132, 152 y 172.

~~1~~	~~2~~	~~3~~	4	~~5~~	~~6~~	~~7~~	8	~~9~~	~~10~~
~~11~~	12	~~13~~	~~14~~	~~15~~	16	~~17~~	~~18~~	~~19~~	20
~~21~~	~~22~~	~~23~~	24	~~25~~	~~26~~	~~27~~	28	~~29~~	~~30~~
~~31~~	32	~~33~~	~~34~~	~~35~~	36	~~37~~	~~38~~	~~39~~	40
~~41~~	~~42~~	~~43~~	44	~~45~~	~~46~~	~~47~~	48	~~49~~	~~50~~
~~51~~	52	~~53~~	~~54~~	~~55~~	56	~~57~~	~~58~~	~~59~~	60
~~61~~	~~62~~	~~63~~	64	~~65~~	~~66~~	~~67~~	68	~~69~~	~~70~~
~~71~~	72	~~73~~	~~74~~	~~75~~	76	~~77~~	~~78~~	~~79~~	80
~~81~~	~~82~~	~~83~~	84	~~85~~	~~86~~	~~87~~	88	~~89~~	~~90~~
~~91~~	92	~~93~~	~~94~~	~~95~~	96	~~97~~	~~98~~	~~99~~	100

Tabla 1.10

Ejemplo 3

El número 936 es divisible por 4, ya que sus dos últimas cifras, 36, es divisible entre 4: $36 \div 4 = 9$ y el residuo es 0.

El número 7 225 es divisible por 25, pues sus dos últimas cifras, 25, es divisible por 25: $25 \div 25 = 1$ y el residuo es 0.

6.3 Divisibilidad por 3 y por 9

Un número es **divisible por 3** si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

Un número es **divisible por 9** si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.

Ejemplo 4

El número 297 es divisible por 3 y por 9, pues la suma de sus cifras es múltiplo de estos:

$$2 + 9 + 7 = 18$$

El número 300 es divisible por 3 pero no es divisible por 9, pues la suma es múltiplo de 3 pero no de 9 :

$$3 + 0 + 0 = 3$$

El número 457 no es divisible ni por 3 ni por 9, pues la suma de sus dígitos no es múltiplo ni de 3 ni de 9:

$$4 + 5 + 7 = 16$$

6 Criterios de divisibilidad

6.4 Divisibilidad por 11

Para saber si un número es **divisible por 11**:

1. Se adicionan por separado las cifras que ocupan los lugares pares y las que ocupan los lugares impares.
2. Se calcula la diferencia entre las dos sumas anteriores.
3. Si esa diferencia es 0 o múltiplo de 11, el número inicial es divisible por 11.

Ejemplo 5

Para saber si 5 863 es divisible por 11, primero se identifican las cifras que ocupan las posiciones pares y las que ocupan las posiciones impares de derecha a izquierda.

Posiciones pares: 6 y 5, cuya suma es 11.

Posiciones impares: 3 y 8, que suman 11.

Luego, se calcula la diferencia entre los dos resultados anteriores: $11 - 11 = 0$. Por lo tanto, 5 863 es divisible por 11.

Ejemplo 6

Determina si 2 289 es divisible por 3, por 9 o por 11.

Al adicionar las cifras del número se obtiene 21, que es múltiplo de 3; entonces, 2 289 es divisible por 3.

De otro lado, como 21 no es múltiplo de 9, el número 2 289 no es divisible por 9.

Por último, al adicionar las cifras de los lugares pares (8 y 2) e impares (9 y 2) se obtiene 10 y 11, respectivamente, cuya diferencia no es ni 0 ni 11. Por tanto, 2 289 no es divisible por 11.

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1. Aplica los criterios de divisibilidad para completar la Tabla 1.11. Señala con una X.

Divisible por	2	3	4	5	9	10	11	25	100
324									
873									
1 110									
1 650									
2 970									
7196									
67925									
57342									
101354									

Tabla 1.11

2. Aplica los criterios de divisibilidad para determinar si:
   a. 354 094 es divisible por 4, por 5 o por 9.
   b. 763 870 es divisible por 10, por 25 o por 100.
   c. 1 234 760 es divisible por 3 o por 9.
   d. 536 762 es divisible por 4 o por 10.
   e. 234 075 es divisible por 5 o por 25.
   f. 123 es divisible por 2, por 3, por 4 o por 5.
   g. 243 876 es divisible por 4 o por 9.
   h. 6 000 es divisible por 3, por 4, por 10 o por 25.

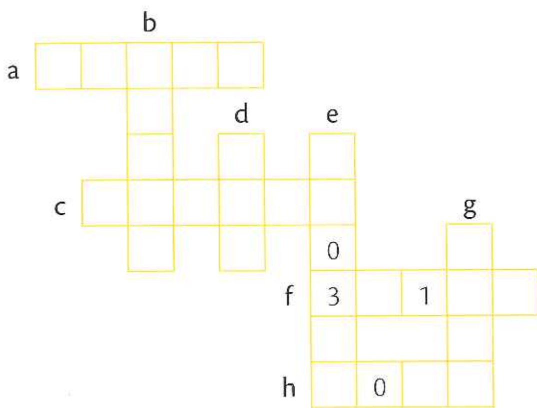
Razonamiento

3. Responde. ¿Todo número natural divisible por 4 y por 2 a la vez es divisible por 8?
   Da algunos ejemplos que apoyen tu respuesta.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Razonamiento

4 Resuelve el siguiente crucinúmero de acuerdo con cada condición.



a. Es divisible por 100, la cifra de sus centenas es 4, la de sus unidades de mil es 2 y la suma de sus cifras es 9.

b. Todas sus cifras son diferentes y cada una es divisible por 2. La cifra de sus centenas es la suma de sus unidades y de sus decenas.

c. Es divisible por 3 y por 9. La cifra de sus centenas de mil y de sus decenas es 3.

d. Está entre 100 y 125, y es divisible por 11.

e. Divisible por 5, la cifra de sus decenas es 1 y la cifra de sus decenas de mil es cuatro veces la cifra de sus centenas de mil.

f. Divisible por 25 y por 10. La suma de sus cifras es 11.

g. Divisible por 5 y por 25. La suma de sus cifras es 13.

h. Divisible por 3 y por 25.

Comunicación

5 Escribe el número que cumple con las condiciones dadas en cada caso.

a. El menor número que es divisible por 3, por 4 y por 5.

b. El menor número que es divisible por 2, por 4, por 11 y por 25.

c. El menor número que es divisible por 3, por 9, por 25 y por 100.

6 Escribe la cifra que falta para que 36 92 sea divisible por 9.

7 Completa el número 6 52 para que el que obtengas sea divisible por 3 y por 2 a la vez.

8 Elimina un dígito en 5 220 para que el número que resulte sea divisible por 3.

9 Argumenta. ¿Todo número natural que es divisible por 100 es divisible por 4 y por 25 a la vez?

Resolución de problemas

10 Camilo le adiciona 2 700 a un número que está pensando y obtiene un número que es divisible por 4, por 5 y por 10. ¿Qué número está pensando Camilo?

11 El organizador de un concierto está pensando en ubicar filas de sillas de 9, 10 o 25 puestos cada una. Si en total hay 475 sillas, ¿cuál opción debe elegir?

12 Se matricularon 360 estudiantes en un colegio. El rector desea saber si pueden formar grupos de 9, 10, 11 o 25 estudiantes en cada uno de los salón, de tal manera que cada uno quede con la misma cantidad. ¿De cuántos estudiantes puede quedar cada salón?

13 Juan tiene en su bolsillo más de \$ 4 500 pero menos de \$ 5 500, y además la cantidad de dinero que tiene es divisible por 2, por 10 y por 11. Si se suman todas las cifras de la cantidad de dinero que posee, se obtiene 18. ¿Cuánto dinero tiene Juan?

14 Alberto tiene 125 semillas que quiere sembrar en filas, cada una con la misma cantidad. ¿De cuántas formas puede hacerlo?

Evaluación del aprendizaje

i Usando una sola vez los dígitos 2, 3 y 5, ¿es posible formar un número de tres cifras que sea divisible por 4 y por 11 a la vez?

ii Juan desea saber cuántos números de tres cifras menores que 200 son divisibles por 3 y están formados por las cifras 1, 2 o 3. ¿Cómo puede hacerlo?

7 Números primos y números compuestos

Saberes previos

El producto de dos números naturales es 29. ¿Cuántas parejas de números cumplen esa condición?

Analiza

Utiliza fichas cuadradas para realizar la actividad que se propone.

- Construye todos los rectángulos que sean posibles con seis fichas y luego repite la actividad, pero esta vez solamente con tres fichas.

Conoce

Con seis fichas se pueden construir estos cuatro rectángulos.

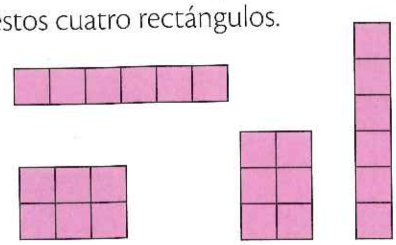


Figura 1.10

El 6 puede expresarse como $1 \cdot 6, 2 \cdot 3, 3 \cdot 2$ o $6 \cdot 1$.

Entonces, los divisores de 6 son 1, 2, 3 y 6.

Con tres fichas solo se pueden construir dos rectángulos.

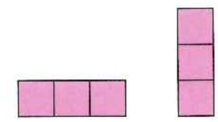


Figura 1.11

El 3 solo se puede escribir mediante dos productos: $1 \cdot 3$ o $3 \cdot 1$.

Por tanto, los divisores de 3 son 1 y 3.

Un **número** es **primo** cuando tiene solo dos divisores: el propio número y el 1.

Un **número** es **compuesto** cuando tiene más de dos divisores.

7.1 Descomposición de un número en factores primos

Todo número compuesto se puede descomponer de forma única (salvo el orden de los factores) en producto de factores primos.

Para descomponer un número en factores primos se siguen estos pasos:

- Se traza una línea vertical y se escribe el número a descomponer en la parte superior izquierda.
- Se divide el número por el menor número primo que sea posible (2, 3, 5...).
- Se escribe el divisor (el número primo) en la parte superior derecha y el cociente debajo del primer número.
- Se repite el proceso hasta que en la parte izquierda aparezca un 1; con esto, la descomposición habrá terminado.

Ejemplo 1

Observa el procedimiento para descomponer el número 60 en factores primos.

División	Factores	Descomposición
$\begin{array}{r\|l} 60 & 2 \\ \hline 0 & 30 \end{array}$	$60 = 2 \cdot 30$	$\begin{array}{r\|l} 60 & 2 \\ 30 & \end{array}$
$\begin{array}{r\|l} 30 & 2 \\ \hline 0 & 15 \end{array}$	$30 = 2 \cdot 15$	$\begin{array}{r\|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & \end{array}$
$\begin{array}{r\|l} 15 & 3 \\ \hline 0 & 5 \end{array}$	$15 = 3 \cdot 5$	$\begin{array}{r\|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$
$\begin{array}{r\|l} 5 & 1 \\ \hline 0 & 5 \end{array}$	$5 = 5 \cdot 1$	

Por lo tanto, $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Encuentra los números primos menores que 100 llevando a cabo cada uno de los siguientes pasos.

a. Escribe una lista de números de 1 a 100.

b. Colorea el 1.

c. Con un círculo encierra los números pares mayores que 2.

d. Subraya los múltiplos de 3 mayores que 3.

e. Colorea los múltiplos de 5 mayores que 5.

f. Con un triángulo encierra los múltiplos de 7 mayores que 7.

g. Retiñe con color rojo los múltiplos de 11 mayores que 11.

Los números que quedan sin encerrar, subrayar o colorear son los números primos menores que 100.

2 Clasifica cada número como primo o compuesto.

a. 321 b. 23
c. 542 d. 10
e. 633 f. 227
g. 51 h. 42

3 Descompón cada número en sus factores primos.

a. 120 b. 210
c. 340 d. 378
e. 1 280 f. 6 742

4 Completa cada descomposición.

a. $250 = 2 \cdot 5^{\square}$

b. $1520 = 2^{\square} \cdot \square \cdot 19$

c. $3483 = 3^{\square} \cdot \square$

d. $13489 = 7 \cdot \square \cdot \square$

e. $204287 = \square \cdot 727$

Razonamiento

5 Responde las siguientes preguntas.

a. ¿Cuántos números primos menores que 100 hay?

b. ¿Cuántos números compuestos menores que 50 hay?

c. ¿Cuántos números primos pares menores que 100 hay?

Comunicación

6 Relaciona con una línea cada número de la columna B con la descomposición en factores primos que le corresponde en la columna A.

Columna A	Columna B
$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$	135
$2^4 \cdot 5$	80
$3^3 \cdot 5$	900
$5^2 \cdot 7$	364
$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$	210
$2^2 \cdot 7 \cdot 13$	175

7 Califica cada enunciado como verdadero (V) o falso (F).

a. La descomposición en factores primos de 48 es $2^3 \cdot 5$. ( )

b. La descomposición en factores primos de todo número primo es el producto del mismo número por la unidad. ( )

c. El número 2 es el único par que es primo. ( )

d. 27 es un número compuesto porque tiene en total cuatro divisores: 2, 3, 7 y 9. ( )

e. Como los divisores de 16 son 1, 4, 8 y 16, este número es compuesto. ( )

8 Escribe lo que se pide en cada caso.

a. El siguiente número compuesto después de 100.

b. El número cuya descomposición en factores primos es $3^4 \cdot 5$.

Evaluación del aprendizaje

i Pedro desea saber cuántos factores primos tiene el número 432. ¿Cómo puede hacerlo?

ii Ana encontró en un mensaje la expresión $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2$.

Su hermana le mencionó que esa expresión corresponde al número telefónico de Milena. ¿Cuál es ese número telefónico?

8 Máximo común divisor

Saberes previos

¿Que medida tendrán los trozos de igual longitud en los que puedes cortar una cuerda de 18 cm? Escribe todas las posibilidades.

Analiza

Pedro tiene tres tablas: una de 6 m, otra de 12 m y otra de 18 m.

- ¿Cómo debe cortarlas en pedazos de la misma longitud (y la máxima posible) sin que se desperdicie madera?

Conoce

La tabla de 6 metros se puede cortar en pedazos iguales de **1**, **2**, **3** o **6** m.

La tabla de 12 metros se puede cortar en pedazos iguales de **1**, **2**, **3**, 4, **6** o 12 m.

La tabla de 18 metros se puede cortar en pedazos iguales de **1**, **2**, **3**, **6**, 9 o 18 m.

En las tres listas las longitudes que se repiten son 1, 2, 3 y 6, pero la máxima es 6 m; por consiguiente, Pedro debe cortar la tabla de 12 m en dos trozos de 6 m cada uno, la de 18 m en tres trozos de 6 m cada uno y no debe cortar la tabla de 6 m.

El **máximo común divisor (m. c. d.)** de dos o más números naturales es el mayor número que los divide sin dejar resto.

Ejemplo 1

Para calcular el máximo común divisor de 300, 360 y 420, se descompone cada número en sus factores primos.

$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

Se eligen los factores primos comunes con menor exponente y se multiplican.

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

Por tanto, m. c. d. (300, 360, 420) = 60.

Ejemplo 2

Juan compró láminas de cartón de 196 cm de largo por 140 cm de ancho que tiene que recortar en cuadrados de la mayor longitud posible sin desperdiciar material.

Como no debe sobrar material, es preciso que la medida del lado del cuadrado sea divisor de 196 y de 140, y como además debe ser el cuadrado más grande posible, es necesario hallar el máximo común divisor de 196 y 140.

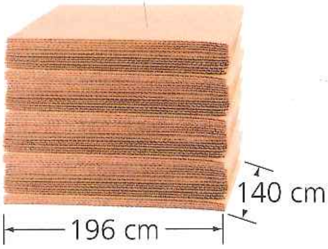


Figura 1.12

$$\text{m. c. d. } (196, 140) = 28$$

La medida del lado del cuadrado que tiene que recortar Juan es 28 centímetros.

Para saber cuántos cuadrados de este tamaño se obtienen de una lámina, se divide el largo y el ancho de la lámina entre 28.

$$196 \div 28 = 7 \text{ y } 140 \div 28 = 5$$

Como el largo se puede dividir en siete partes y el ancho en cinco partes de 28 centímetros cada una, entonces se obtienen $7 \cdot 5 = 35$ cuadrados de 28 cm de lado.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Calcula el máximo común divisor de los siguientes grupos de números. Identifica aquellos que son primos entre sí.

a. 33 y 12
b. 54 y 36
c. 28 y 39
d. 24 y 39
e. 12, 18 y 27
f. 36, 45 y 127
g. 28, 48 y 53
h. 48, 64 y 98
i. 120, 156 y 228
j. 200, 400 y 600
k. 350, 500 y 925
l. 560, 640 y 820
m. 802, 926 y 888
n. 900, 1 000 y 2 500

Razonamiento

2 Resuelve el crucinúmero. Halla cada máximo común divisor en tu cuaderno mediante la descomposición en factores primos.

Horizontales

a. m. c. d. (128, 256)
b. m. c. d. (32, 96, 160)
c. m. c. d. (484, 726, 968)
d. m. c. d. (86, 129)
e. m. c. d. (3, 5, 7, 13, 19)
f. m. c. d. (87, 116)
g. m. c. d. (426, 639)

Verticales

a. m. c. d. (12 028, 12 772)
b. m. c. d. (34, 68, 102)
c. m. c. d. (112, 140)
d. m. c. d. (66, 88)
e. m. c. d (270, 405)
f. m. c. d. (430, 645)
g. m. c. d. (75, 90)

a.				b.	d.
			c.		
d.					
		e.		f.	
	g.				

Resolución de problemas

3 Se tienen 60 lápices, 90 esferos y 120 borradores, y se quieren distribuir paquetes en los que haya estos tres tipos de artículos. ¿Cuál es el máximo número de paquetes que se puede armar usando todos los artículos? ¿Cuántos lápices, esferos y borradores deben ir en cada paquete?

4 Un agricultor recoge 96 manzanas, 68 peras y 128 naranjas. Si desea armar cajas de tal forma que en cada una de ellas se encuentre la mayor cantidad posible de frutas, ¿cuántas cajas necesita? ¿Cuántas frutas debe empacar en cada caja?

5 Henry necesita empacar en la menor cantidad de cajas, cinta de color rojo y cinta de color verde. Si hay 120 metros de cinta de color rojo y 160 metros de cinta de color verde, ¿qué cantidad de cinta roja y verde deberá empacar Henry en cada caja?

6 Alejandra desea cortar una tela de 40 cm de ancho por 60 cm de largo en cuadrados lo más grandes posibles y sin que sobre tela. ¿Cuánto tiene que medir el ancho de cada cuadrado?

7 Diana tiene dos cuerdas, una de 200 cm y la otra de 260 cm. Si ella quiere recortarlas en trozos de la misma longitud sin que sobre cuerda, ¿cuál es la longitud máxima de cada uno de los pedazos recortados?

8 Un maestro de obra quiere pegar baldosas cuadradas en una habitación de 520 cm de largo por 380 cm de ancho. Si quiere utilizar el menor número de baldosas, ¿qué dimensiones debe tener cada una para cubrir exactamente el piso de la habitación?

Evaluación del aprendizaje

i Un campo rectangular de 360 m de largo y 150 m de ancho está dividido en parcelas cuadradas iguales. El área de cada una de estas parcelas cuadradas es la mayor posible.

¿Cuál es la longitud del lado de cada parcela cuadrada?

ii Para transportar 16 perros y 48 gatos se van a usar jaulas iguales que sean lo más grandes posibles, y de forma que en todas quepa el mismo número de animales. ¿Cuántos animales deben ir en cada jaula?

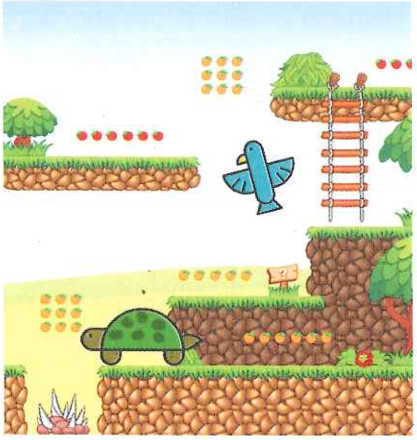
9 Mínimo común múltiplo

Saberes previos

Gabriel va a Ipiales cada 5 días y Manuel lo hace cada 10 días. El 5 de enero se encontraron en esa ciudad. ¿Volverán a coincidir algún otro día de ese mes?

Analiza

En un videojuego aparece un pájaro cada 18 segundos y una tortuga cada 20 segundos.



- Si Andrés acaba de iniciar el juego, ¿en cuánto tiempo verá aparecer los dos animales simultáneamente por primera vez?

Conoce

De acuerdo con el enunciado, el pájaro aparece justamente a los 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, 144, 162, **180**, 198... segundos.

De otra parte, la tortuga aparece justamente a los 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, **180**, 200... segundos.

Como el primer múltiplo común —y por lo tanto el más pequeño— de 18 y 20 es 180, el pájaro y la tortuga aparecerán al mismo tiempo a los 180 segundos de iniciado el juego, es decir, a los 3 minutos.

El **mínimo común múltiplo** de varios números es el menor de sus múltiplos comunes diferente de 0. De forma abreviada, el mínimo común múltiplo se escribe **m. c. m.**

Ejemplo 1

Para calcular el mínimo común múltiplo de 24 y 96, se descompone cada número en sus factores primos y se escribe el producto correspondiente.

$24 = 2^3 \cdot 3$ $96 = 2^5 \cdot 3$

Luego, se eligen los factores primos comunes y no comunes con los mayores exponentes y se efectúa el producto: $2^5 \cdot 3 = 96$. Así, m. c. m. (24, 96) = 96.

Ejemplo 2

Las reuniones del club de matemáticas se realizan cada ocho días, las del club de artes cada diez días y las del club de ciencias cada quince días. Si el primero de febrero hubo reunión de los tres clubes, para saber la próxima fecha en la que coincidirán las reuniones se halla el m. c. m. de 8, 10 y 15. Para ello, se descompone cada número en sus factores primos.

$8 = 2^3$ $10 = 2 \cdot 5$ $15 = 3 \cdot 5$

Se eligen los factores primos comunes y no comunes con los mayores exponentes y se determina su producto, así:

$$\text{m. c. m. } (8, 10, 15) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$$

Las reuniones coincidirán dentro de 120 días.

Ejemplo 3

Con los estudiantes de un curso se pueden formar grupos de exactamente 9, 12 y 18 estudiantes. ¿Cuántos estudiantes tiene ese curso si se sabe que ese número es menor que 40?

Para solucionar el problema es necesario calcular el m. c. m. de 9, 12 y 18.

Para tal efecto, se descompone cada número en sus factores primos.

$9 = 3^2$ $12 = 2^2 \cdot 3$ $18 = 2 \cdot 3^2$

Luego, m. c. m. (9, 12 y 18) = 36, por lo tanto, el curso tiene 36 estudiantes.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1. Halla el mínimo común múltiplo de cada grupo de números.

a. 5 y 7
b. 11 y 13
c. 25 y 30
d. 45 y 5
e. 120 y 210
f. 300 y 350
g. 240, 310 y 540
h. 1 240, 3 210 y 4 520

Razonamiento

2. Multiplica el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor en cada caso y compara el producto con el de los números en cada grupo. Escribe una conclusión.

a. 34, 18 y 28
b. 1 000 y 2 000
c. 128, 512 y 1 024
d. 220, 440, 600 y 900
e. 120, 135 y 278
f. 320, 450 y 620

Comunicación

3. Decide si cada enunciado es verdadero (V) o falso (F).

a. El mínimo común múltiplo de dos números primos es igual a su producto. ( )
b. El mínimo común múltiplo de dos números pares es par. ( )
c. El m. c. m. (20, 30) = 60 y el m. c. d. (20, 30) = 15. ( )
d. El mínimo común múltiplo de un número impar y un número par es un número impar. ( )

4. Relaciona cada número de la columna A con los números de la columna B; del que es su m. c. m.

Columna A	Columna B
14	m. c. m. (12, 48)
247	m. c. m. (20, 40, 60)
32	m. c. m. (13, 19)
48	m. c. m. (2, 7)
120	m. c. m. (8, 16, 32)

Resolución de problemas

5. A lo largo de una carretera de 1000 km de longitud se encuentra un teléfono cada 40 km, un restaurante cada 30 km y un puesto de emergencias cada 45 km. ¿Cada cuántos kilómetros se encuentran juntos...

a. un teléfono y un puesto de emergencias?
b. un teléfono y un restaurante?
c. un restaurante y un puesto de emergencias?
d. los tres servicios a la vez?

6. Fernando visita a su mamá cada 20 días, Santiago lo hace cada 45 días y Manuel lo hace cada 60 días. Si hoy coincidieron, ¿cuántos días tienen que pasar para que se vuelvan a encontrar?

7. Isabel se tiene que tomar una pastilla para el dolor de cabeza cada 8 horas y otra para el dolor de espalda cada 6 horas. Si se tomó las dos pastillas a la 1:00 p. m., ¿a qué hora vuelve a tomárselas al tiempo?

Evaluación del aprendizaje

i. La ruta azul pasa cada 15 minutos por la casa de Luis y la ruta roja, cada 10 minutos. Si las dos rutas pasaron juntas a las 6 de la mañana, ¿cuántas veces han pasado al tiempo hasta las 10:00 de la mañana?

ii. En un juguete, el sonido de un gato se escucha cada cuatro segundos, el de un pato cada ocho segundos y el de una vaca cada seis segundos. Si al encenderlo suenan los tres animales a la vez, ¿cada cuánto se escucharán

a. el gato y el pato a la vez?
b. el gato y la vaca juntos?
c. la vaca y el pato al mismo tiempo?
d. los tres animales a la vez?

Practica más

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

El conjunto de los números naturales

Comunicación

1 Representa en una recta numérica cada situación.

a. En una carrera atlética participaron tres amigos. Alex llegó en el decimoquinto lugar, Juan en el vigesimoprimer lugar y Mauricio en el octavo lugar.

b. Felipe debe vender entre 24 y 32 celulares al mes.

c. La temperatura de conservación de un producto químico debe ser menor que 12 °C y mayor que 0 °C.

Adición y sustracción de números naturales

Resolución de problemas

2 Determina cuánto dinero le queda a Francisco en su cuenta bancaria luego de los siguientes movimientos.

Descripción	Valor
Saldo anterior	\$ 350 000
Retiro	\$ 275 000
Consignación	\$ 185 600
Retiro	\$ 75 000
Pago de servicios	\$ 158 250

Tabla 1.12

3 Milena proyecta administrar los \$ 150 000 de su mesada de este mes así: onces \$ 35 000, regalo de su hermano \$30 000, recreación \$ 25 000 y el resto para ahorros.

a. ¿Cuánto dinero puede ahorrar Milena?

b. Si el regalo de su hermano le costó \$ 40 000, ¿cuánto dinero ahorró?

c. ¿Cuál debe ser el valor de la mesada para que Milena pueda ahorrar \$ 80 000 teniendo los mismos gastos?

Multiplicación y división de números naturales

Resolución de problemas

4 Carlos planea una salida a jugar *paintball* con tres de sus amigos. Cada uno tiene ahorrado \$12 000, y el valor de la salida es \$228 000.

a. ¿Cuánto dinero le hace falta a cada uno?

b. ¿Cuánto debe ahorrar cada uno por mes si deciden ir dentro de tres meses?

5 Carlota va a comprar un celular a cuotas. El celular cuesta \$ 980 000 si lo paga de contado; si lo paga en doce cuotas pagará \$ 1 182 000 en total, y si lo paga en 24 cuotas cada cuota será de \$ 70 000.

a. ¿Cuál será el valor de cada cuota si lo compra en doce cuotas?

b. ¿Cuánto pagará por el celular si lo saca a 24 cuotas?

c. ¿Cuál será el sobrecosto en cada caso?

Potenciación, radicación y logaritmación de números naturales

Ejercitación

6 Halla el resultado de cada operación.

a. $5^3 + \sqrt{121} - \log_3 81$

b. $2^4 \cdot 3^4 \cdot \sqrt[4]{81}$

c. $\sqrt{64} + \sqrt{144} + \log_4 256 + \log_5 625$

d. $\log_2 32 + \log_7 49 + \sqrt[3]{27} + \sqrt{49}$

Razonamiento

7 Encuentra el resultado de cada operación.

a. $4^2 \cdot 5^3 \div 4 + 16 - 250$

b. $[5 \cdot (52 + 7) - 125] \cdot 6^4$

c. $[(7^3 - 2^6) \div (25 - 22)] + 125$

d. $(5^5 \cdot 4) - (27 \div 9) - (1^{10} \cdot 9^3)$

e. $\sqrt[3]{5^2 + 2} + (5 \cdot 3 - 3)^2 \div 3^2 - 7^0$

f. $(2^5 \div 4 + \sqrt{100}\,) \div 3^2 + \sqrt{289} - (13^2 - 3^2) \div 10$

8 Observa la secuencia y completa la Tabla 1.13.

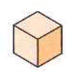
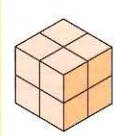
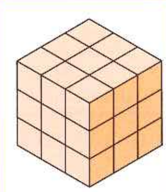
Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4
			
$1^3 = 1$	$2^3 = 8$		

Tabla 1.13

Resolución de problemas

9 Una bacteria se duplica cada 5 minutos. Al cabo de una hora, ¿cuántas bacterias hay?

Resolución de **problemas**

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Estrategia: Hacer cálculos parciales

Problema

Un granjero tiene en su finca 25 pavos, 50 gallinas y 65 palomas. Un pavo cuesta el doble que una gallina, y una gallina cuesta el doble que una paloma. Si vende cada gallina a \$ 48 000, ¿cuánto dinero obtiene el granjero en la venta de todas las aves?

1. Comprende el problema

- ¿Qué relación hay entre los precios de las aves?

  R: El precio de un pavo es el doble del de una gallina y el de una gallina es el doble del precio de una paloma.

- ¿Qué se debe encontrar?

  R: El dinero que obtuvo el granjero con la venta de las aves.

2. Crea un plan

- Determina cuáles son los cálculos parciales que te permitirán obtener la solución del problema de modo planificado y efectúalos.

3. Ejecuta el plan

- Encuentra el precio de un pavo.

$$2 \cdot \underbrace{48\,000}_{\text{Precio de una gallina}} = \underbrace{96\,000}_{\text{Precio de un pavo}}$$

- Calcula el precio de una paloma.

$$\underbrace{48\,000}_{\text{Precio de una gallina}} \div 2 = \underbrace{24\,000}_{\text{Precio de una paloma}}$$

- Encuentra el valor de venta de las aves de cada especie y suma los resultados.

Pavos	$25 \cdot 96\,000 = 2\,400\,000$
Gallinas	$50 \cdot 48\,000 = 2\,400\,000$
Palomas	$65 \cdot 24\,000 = 1\,560\,000$

$$2\,400\,000 + 2\,400\,000 + 1\,560\,000 = 6\,360\,000$$

R: Con la venta de las aves, el granjero obtuvo \$ 6 360 000.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que el precio de venta de las aves es superior a \$ 6 000 000.

Aplica la estrategia

1. La entrada a un parque de diversiones cuesta \$ 18 000 para los adultos, \$ 16 000 para los niños de 12 a 17 años y \$ 9 000 para los niños menores de 12 años. ¿Cuánto paga por las entradas una familia conformada por los padres, dos jóvenes de 14 años y un niño de 10 años?

   a. Comprende el problema

   ....

   b. Crea un plan

   ....

   c. Ejecuta el plan

   ....

   d. Comprueba la respuesta

   ....

Resuelve otros problemas

2. En una carrera atlética, Arturo llegó después de Bernardo; Carlos llegó antes que Arturo, pero después de Bernardo, mientras que Diego llegó antes que Bernardo, pero después de Eduardo. ¿En qué orden llegaron los atletas a la meta?

3. George Washington nació en 1732 y murió en 1799; Simón Bolívar nació en 1783 y murió en 1830; José de San Martín nació en 1778 y murió en 1850. ¿Cuál de estos personajes vivió por más tiempo? ¿Cuál por menos tiempo?

Formula problemas

4. **Inventa** un problema que involucre la siguiente información y resuélvelo.

   "El doble de un número elevado al cuadrado es igual a 324."

Enriquece tu vocabulario

- Busca en el diccionario la palabra *potencia*, e investiga en qué contextos fuera de la matemática se utiliza.

Evaluación del aprendizaje

Sistema de numeración decimal

Razonamiento

1 Responde estas preguntas. PREGUNTA ABIERTA

a. ¿Cuál es el número más pequeño de tres cifras que se puede escribir sin utilizar el 0?

b. ¿Cuántos números pueden formarse de modo que las centenas de mil sean el doble que las decenas, si en las demás posiciones aparece el 0? ¿Cuál de estos es el mayor?

c. ¿Cuál es el mayor número que se forma con nueve cifras? ¿Cuál es el menor?

Resolución de problemas

2 De 11 167 especies en peligro, 124 están englobadas en las categorías de "estado crítico" de extinción, en "vías" de extinción o "vulnerables".

Escribe el desarrollo exponencial y en palabras de cada dato en la lectura y el valor relativo de todas sus cifras. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Números naturales. Operaciones

Razonamiento

3 Completa cada operación. Explica cómo hallaste los dígitos que faltan. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

a.
$$\begin{array}{r} 7\,\square\,8\,5 \\ +\,3\,4\,\square\,6 \\ \hline 1\,0\,7\,7\,\square \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{r} 5\,9\,\square\,2\,4 \\ +\,3\,\square\,8\,\square\,1 \\ \hline \square\,\square\,2\,6\,1\,\square \end{array}$$

c.
$$\begin{array}{r} 2\,9\,8\,7\,6\,4 \\ -\,1\,7\,6\,5\,6\,\square \\ \hline 1\,\square\,2\,2\,0\,0 \end{array}$$

d.
$$\begin{array}{r} 7\,7\,\square\,5\,\square\,4 \\ -\,4\,3\,5\,\square\,2\,\square \\ \hline 3\,4\,0\,3\,7\,9 \end{array}$$

4 Escribe las multiplicaciones y las divisiones que se pueden deducir del esquema. PREGUNTA ABIERTA

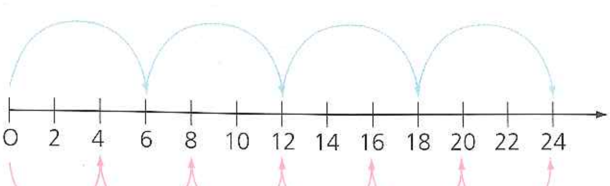


Figura 1.13

5 Calcula la cantidad de cubos pequeños que conforman el cubo grande de la Figura 1.14. ACTIVIDAD DE REFUERZO

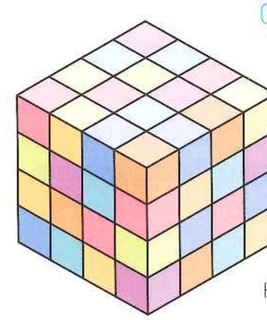


Figura 1.14

6 Califica como falso (F) o verdadero (V) cada enunciado. VERDADERO/FALSO

a. Toda potencia de 0 es igual a 1 ( )

b. $4^6 = 4096$ ( )

c. $\sqrt[3]{8} = 2$ porque $2^3 = 8$ ( )

d. $\log_3 81 = 27$ porque $3 \cdot 27 = 81$ ( )

e. Como $\log_5 125 = 3$ entonces $5^3 = 125$ y $\sqrt[3]{125} = 3$ ( )

f. La raíz cuadrada de cualquier número natural es un número natural. ( )

Solución de problemas

7 De las 41 415 especies analizadas por la Unión Internacional para la Conservación de la Naturaleza (UICN) en el 2011, 16 306 están en peligro de extinción, mientras que en 2008 fueron 15 928. Entre ellas, 2 939 son mamíferos conocidos, 3 000 son anfibios y 207 son aves. PREGUNTA ABIERTA

a. ¿Cuántas especies entraron a la lista de especies en peligro de extinción entre 2008 y 2011?

b. ¿Cuántas especies menos de aves que de anfibios están en peligro de extinción?

8 Susana va a comprar diez jugos de \$850 cada uno y una gaseosa de \$2 200. Si tiene un cupón de descuento de \$1 200, ¿cuánto tiene que pagar en la caja? SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

9 La secretaria de una empresa tiene en su cajón una caja que contiene seis paquetes de esferos azules; cada paquete contiene seis estuches de los mismos esferos, y cada estuche tiene seis esferos. ¿Cuántos esferos de color azul tiene la secretaria en su cajón? SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Números primos y números compuestos

10 ¿Cómo se pueden separar 24 huevos en grupos con la misma cantidad de huevos? SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

11 ¿Cuál de los siguientes no es un múltiplo de 8? SELECCIÓN MÚLTIPLE

a. 27 b. 48 c. 72 d. 104

12 Un bus azul debe recoger y dejar pasajeros solamente en los paraderos marcados con un número primo; mientras que uno rojo, se detiene solamente en los paraderos identificados con un número compuesto. ¿Cuál de los buses para en el paradero marcado con el número 181? SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Múltiplos, divisores, máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Razonamiento

13 Resuelve. De los números 405, 316, 814, 1 085 y 340: PREGUNTA ABIERTA

a. ¿Hay alguno que sea divisible por 3?

b. ¿Cuáles son divisibles por 4?

c. ¿Cuáles tienen por divisor al 5?

d. ¿Hay alguno divisible entre 2?

e. ¿Hay alguno divisible entre 2, 5 y 10 al mismo tiempo?

f. ¿Hay alguno divisible entre 11?

14 Escribe números que cumplan la condición dada en cada caso. PREGUNTA ABIERTA

a. Tres números que tengan entre sí como máximo común divisor a 8.

b. Dos números cuyo mínimo común múltiplo sea 426.

c. Dos números mayores que 100 cuyo máximo común divisor sea 45.

d. Cuatro números menores que 20 cuyo mínimo común múltiplo sea mayor que 100.

e. Cinco números compuestos cuyo máximo común divisor sea 1.

f. Tres números cuyo mínimo común múltiplo sea mayor que 100.

Resolución de problemas

15 Iván quiere diseñar el mayor número posible de collares utilizando 75 semillas rojas, 105 verdes y 45 azules sin que le sobre ninguna semilla. ¿Cuál es el mayor número de collares que puede diseñar si quiere que todos tengan el mismo número de semillas de cada color? PREGUNTA ABIERTA

16 Dos luces de navidad encienden cada 7 y 12 segundos, respectivamente. Si se conectan a la vez, ¿al cabo de cuántos segundos vuelven a coincidir en el encendido? ¿Después de cuántos segundos coincidirán por segunda vez? PREGUNTA ABIERTA

17 Se quiere dividir un jardín en sectores para sembrar 56 rosas y 40 margaritas. Cada sector debe tener el mismo número de flores de cada clase. PREGUNTA ABIERTA

a. ¿Cuál es el mayor número de sectores en que se puede dividir el jardín?

b. En el caso anterior, ¿cuántas flores de cada clase quedarían en cada sector?

18 Tres buses salen de la terminal cada tres días, cada doce días y cada 18 días. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

a. ¿Cada cuántos días salen los tres buses al mismo tiempo?

b. Si los tres buses salen al mismo tiempo el día martes, ¿qué día vuelven a salir los buses al mismo tiempo?

19 Tres atletas, Marcos, Lucas y Juan, tardan 8, 4 y 16 minutos, respectivamente, en dar una vuelta a la pista. Si parten al mismo tiempo y no dan más de 20 vueltas, SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

a. ¿cuántas veces se encontrarán Marco y Lucas en el punto inicial?

b. ¿cuántas veces se encontrarán Lucas y Juan en el punto inicial?

2 Fracciones y decimales. Números enteros

Ya sabemos

- Resolver operaciones de números naturales.
- Aplicar los criterios de divisibilidad.

Vamos a aprender

- A efectuar operaciones con fracciones y números decimales.
- A realizar conversiones entre fracciones y decimales.

Nos sirve para

- Para efectuar operaciones con números enteros.
- Para medir ángulos y polígonos.

1 Adición y sustracción de fracciones

Saberes previos

Andrea duerme la tercera parte de un día. ¿Duerme más de las 7 horas que le indica su médico?

Analiza

Lina y David compraron dos pizzas personales. David dejó un cuarto de su pizza y Lina dos cuartos.

- ¿Qué parte dejaron entre los dos?

Conoce

1.1 Fracciones con el mismo denominador

Lina y David pasaron lo que les quedó de cada una de sus pizzas a otro plato, como se muestra en la Figura 2.1.

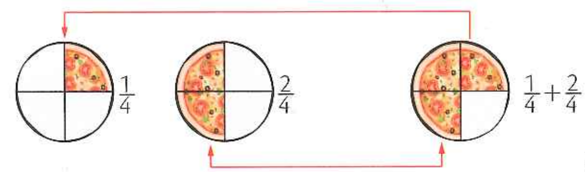


Figura 2.1

En el tercer plato quedaron $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$ de pizza.

Para **adicionar fracciones con el mismo denominador**, se deja el mismo denominador y se adicionan los numeradores. En el caso de la **sustracción con el mismo denominador**, se deja el mismo denominador y se sustraen los numeradores.

Ejemplo 1

$\frac{3}{6}$ de un vitral se pintan de azul y $\frac{2}{6}$ se pintan de rojo.

La fracción del vitral que está pintado con esos colores es:

$\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{(3+2)}{6} = \frac{5}{6}$.

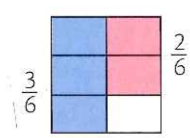


Figura 2.2

Para saber qué parte del vitral no quedó pintada, se resta la fracción que quedó pintada de azul y de rojo, $\left(\frac{5}{6}\right)$, así:

$\frac{6}{6} - \frac{5}{6} = \frac{6-5}{6} = \frac{1}{6}$. Por tanto, una sexta parte del vitral quedó sin color.

1.2 Fracciones con distinto denominador

Para adicionar o sustraer **fracciones con distinto denominador**, se expresan con el **mínimo denominador común** y luego se adicionan o se sustraen las fracciones equivalentes a ellas.

Ejemplo 2

Resuelve la operación $\frac{6}{7} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$.

Se halla el mínimo común denominador, m. c. m. (7, 4, 2) = 28.

Se amplifica cada fracción para obtener, en cada caso, una fracción equivalente con denominador 28.

$$\frac{6}{7} = \frac{6 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{24}{28} \qquad \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 7}{4 \cdot 7} = \frac{7}{28} \qquad \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 14}{2 \cdot 14} = \frac{14}{28}$$

Así, $\frac{6}{7} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{24}{28} + \frac{7}{28} - \frac{14}{28} = \frac{24+7-14}{28} = \frac{17}{28}$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Realiza las siguientes operaciones y simplifica cada resultado, si es el caso, hasta obtener una fracción irreducible.

a. $\frac{3}{7} + \frac{6}{7}$ b. $\frac{6}{5} + \frac{1}{7}$

c. $\frac{5}{3} - \frac{4}{9}$ d. $\frac{4}{5} - \frac{1}{7}$

e. $\frac{6}{7} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4}$ f. $\frac{11}{4} + \frac{1}{4} - \frac{8}{3}$

g. $\frac{7}{6} + \frac{1}{7} - \frac{2}{3}$ h. $\frac{5}{7} - \frac{1}{4} + \frac{8}{3}$

Razonamiento

2 Lee y responde. Luisa iba a sumar dos fracciones e hizo la representación de la Figura 2.3.

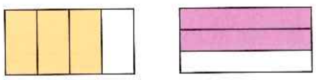


Figura 2.3

a. ¿Cuáles fracciones intentaba sumar?

b. ¿Cómo completó su gráfica para llegar al resultado? Muéstrala.

c. ¿Cuál de las dos franjas ocupa una fracción mayor de cada rectángulo, la amarilla o la morada?

d. Halla la fracción que corresponde a la diferencia entre los dos colores. ¿Cuál debe ser el minuendo y cuál el sustraendo? Explica.

3 Observa la Figura 2.4 y contesta las preguntas de acuerdo con esta.

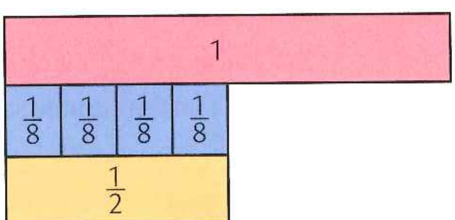


Figura 2.4

a. ¿Cuántos octavos se deben sumar para obtener un medio? Escribe la operación correspondiente.

b. Si se sumaran las fracciones correspondientes al color azul con la fracción del color rosado, ¿se obtendría la unidad? Explica.

Resolución de problemas

4 Observa la Figura 2.5 y resuelve. Marina tenía un pedazo de pizza en la nevera y se comió un quinceavo de pizza. ¿Cuánta pizza quedó después de eso? Haz una representación gráfica y luego escribe la fracción correspondiente.

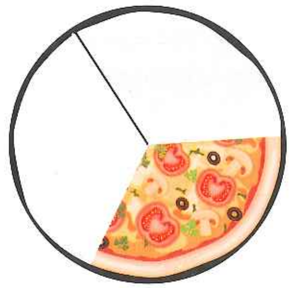


Figura 2.5

5 Luisa y Gerardo están preparando galletas. Luisa tiene $\frac{1}{2}$ taza de azúcar y Gerardo tiene $\frac{1}{3}$ de taza. ¿Cuánta azúcar reúnen entre los dos?

6 Un arqueólogo encontró cinco partes de un plato circular antiguo que correspondían a $\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ y $\frac{1}{7}$ del plato original. ¿Reconstruyó el arqueólogo el plato completo?

7 En un almacén, $\frac{5}{12}$ de los zapatos que se venden son para mujer y $\frac{2}{9}$ son para hombre.

a. ¿Qué fracción de los zapatos son de hombres o de mujeres?

b. Si el resto de los zapatos son de niños y niñas, ¿qué fracción los representa?

c. Si en el almacén hay en total 360 pares de zapatos, ¿cuántos son de hombres y cuántos son de mujeres?

Evaluación del aprendizaje

i Jaime llena un recipiente con $\frac{7}{12}$ de galón de agua. Su esposa riega las plantas con $\frac{1}{2}$ galón. ¿Cuánta agua quedó en el recipiente?

ii En un colegio se recolectaron $\frac{86}{10}$ libras de papel para reciclar durante el mes de enero y $\frac{54}{10}$ libras en febrero. ¿En cuál mes se recolectó más papel para reciclar y cuánto más se recolectó que el otro mes?

2 Multiplicación y división de fracciones

Saberes previos

Lucas tiene doce canicas de colores. Si le regala la tercera parte del total a su hermanito, ¿cuántas canicas le quedan?

Analiza

Luis, Santiago y Julia se comen, cada uno, dos tercios de libra de arroz.

- ¿Cuántas libras de arroz consumen entre los tres?

Conoce

Para saber cuánto arroz consumen entre Luis, Santiago y Julia, se suma la fracción $\frac{2}{3}$ tres veces, así: $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$.

Como todas estas fracciones tienen el mismo denominador, su suma es igual a una fracción cuyo numerador es la suma de los numeradores y cuyo denominador es el que es común a todas las fracciones.

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2+2+2}{3} = \frac{3 \cdot 2}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Entre los tres comieron 2 libras de arroz.

2.1 Multiplicación de fracciones

Para **multiplicar una fracción por un número natural**, se multiplica el numerador por el número natural y se deja el mismo denominador.

Ejemplo 1

Miriam compra cuatro paquetes de papas cada una con un peso de $\frac{3}{4}$ de kilogramo. Para saber cuánto pesan en total los cuatro paquetes, se efectúa la operación:

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 4 \cdot \frac{3}{4} = \frac{4 \cdot 3}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

Los cuatro paquetes de papas pesan 3 kilogramos.

El **producto de dos fracciones** es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores de las fracciones, y el denominador, el producto de sus denominadores.

Ejemplo 2

Para representar gráficamente el producto $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$ se utiliza una figura y se divide en tres partes iguales (primer rectángulo de la Figura 2.6). Luego, se utiliza la misma figura y se divide en medios (segundo rectángulo). Se sombrean las fracciones que componen el producto con dos colores diferentes. Para finalizar, se fusionan las dos figuras. El producto de las fracciones es una fracción que representa el espacio de la figura final en donde se encuentren los dos colores.

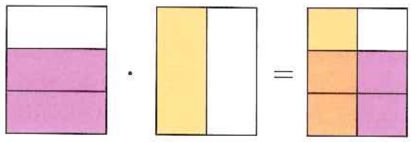


Figura 2.6

Así, $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

2.2 División de fracciones

El **cociente de dos fracciones** es una fracción que se obtiene como el producto del dividendo por la inversa de la segunda fracción (divisor).

Ejemplo 3

Observa en la Figura 2.7 la representación gráfica del cociente de $\frac{4}{7} \div 2$.

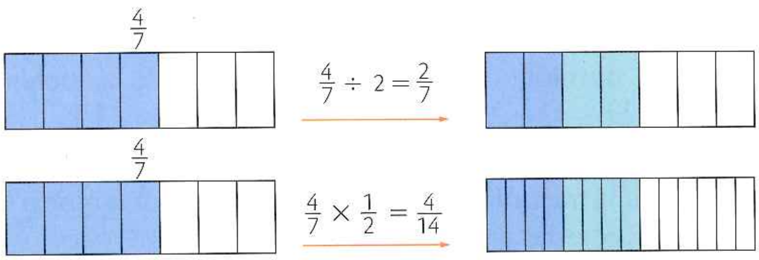


Figura 2.7

Así, $\frac{4}{7} \div 2 = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Realiza primero la operación que está dentro de cada paréntesis y luego, halla el cociente.

a. $\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\right) \div \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{\square}{\square} \div \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

b. $\left(\frac{9}{10} + \frac{5}{2}\right) \div \left(\frac{7}{6} - \frac{1}{8}\right) = \frac{\square}{\square} \div \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

2 Efectúa primero las multiplicaciones y divisiones. Posteriormente, adiciona los resultados.

a. $\frac{5}{12} \div \frac{1}{8} + \frac{8}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

b. $\frac{5}{6} \cdot \frac{9}{7} + \frac{1}{10} \div \frac{11}{6} = \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

Resolución de problemas

3 Un labrador ha dividido un terreno en ocho parcelas iguales. ¿Cuántas parcelas contienen los $\frac{3}{4}$ del campo?

4 Se necesitan $\frac{4}{7}$ de litro de pintura para pintar un metro cuadrado de pared. Si queremos pintar $\frac{2}{5}$ de metro cuadrado de pared, ¿cuánta pintura necesitamos?

Evaluación del aprendizaje

i Jaime está realizando un trabajo. Si en seis horas hizo los $\frac{3}{4}$ del trabajo, ¿cuánto tiempo le llevará hacer todo el trabajo?

ii Un campesino tiene un terreno de forma rectangular. La mitad de ese terreno lo tiene dedicado a la siembra de hortalizas, la mitad del terreno de hortalizas está sembrado con legumbres y la mitad del terreno de las legumbres está sembrado con zanahorias.

a. ¿Qué fracción del terreno está sembrado con legumbres?

b. ¿Qué fracción del terreno está sembrado con zanahorias?

c. Calcula el área sembrada con zanahorias si el terreno original tiene 200 m de largo por 100 m de ancho.

3 Potencia y raíz de una fracción

Saberes previos

Calcula el producto en cada caso y simplifica cuando sea posible.

- $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4}$
- $\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2}$
- $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$

Analiza

Valentina partió una barra de mantequilla por la mitad, luego tomó una de las dos partes, la partió por la mitad y dividió una de las dos nuevas partes por la mitad para tomar una de estas y esparcirla por un pan.

- ¿Qué fracción de la barra de mantequilla untó Valentina en el pan?

Conoce

3.1 Potencia de una fracción

Para saber qué fracción de la barra de mantequilla untó Valentina, se debe realizar el producto de factores iguales.

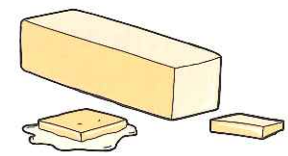


Figura 2.8

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Por tanto, Valentina tomó $\frac{1}{8}$ del total de la barra para untar en el pan. La anterior operación se puede escribir utilizando la potenciación $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

La **potencia de una fracción** se obtiene multiplicando por sí misma la fracción tantas veces como lo indica el exponente.

Ejemplo 1

Para calcular el volumen de un cubo de arista $\frac{2}{3}$ m, se utiliza la potenciación.

$$V = a^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{8}{27}$$

Las **propiedades que cumple la potenciación de fracciones** son:

Potenciación	
Propiedad	Ejemplo
Producto de potencias de igual base	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$
Cociente de potencias de igual base	$\left(\frac{3}{4}\right)^7 \div \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \left(\frac{3}{4}\right)^{7-5} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$
Potencia de un producto	$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{25} = \frac{9}{100}$
Potencia de una potencia	$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2 \cdot 3} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$

Tabla 2.1

3.2 Raíz de una fracción

La **radicación** es una de las operaciones **inversas** a la potenciación.

Ejemplo 2

Calcula las siguientes raíces.

a. $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{6 \div 3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

b. $\sqrt[4]{\frac{16}{625}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{625}} = \frac{2}{5}$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Halla las siguientes potencias.

a. $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ b. $\left(\frac{1}{8}\right)^3$ c. $\left(\frac{4}{16}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^5$

2 Resuelve y explica qué propiedad usaste en cada caso.

a. $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^5\right]^2$ b. $\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}\right)^3$ c. $\left(\frac{1}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^5$

d. $\left[\left(\frac{3}{b}\right)^2\right]^5$ e. $\left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)^2\right]^3$ f. $\left(\frac{1}{64} \div \frac{1}{4}\right)^9$

3 Reemplaza la letra por el valor que hace verdadera cada igualdad.

a. $\left(\frac{a}{2} \cdot \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{64}$ b. $\left(\frac{1}{m} \cdot \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{16}$

4 Calcula las raíces cuadradas.

a. $\sqrt{\frac{1}{4}}$ b. $\sqrt{\frac{36}{25}}$

c. $\sqrt{\frac{100}{81}}$ d. $\sqrt{\frac{121}{49}}$

5 Completa las operaciones.

a. $\sqrt{\frac{9}{49} \cdot \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{49}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} =$

b. $\sqrt{\frac{625}{81} \cdot \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{625}{81}} \cdot \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} =$

c. $\sqrt{\frac{25}{16} \cdot \frac{9}{100}} = \sqrt{\frac{25}{16}} \cdot \sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} =$

6 Completa los términos que faltan.

a. $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{\square}{\square}$

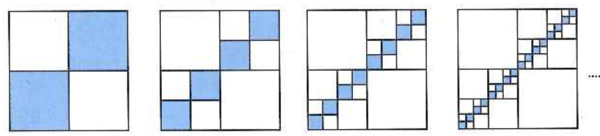
b. $\sqrt[3]{\frac{8}{64}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{\square}{\square}$

Resolución de problemas

7 El operario de una fábrica ha apilado 27 cajas formando un cubo (las cajas son de forma cúbica). Si el cubo formado por todas las cajas tiene un volumen de 8 m^3, ¿cuántos metros mide el lado de cada una de las cajas?

Evaluación del aprendizaje

Cada cuadrado azul de la Figura 2.9 del paso 3 tiene un área de $\frac{1}{4}$ cm^2.



Paso 1 Paso 2 Paso 3

Figura 2.9

a. ¿Cuál es la medida de cada lado de los cuadrados azules de la figura del paso 3?

b. ¿Cuál es el área de cada cuadrado azul de la figura del paso 2?

c. ¿Cuánto mide el lado de cada cuadrado azul en la figura del paso 2?

d. ¿Cuánto mide el área de cada cuadrado azul de la figura en el paso 1?

e. ¿Cuántos cuadrados azules habrá en la figura en el paso 4?

f. ¿Cuál es la suma de las áreas de todos los cuadrados azules desde la figura del paso 1 hasta la figura del paso 3?

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Comunicar tus emociones es sano, solo si lo haces a las personas indicadas. Supón que le cuentas un problema a dos de tus mejores amigos. Si cada uno de ellos se lo comenta a otras dos personas y estas, a su vez a otras dos, ¿cuántas personas conocerían tu problema? ¿Crees que esto es conveniente? ¿Por qué?

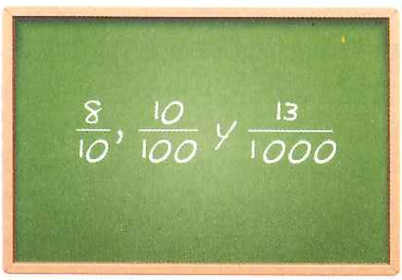
4 Fracciones y números decimales

Saberes previos

Cuando Mario divide 1 entre 2 en la calculadora en la pantalla aparece el número 0,5. De acuerdo con ello, ¿a qué fracción es igual ese número?

Analiza

La profesora Andrea escribió en el tablero las siguientes expresiones:



- ¿Qué características tienen en común esas fracciones?

Conoce

Se puede ver que cada denominador es una potencia de 10; es decir, son **fracciones decimales.**

Cuando se efectúan los cocientes indicados en cada caso, se obtiene 0,8; 0,1 y 0,013, los cuales se conocen como decimales exactos.

4.1 Números decimales exactos

Un **número decimal exacto** es aquel que tiene una cantidad finita de cifras decimales y corresponden a fracciones equivalentes a una fracción decimal.

Ejemplo 1

A partir de las fracciones $\frac{1}{10}$, $\frac{45}{1\,000}$, $\frac{2}{5}$ y $\frac{7}{16}$ se obtienen los decimales exactos 0,1; 0,045; 0,4 y 0,4375, en su orden.

$\frac{1}{10}$ y $\frac{45}{1\,000}$ tienen como denominador una potencia de 10, mientras que $\frac{2}{5}$ y $\frac{7}{16}$ se pueden amplificar por 2 y por 625, respectivamente, para obtener las fracciones decimales $\frac{4}{10}$ y $\frac{4\,375}{10\,000}$.

4.2 Números decimales periódicos

Un **número decimal periódico** es un número fraccionario caracterizado por tener un **periodo** (cifras decimales que se repiten indefinidamente).

Ejemplo 2

El número fraccionario $\frac{13}{3}$ es equivalente a un decimal en el que la cifra 3 se repite de manera indefinida. Para notar ese hecho se ubica un arco encima de dicha cifra.

$$\frac{13}{3} = 13 \div 3 = 4{,}3333... = 4{,}\widehat{3}$$

Los números **decimales periódicos puros** son aquellos que presentan el periodo inmediatamente después de la coma, en tanto que en los **periódicos mixtos** el periodo no aparece inmediatamente después de esta.

Ejemplo 3

El número decimal $4{,}\widehat{8}$ es puro y su periodo es 8, mientras que $3{,}4\widehat{672}$ es mixto, pues su periodo, que es 672, no aparece inmediatamente después de la coma. En este número la cifra decimal 4 que no se repite se denomina **anteperiodo.**

La Figura 2.10 resume la clasificación de los números decimales.

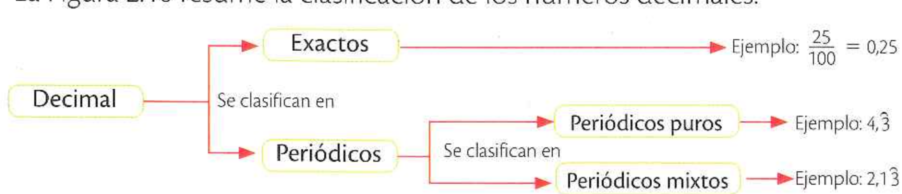


Figura 2.10

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Escribe como número decimal cada fracción decimal y cómo es la manera adecuada de leerlo.

a. $\frac{15}{10}$ b. $\frac{22}{100}$ c. $\frac{18}{1000}$

d. $\frac{45}{100}$ e. $\frac{214}{1000}$ f. $\frac{877}{10000}$

g. $\frac{376}{1000}$ h. $\frac{21}{100}$ i. $\frac{167}{1000}$

2 Escribe la fracción decimal para cada uno de los siguientes números.

a. 23 décimas b. 100 centésimas
c. 424 décimas d. 5 milésimas
e. 678 centésimas f. 490 centésimas
g. 982 décimas h. 209 milésimas
i. 8 diezmilésimas j. 543 diezmilésimas

3 Escribe la expresión decimal correspondiente a cada uno de los siguientes números fraccionarios.

a. $\frac{13}{5}$ b. $\frac{3}{8}$ c. $\frac{5}{11}$

d. $\frac{8}{12}$ e. $\frac{63}{7}$ f. $\frac{11}{9}$

4 Relaciona cada fracción con su expresión decimal.

$\frac{1}{4}$	2
$\frac{8}{4}$	$0{,}1\overset{\frown}{6}$
$\frac{1}{6}$	0,25

Razonamiento

5 Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. La expresión decimal de $\frac{150}{10}$ es 1,5. ( )

b. 3,45 es la expresión decimal de $\frac{345}{100}$. ( )

c. $\frac{32}{100}$ es equivalente a 3,2. ( )

d. 45,6 es la expresión decimal de $\frac{456}{10}$. ( )

Resolución de problemas

6 En la Tabla 2.2 aparece el número de calorías aproximadas que tiene un gramo de algunos alimentos.

Alimento	Pan	Queso blanco	Manzana	Filete	Espárragos
Calorías por gramo	3,3	1,2	0,52	3,75	0,32

Tabla 2.2

a. Escribe como fracción decimal cada uno de los números de la tabla.

b. Ordena las fracciones del literal anterior de mayor a menor para decir cuál de los alimentos tiene la mayor cantidad de calorías y cuál tiene la menor cantidad de calorías.

c. Descompón cada uno de los valores que aparecen en la tabla.

Evaluación del aprendizaje

Andrea, Natalia, Juan, Carlos y Fernanda desean ingresar a la "Casa encantada", a la cual pueden ingresar personas con al menos 1,60 metros de estatura.

Decide cuáles de ellos pueden ingresar si sus estaturas son:

Andrea $\frac{3}{2}$ de metro, Natalia $\frac{5}{3}$ de metro, Juan 2 metros, Carlos $\frac{4}{3}$ de metro y Fernanda $\frac{9}{5}$ de metro.

Estilos de vida saludable

En Colombia uno de cada dos adultos y uno de cada cinco niños y adolescentes tienen sobrepeso y obesidad. Expresa estas cifras en fracciones y números decimales. ¿Cómo crees que puedes evitar el sobrepeso y la obesidad?

5 Comparación de números decimales

Pensamiento numérico

Saberes previos

Marcela y Juliana participaron en una maratón. Marcela la terminó en 35 minutos y Juliana en 36 minutos. ¿Cuál de ellas llegó primero a la meta?

Analiza

A los hijos de Gabriel les hicieron un examen médico en su centro de salud. El doctor midió y pesó a los niños. Manuel midió 1 metro y 40 centímetros de estatura, y Luisa midió 1 metro y 4 centímetros.

- ¿Cuál de los dos niños es el más alto?

Conoce

La estatura de Manuel se escribe como 1,40 metros, en tanto que la de Luisa se nota como 1,04 metros.

Cuando los niños se paran al lado del metro, se observa que Manuel es más alto que Luisa; así que: 1,40 > 1,04.

Para **comparar números decimales** se pueden cotejar las partes enteras de los números decimales entre sí y luego las cifras decimales según su posición, comenzando por la de mayor valor (décimos), hasta que una de ellas sea menor o mayor que la otra.

Ejemplo 1

Para cotejar 4,25 y 4,21 se comparan las cifras de izquierda a derecha hasta donde sean diferentes.

4,25 4,21

$4 = 4$

$2 = 2$

$5 > 1$

Por lo tanto, 4,25 > 4,21.

Ejemplo 2

El doctor pesó a Manuel y a Luisa y obtuvo 35,2 kilogramos y 19,5 kilogramos, respectivamente. Para saber cuál de los dos niños es más pesado, simplemente comparó las decenas y no tuvo que hacerlo ni con las unidades ni con las décimas.

19,5 35,2

$1 < 3$

El más pesado es Manuel.

Ejemplo 3

Para ordenar de mayor a menor las alturas de las tres montañas que se indican en la Tabla 2.3, se deben comparar los datos correspondientes.

Montaña	A	B	C
Altura en km	3,156	3,15	3,28

Tabla 2.3

- Como las **unidades** son iguales en los tres datos, se comparan las **décimas**.
- Como 2 > 1, la montaña C es la más alta de las tres.
- Para saber cuál es la montaña que le sigue en altura a la C, se comparan las alturas de las otras dos; con ese fin, se puede escribir 3,15 como 3,150 y como 3,156 > 3,150. Entonces, la montaña A le sigue a la C.
- Por consiguiente, al ordenar de mayor a menor altura de las montañas es C, A, B.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Ordena de menor a mayor cada grupo de números.

a. 2,58 2,508 2,805

b. 52,12 50,32 50,12

c. 54,392 54,395 54,953

d. 129,314 129,204 129,134

e. 764,908 764,809 764,898

2 Ordena de mayor a menor cada grupo de fracciones, expresándolas en su desarrollo decimal.

a. $\frac{23}{10}$ $\frac{231}{100}$ $\frac{7}{3}$

b. $\frac{4234}{100}$ $\frac{91}{2}$ $\frac{312}{7}$

c. $\frac{11}{3}$ $\frac{3678}{1000}$ $\frac{356}{100}$

d. $\frac{5}{3}$ $\frac{357}{75}$ $\frac{457}{86}$

e. $\frac{15}{7}$ $\frac{21}{4}$ $\frac{53}{9}$

f. $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{6}{11}$

3 Ubica los siguientes números decimales en la semirrecta numérica y luego, escríbelos de menor a mayor.

5,1 5,55 4,9 5,25 6,19 4,85 6,05

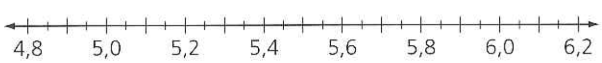
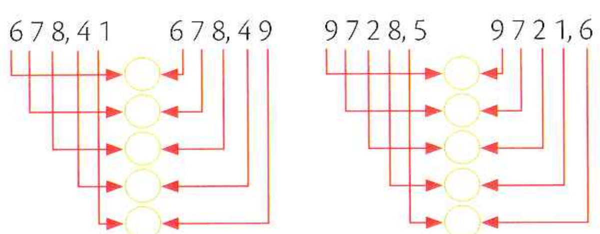


Figura 2.11

4 Compara las cifras en cada posición de izquierda a derecha hasta donde sea necesario, para comparar cada par de números decimales.



Razonamiento

5 Escribe el número que es dos décimas mayor que cada uno de los siguientes decimales.

a. 8,7 b. 0,35 c. 12,976

d. 302,012 e. 0,004 f. 5

Resolución de problemas

6 Observa la Tabla 2.4 y contesta las preguntas.

Alimento	Calorías	Proteínas	Grasa	Carbohidratos
Arepa	230	5,8	1,7	49,3
Frijoles	373	21,0	6,2	61,0
Cebolla	35	1,5	0,2	9,0
Pimentón	23	1,2	0,10	6,0
Tomate	18	0,6	0,1	4,1
Pollo	170	18,2	10,2	0,0
Huevo	149	11,3	9,8	2,7

Tabla 2.4

a. ¿Cuál alimento contiene mayor cantidad de proteína?

b. ¿Cuál alimento contiene menos grasa?

c. Escribe los alimentos ordenándolos de mayor a menor contenido de grasa.

Evaluación del aprendizaje

La Tabla 2.5 muestra los tiempos que tarda Luis en dar una vuelta a la cancha de baloncesto cada uno de los cinco días de la semana.

Día	Tiempo
Lunes	53 segundos y 654 milésimas
Martes	53 segundos y 324 centésimas
Miércoles	53 segundos y 7 centésimas
Jueves	53 segundos y 68 décimas
Viernes	53 segundos y 785 milésimas

Tabla 2.5

a. Escribe cada uno de los tiempos como un número decimal.

b. ¿Cuál fue el día en el que Luis tardó menos tiempo en dar la vuelta a la cancha?

6 Aproximación de números decimales

Saberes previos

El profesor le pide a Marcos que pase adelante para que sus compañeros digan cuál creen que es su estatura. Camilo dice que Marcos mide como 1,70 m. Si la estatura real de Marcos es 1,72, ¿fue buena la apreciación de Camilo?

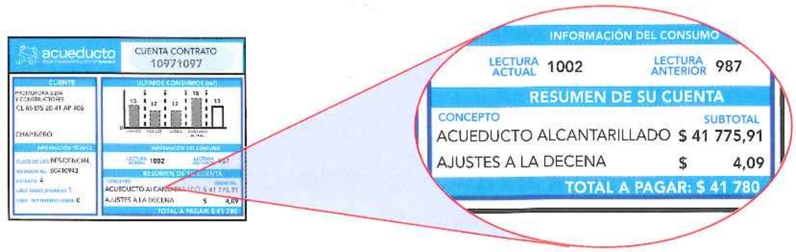
Analiza

En un recibo del agua el valor a pagar por acueducto y alcantarillado es de $ 41 775,91. La empresa ajusta hasta la unidad más próxima el anterior valor para determinar el total a pagar.

- ¿Cuánto deberá pagar el usuario por el recibo del agua?

Conoce

Después del ajuste a la decena más próxima, el usuario deberá pagar $ 41 776.



6.1 Redondeo de números decimales

Para **redondear un número** a una posición determinada, se siguen estas reglas:

- La cifra que se redondea queda igual si la cifra que va a la derecha es menor que 5.
- La cifra que se redondea aumenta en uno si la cifra que va a la derecha es mayor o igual que 5.

Para redondear un número decimal a las décimas, centésimas, milésimas, etc., la cifra a redondear se mantiene si la cifra a la derecha es menor que 5.

En este caso el resultado es un número que se escribe igual al inicial, hasta la cifra a redondear. Las demás cifras a la derecha se eliminan.

Ejemplo 1

En la Tabla 2.6 se muestra el redondeo de algunos números.

	Porque...
3,1416 redondeado a las centésimas es 3,14	**1** es menor que 5
1,2635 redondeado a las décimas es 1,3	**6** es mayor que 5
1,2635 redondeado a tres cifras decimales es 1,264	la cuarta cifra decimal es **5**

Tabla 2.6

Ejemplo 2

Una llamada telefónica hecha desde una cabina tardó 4,6 minutos. El reglamento indica que el tiempo se redondea a la unidad más cercana. Como la cifra de las décimas en 4,6 es mayor que 5, entonces el número se redondea a 5 y, por lo tanto, el usuario deberá pagar por 5 minutos de llamada.

6.2 Truncamiento de números decimales

En el **truncamiento de un número decimal** se eliminan las cifras a partir de aquellas en la que se realiza el truncamiento.

Ejemplo 3

El truncamiento por la unidad de 56,76 es 56.

El truncamiento por la décima de 32,768 es 32,7; y el truncamiento por la centésima de 127,9545 es 127,95.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Completa la Tabla 2.7.

Número	Aproximación por redondeo		
	A las milésimas	A las centésimas	A las décimas
34,5241			
1,76933			
0,65295			
543			
43,90002			
32,65231			
302,3873			

Tabla 2.7

2 Representa en el segmento de la recta numérica de la Figura 2.12 los siguientes números y redondéalos a las décimas.

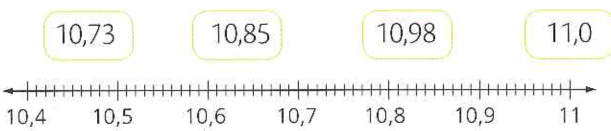


Figura 2.12

Razonamiento

3 Califica como verdadera (V) o falsa (F) cada afirmación.

a. Al truncar el número 417,234 en las centésimas se obtiene 417,2.

b. El número 34,279 se aproxima a 34,2 si se trunca en las décimas.

c. Al redondear 45,7632 a las décimas se obtiene 45,8.

d. Al redondear 652,6521 a las décimas se obtiene 652,7.

e. Al truncar cualquier número natural a las décimas, se obtiene el mismo número.

Modelación

4 Resuelve.

Gabriela vive a 2,628 km del colegio, Federico a 2,619 km y Viviana a 2,543 km. Si las cantidades se truncan en las centésimas, ¿quiénes viven aproximadamente a la misma distancia del colegio?

Resolución de problemas

5 La marca mundial de velocidad por tierra establecida el 15 de octubre de 1997 fue 1 229,7 kilómetros por hora. ¿Cuánto es esta velocidad redondeada a la decena más cercana?

6 En una carrera de relevos cuatro integrantes de un equipo lograron 21,76; 21,45; 23,0 y 23 segundos. Redondea cada valor a la unidad más cercana y calcula el tiempo total combinado de todos los atletas. ¿Algunos de ellos tuvieron el mismo registro? Explica.

Evaluación del aprendizaje

i En un centro comercial, el valor del parqueo se aproxima a las unidades. Determina si lo que se le cobra a cada usuario es justo.

Usuario	Valor real	Valor cobrado por el centro comercial
Ricardo	\$ 12 865,35	\$ 12 866
Lorena	\$ 8 654,76	\$ 8 655
Carmen	\$ 10 460,30	\$ 10 500
Eduardo	\$ 27 986,55	\$ 28 000

Tabla 2.8

ii Lee atentamente. En una búsqueda en internet acerca de las marcas mundiales de los cien metros planos, se obtiene la siguiente información.

Récord del mundo	Usain Bolt (Jamaica)	9,58 s	Berlín, Alemania	16 de agosto de 2009
Récord olímpico en 2012		9,69 s	Pekín, China	16 de agosto de 2008
Mejor marca en el 2012	Yohan-Blake (Jamaica)	9,75 s	Kingston, Jamaica	30 de junio de 2012

Tabla 2.9

Durante la competición se batió el Récord Olímpico.

Día	Evento	Atleta	Tiempo	Notas
5 de agosto	Final	Usain Bolt (Jamaica)	9,63 s	RO

Tabla 2.10

a. Redondea cada marca a las décimas.

b. Trunca a las décimas cada marca.

c. Ubica sobre una semirrecta numérica cada marca y ordénalas de menor a mayor.

7 Conversiones entre fracciones y decimales

Saberes previos

Al dividir 345 entre 100 se obtiene 3,45. ¿Cuáles serían el dividendo y el divisor para obtener 34,5?

Analiza

El recipiente de la Figura 2.13 tiene un litro de capacidad. Para efectos de precisión se han hecho divisiones, cada una de las cuales corresponde a 1 decilitro.

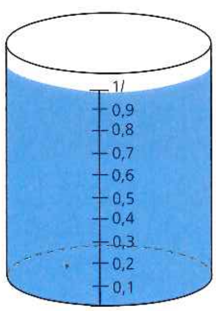


Figura 2.13

- ¿Qué fracción del recipiente se ocuparía si se llenara hasta la marca 0,5?

Conoce

Si en el recipiente se vierte agua hasta la marca 0,5, se habrá ocupado la mitad de su capacidad; así que $\frac{1}{2} = 0{,}5$.

Cuando se divide 1 entre 2, se obtiene 0,5. Por tanto, se dice que la fracción $\frac{1}{2}$ es equivalente al número decimal 0,5.

La **fracción generatriz** de un número decimal es una fracción en la que al dividir el numerador entre el denominador arroja como cociente ese número.

7.1 Fracción generatriz de una expresión decimal exacta

La **fracción generatriz** de un **decimal exacto** tiene como numerador el número sin decimales y como denominador, la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el número decimal.

Una vez obtenida la fracción generatriz, se simplifica si es posible.

Ejemplo 1

- Para hallar la fracción generatriz de 0,345 se sigue este procedimiento:

  1. Se escribe el número sin decimales en el numerador.

  $$0{,}345 = \frac{345}{\square}$$

  2. Se escribe en el denominador la potencia de diez con tantos ceros como cifras decimales tenga la expresión decimal dada (en este caso, 3).

  $$0{,}345 = \frac{345}{1\,000}$$

  3. Se simplifica hasta obtener una fracción irreducible.

  $$0{,}345 = \frac{345}{1\,000} = \frac{69}{200}$$

  Entonces, la fracción generatriz de la expresión decimal 0,345 es $\frac{69}{200}$.

- Para hallar la fracción generatriz de 43,78 se procede así:

  1. Se escribe como numerador la expresión dada pero sin coma.

  $$43{,}78 = \frac{4\,378}{\square}$$

  2. Se escribe como denominador la potencia de diez con tantos ceros como cifras decimales tenga la expresión decimal dada y se simplifica hasta obtener una fracción irreducible.

  $$43{,}78 = \frac{4\,378}{100}$$

  Así, la fracción generatriz de la expresión decimal 43,78 es $\frac{2\,189}{50}$.

7.2 Fracción generatriz de una expresión decimal periódica pura

La **fracción generatriz** de un **decimal periódico puro** cuya parte entera es 0, es una fracción que tiene como numerador el mismo periodo y como denominador tantos nueves como cifras decimales tiene el periodo.

Ejemplo 2

Para hallar la fracción generatriz del decimal puro $0,\widehat{25}$ se procede así:

1. Como la parte entera del decimal es 0, se escribe en el numerador el periodo del decimal.

$$0,\widehat{25} = \frac{25}{\square}$$

2. Se escriben tantos nueves en el denominador como cifras tiene el periodo.

$$0,\widehat{25} = \frac{25}{99}$$

Por tanto, la fracción generatriz de $0,\widehat{25}$ es $\frac{25}{99}$.

Ejemplo 3

Para determinar la fracción generatriz de $4,\widehat{15}$ se siguen estos pasos:

1. Se escribe el número como la suma de la parte entera y la parte decimal.

$$4,\widehat{15} = 4 + 0,\widehat{15}$$

2. Se halla la fracción que corresponde a la parte decimal.

$$0,\widehat{15} = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}$$

3. Se escribe el número mixto correspondiente y se expresa como una fracción impropia.

$$4 + \frac{5}{33} = 4\frac{5}{33} = \frac{137}{33}$$

Así, la fracción generatriz del número decimal $4,\widehat{15}$ es $\frac{137}{33}$.

7.3 Fracción generatriz de una expresión decimal periódica mixta

La **fracción generatriz** de un **decimal periódico mixto** tiene como numerador las cifras hasta completar un periodo, menos las cifras hasta el anteperiodo, y como denominador tantos nueves como cifras tenga el periodo seguidos de tantos ceros como cifras tenga el anteperiodo.

Ejemplo 4

Observa cómo se halla la fracción generatriz de $8,4\widehat{13}$.

$$8,4\widehat{13} = \frac{8\,413 - 84}{990} = \frac{8\,329}{990}$$

7 Conversiones entre fracciones y decimales

MatemaTICS

Halla expresiones decimales con la calculadora científica

Cuando se usa la calculadora para hallar la expresión decimal de un número fraccionario, es necesario tener presente que esta mostrará una cantidad determinada de dígitos después de la coma (esto depende del modelo de la calculadora).

- Para hallar la expresión decimal del número fraccionario $\frac{1}{11}$, se digita la secuencia:

  1 ÷ 1 1 EXE

  El resultado con diez cifras decimales aparece en la pantalla así:

  1÷11
  0.0909090909

  El periodo en este caso es 09, así que la forma de expresar el número decimal es $0,\overset{\frown}{09}$.

- Para convertir $\frac{12}{11}$ a expresión decimal, se digita:

  1 2 ÷ 1 1 EXE

  El resultado que muestra la calculadora en la pantalla es:

  12÷11
  1.09090909091

  Como se observa, aparece el número 1 al final. Esto no significa que el periodo ha cambiado, sino que la calculadora ha redondeado el valor. Por tanto, la forma de expresarlo es $1,\overset{\frown}{09}$.

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1. Explica qué entiendes por periodo en los números decimales. Escribe cinco ejemplos.

2. Explica si todo número natural puede escribirse como decimal. Escribe cinco ejemplos que apoyen tu respuesta.

3. Señala la diferencia entre números decimales puros y números decimales mixtos.

Ejercitación

4. Clasifica las siguientes expresiones decimales y determina la fracción generatriz correspondiente.

   a. $33,\overset{\frown}{02}$ b. $1,\overset{\frown}{001}$
   c. 0,324 d. 329,923
   e. $4,\overset{\frown}{4}$ f. 23,010
   g. $0,\overset{\frown}{39}$ h. 0,963
   i. $0,\overset{\frown}{9}$ j. 12
   k. $28,\overset{\frown}{1}$ l. 17,52

5. Halla la fracción generatriz de cada una de las expresiones decimales.

   a. 3,04; 3,004; 3,044 y 3,0404
   b. 969,0069; 696,096 y 699,06
   c. 123,663; 123,6663; 123,66663
   d. $32,\overset{\frown}{1123}$; $32,11\overset{\frown}{23}$; $32,1\overset{\frown}{123}$
   e. $10,\overset{\frown}{101}$; 10,101; $10,10\overset{\frown}{1}$

6. Indica si cada una de las afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).

   a. Una fracción generatriz para 3 es $\frac{3}{1}$. ( )
   b. $\frac{183}{25}$ es la fracción generatriz de 7,32. ( )
   c. La fracción generatriz de $7,\overset{\frown}{27}$ es $\frac{727}{100}$. ( )
   d. La fracción generatriz de $7,\overset{\frown}{2}$ es $\frac{7}{2}$. ( )
   e. La fracción generatriz de $3,\overset{\frown}{27}$ es $\frac{327}{100}$. ( )

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Razonamiento

7 Halla la fracción generatriz del número decimal 0,5 y luego fracciones equivalentes a esta que satisfagan la condición enunciada en cada caso.

a. Una cuyo denominador sea 8.

b. Una que tenga como numerador el número 15.

c. Una cuyo numerador sea 36.

d. Una que tenga un número primo como numerador.

e. Una en la que la suma del numerador y el denominador sea 120.

8 Halla la fracción generatriz del número decimal 0,75. Luego, escribe fracciones equivalentes a esta que cumplan las condiciones que se citan en cada caso.

a. Una que tenga como numerador el número 21.

b. Una en la que la suma del numerador y el denominador sea 14.

c. Una cuyo denominador sea una potencia de 10.

d. Una que tenga como denominador el número 28.

9 Determina si los siguientes números son iguales o no. Justifica tus respuestas.

a. $66,\widehat{196}$ y $66,1\widehat{96}$

b. $3,1\widehat{47}$ y $3,1\widehat{474}$

c. 21 y 21,0

d. $5,3\widehat{2}$ y $5,3\widehat{22}$

e. 4,0 y 4

10 Colorea el círculo de la Figura 2.14 según las indicaciones.

a. $0,\widehat{3}$ con azul

b. $0,1\widehat{6}$ con verde

c. $0,08\widehat{3}$ con amarillo

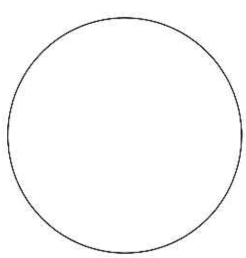


Figura 2.14

11 Estima la fracción del círculo que quedó sin colorear en la actividad anterior y escríbela en su expresión decimal.

12 Observa en la Figura 2.15 cómo Mario coloreó con azul dos de las tres partes en las que dividió un círculo. ¿Se puede afirmar que él coloreó $0,\widehat{6}$ del círculo?

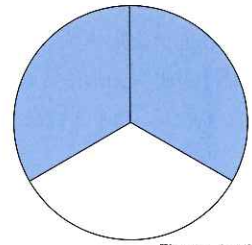


Figura 2.15

Resolución de problemas

13 Un análisis químico indicó que $\frac{4}{7}$ mL de una sustancia era gasolina, mientras que un segundo estudio concluyó que 0,572 mL de la sustancia correspondía a ese combustible. ¿Cuál de los dos análisis mostró mayor cantidad de gasolina?

14 $\frac{3}{7}$ de los estudiantes del curso 7A son hombres y en 7B la expresión decimal de los estudiantes de ese género es 0,4. Si ambos cursos tienen la misma cantidad de estudiantes, ¿cuál curso tiene más hombres? Justifica tu respuesta.

15 Un libro de ciencias indica que $\frac{7}{10}$ de la superficie de la Tierra está cubierta por agua, mientras que en una enciclopedia se lee que 0,71 del planeta está cubierto por ese líquido. Según estudios oficiales, el 70 % del planeta está cubierto por agua. Con base en la información de los estudios oficiales, indica cuál de los dos textos (el de ciencias o la enciclopedia) brinda la información más cercana a la realidad.

Evaluación del aprendizaje

✓ Colorea el cuadrado de la Figura 2.16 como se indica.

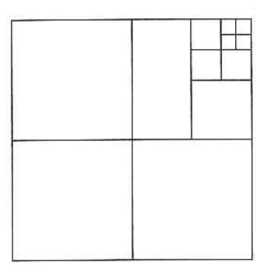


Figura 2.16

a. Con azul 0,5 del cuadrado.

b. Con verde 0,125 del cuadrado.

c. Con amarillo 0,046875 del cuadrado.

d. Con morado 0,0625 del cuadrado.

8 Operaciones con números decimales

Saberes previos

Laura mide 162 cm y Sofía mide 154 cm. ¿Cuántos centímetros más mide Laura con respecto a Sofía?

Analiza

La pirámide de Kefrén mide 143,5 metros de altura. La pirámide de Micerinos mide 65,5 metros de altura.

- ¿Cuál es la diferencia entre la altura de las dos pirámides?

Conoce

8.1 Adición y sustracción de números decimales

Como se quiere hallar la diferencia entre las alturas de las pirámides, se calcula:

$$143{,}5 - 65{,}5$$

Para ello, pueden escribirse las fracciones decimales que corresponden al minuendo y al sustraendo y luego, se restan: $\frac{1435}{10} - \frac{655}{10} = \frac{780}{10} = 78$

Observa que se obtiene el mismo resultado si se resta de manera vertical, alineando las comas decimales.

$$\begin{array}{r} 143{,}5 \\ -\ \ 65{,}5 \\ \hline 78{,}0 \end{array}$$

La pirámide de Kefrén mide 78 metros más que la de Micerinos.

Para **sumar o restar números decimales**:

1. Se escribe un número debajo del otro, de modo que coincidan las unidades del mismo orden y la coma decimal.
2. Se suman o restan las cifras como si fueran números naturales.
3. En el resultado se escribe la coma debajo de las comas.

Ejemplo 1

Para llegar a un pueblo cercano a una ciudad se recorren 54,7 km en bus hasta cierto punto, y de ahí, se aborda un taxi para recorrer otros 2,8 km.

Para conocer la distancia total que se debe recorrer, se suman las dos distancias.

$$\begin{array}{r} 54{,}7 \\ +\ \ \ 2{,}8 \\ \hline 57{,}5 \end{array}$$

En total se recorren 57,5 km.

Ejemplo 2

La profundidad de un río es de 7,45 m y la de otro es de 7,459 m. ¿Cuál es el más profundo de los dos? ¿Cuántos metros hay de diferencia?

Para responder la primera pregunta, se comparan los decimales 7,459 y 7,450, de manera que 7,459 > 7,450; esto significa que el segundo río es más profundo que el primero. Para saber la diferencia entre la profundidad de uno y otro río, se efectúa una sustracción.

$$\begin{array}{r} 7{,}459 \\ -\ 7{,}450 \\ \hline 0{,}009 \end{array}$$

La diferencia entre las profundidades de los ríos es de 0,009 metros, es decir, 9 mm.

8.2 Multiplicación y división de un número decimal por 10, 100, 1 000...

Para **multiplicar un número decimal por la unidad seguida de ceros**, se desplaza la coma hacia la derecha uno, dos, tres o tantos lugares como ceros acompañen a la unidad. Se completa con ceros cuando sea necesario.

Ejemplo 3

Una botella de agua mineral contiene 1,5 L de agua. Para determinar cuántos litros contendrán 100 botellas, hay que hacer la multiplicación 1,5 · 100.

$$\boxed{1{,}5 \cdot 100} = \frac{15}{10} \cdot 100 = \frac{15 \cdot 100}{10} = \frac{1500}{10} = \boxed{150{,}0}$$

Observa que, al multiplicar por 100, la coma se desplaza dos lugares hacia la derecha. Por tanto, las 100 botellas contienen 150 L de agua.

Para **dividir un número decimal por la unidad seguida de ceros**, se desplaza la coma hacia la izquierda uno, dos, tres o tantos lugares como ceros acompañen a la unidad. Se completa con ceros cuando sea necesario.

Ejemplo 4

Una caja contiene diez libros iguales. La caja de libros pesa 90,30 kg. Para averiguar cuánto pesa cada libro, hay que dividir 90,30 entre 10.

$$\boxed{90{,}30 \div 10} = \frac{9\,030}{100} \div 10 = \frac{9\,030}{100} \cdot \frac{1}{10} = \frac{9\,030}{1\,000} = \boxed{9{,}03}$$

Ejemplo 5

Una empresa exportadora de bananos empaca la fruta de acuerdo con la publicidad que se muestra en la Figura 2.17.

Para saber el peso de un banano, se divide el peso neto entre la cantidad de unidades que contiene la caja, así:

$14{,}8 \div 100 = 0{,}148$ kilogramos.

Entonces, un banano pesa 0,148 kilogramos.

Para saber cuál es el peso de un banano en gramos se multiplica por 1 000, ya que 1 kilogramo = 1 000 gramos.

De esa manera, un banano pesa $0{,}148 \cdot 1\,000 = 148$ gramos.

Figura 2.17

8.3 Multiplicación de números decimales

Para **multiplicar dos números decimales**:

1. Se multiplican como si fueran números naturales.
2. En el producto, se separa con una coma —empezando a contar por la derecha— un número de cifras decimales igual a la suma del número de cifras decimales que tienen los dos factores.

Ejemplo 6

Para calcular la medida de la superficie de una tabla de 2,75 m de largo por 1,25 m de ancho, hay que efectuar la multiplicación 2,75 · 1,25.

$$2{,}75 \cdot 1{,}25 = 3{,}4375$$

La superficie de la tabla es 3,4375 m^2.

8.4 División de números decimales

Al dividir decimales se pueden presentar varios casos:

- **Solo el dividendo es decimal**. En ese caso, se efectúa la división de números decimales como si se tratara de números naturales.

  Cuando se baje la primera cifra decimal, se escribe la coma en el cociente y se continúa dividiendo.

Ejemplo 7

Para dividir 567,21 entre 8 se procede así:

```
5 6 7 , 2 1 |8
  0 7   2    7 0 , 9 0
        0 1
```

- **El dividendo y el divisor son decimales**. En este caso, se multiplica el término que tenga más cifras decimales por una potencia de 10 que lo convierta en entero y se multiplica el otro término por esa misma potencia. A continuación se divide como si fueran números naturales.

Ejemplo 8

Dividir 10,14 kg entre 5,2 kg.

1. Se multiplican el dividendo y el divisor por 100, para convertir el dividendo en un número natural.	2. Se dividen como si fueran naturales.	3. Se continúa dividiendo y se escribe la coma decimal cuando sea necesario.
$10{,}14 \cdot 100 = 1014$ $5{,}2 \cdot 100 = 520$	1014 |520 494 1,	1014 |520 494 1,95 2600 0

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

MatemaTICS

Efectúa operaciones con números decimales

Hacer operaciones con números decimales en la calculadora científica requiere de procesos similares a los de las operaciones con números naturales. Observa el ejemplo.

Para efectuar (23,5 + 4,07) · 3,32 se digita la secuencia:

(2 3 . 5 + 4 . 0 7) x 3 . 3 2 EXE

Y la calculadora registra:

(23.5+4.07)×3.32
91.5324

Para efectuar (18,5 ÷ 2,13) · 1,75 se digita la secuencia:

(1 8 . 5 ÷ 2 . 1 3) x 1 . 7 5 EXE

En pantalla sale:

(18.5÷2.13)×1.75
15.19953

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1. Halla el resultado de estas multiplicaciones.

a. 0,1 · 10 b. 0,05 · 10

c. $\dfrac{2\,007}{1\,000} \cdot 100$ d. 0,01 · 100

e. 0,006 · 100 f. $\dfrac{402}{100} \cdot 1\,000$

2. Realiza las siguientes divisiones.

a. 25,5 ÷ 10 b. 0,5 ÷ 10

c. $\dfrac{23}{10} \div 100$ d. 10,1 ÷ 100

e. 10,06 ÷ 1 000 f. $\dfrac{7}{10} \div 1\,000$

3. Halla estos productos.

a. 8 · 0,7 b. 0,69 · 0,7

c. 2,08 · 0,25 d. 0,7 · 4

e. 0,5 · 0,136 f. 21,05 · 3,8

4. Haz las divisiones que se proponen.

a. 36,9 ÷ 4,1 b. 5,36 ÷ 0,67

c. 47,7 ÷ 0,09 d. 4,731 ÷ 0,57

e. 4,992 ÷ 0,08 f. 2,183 ÷ 0,37

5. Usa la calculadora para hallar el cociente en cada caso.

a. 23,2 ÷ 2,2 b. 0,0277 ÷ 1,3

c. 0,857 ÷ 1,54 d. 0,0058 ÷ 0,037

Razonamiento

6. Lee la información y soluciona.

a. Eduardo necesitaba encontrar un valor aproximado de 5,2 · 7,8, así que aproximó cada factor hasta las unidades. ¿Qué valor obtuvo?

b. Diana necesitaba estimar el cociente de 43,5 entre 8,25, así que decidió aproximar a las unidades tanto el dividendo como el divisor. ¿Qué valor obtuvo si dividió hasta encontrar la cifra de las décimas?

7. Coloca la coma en el lugar que corresponda en las divisiones que se muestran a continuación.

a.
```
56,32 |16
 8 3   352
   32
    0
```

b.
```
15,61 | 7
 1 6   223
   21
    0
```

c. 18,36 ÷ 9 = 204 d. 49,35 ÷ 329 = 15

e. 8,901 ÷ 3 = 2967 f. 50,04 ÷ 24 = 2085

8 Operaciones con números decimales

Ejercitación

8 Realiza las siguientes adiciones.

a. $1{,}9 + 0{,}1$

b. $\frac{289}{100} + 0{,}11$

c. $123{,}824 + 250{,}001$

9 Haz las sustracciones que se proponen.

a. $2{,}9 - 0{,}9$

b. $132{,}87 - \frac{1\,489}{100}$

c. $1\,324{,}89 - 1{,}11$

10 Realiza las siguientes operaciones.

a. $123{,}208 - 12{,}8 + 0{,}1$

b. $0{,}098 - 0{,}007 + 3{,}088$

c. $2{,}008 + \frac{2}{100} - 0{,}15$

11 Encuentra el resultado. Resuelve primero las operaciones de los paréntesis.

a. $(12 - 5{,}46) + (4 - 3{,}065)$

b. $(3{,}28 - 0{,}59) + (5{,}89 - 4{,}77)$

c. $(3{,}2 - 0{,}45) - (4 - 3{,}114)$

Razonamiento

12 Copia las siguientes adiciones en tu cuaderno y encuentra las cifras que faltan.

a.
$$\begin{array}{r} 0{,}87 \\ 0{,}\square \\ +\ 0{,}396 \\ \hline 2{,}166 \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{r} 23{,}\square 96 \\ 59{,}8 \\ +\ \ 6{,}54 \\ \hline 89{,}7\square 6 \end{array}$$

13 Copia las siguientes sustracciones en tu cuaderno y encuentra las cifras que faltan.

a.
$$\begin{array}{r} 5{,}17 \\ -\ \square{,}6 \\ \hline 1{,}57 \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{r} 26{,}45 \\ -\ \ 8{,}\square 93 \\ \hline 17{,}8\square\square \end{array}$$

14 Encuentra y corrige el error en la diferencia de 3,45 con 6,8.

$$\begin{array}{r} 6{,}8 \\ -\ 3{,}45 \\ \hline 3{,}45 \end{array}$$

Resolución de problemas

15 La diferencia de dos números es 10,878. Si uno de los números es $\frac{1977}{250}$, ¿cuál es el otro número?

16 La suma de dos números es $\frac{563}{4}$. Si uno de los sumandos es 40,75, ¿cuál es el otro sumando?

17 A la suma entre 34,678 y 90,954 resta la suma entre $\frac{7}{5}$ y $\frac{95}{9}$.

18 Daniel mide 1,86 m, Juan mide 95 cm y su hermana Luisa mide 63 cm.

a. ¿Cuál de ellos es el más alto?

b. ¿Cuál de ellos es el más bajo?

c. ¿Cuánto más alto es Daniel que Juan y que Luisa?

19 Un carro consume $\frac{1\,475}{100}$ litros de gasolina yendo de una ciudad A a una ciudad B y 13,32 litros de la ciudad B a una ciudad C.

a. ¿Cuánto combustible consume en total?

b. Si la capacidad del tanque de gasolina en el carro es 50 litros y salió lleno de la ciudad A, ¿cuánta gasolina le queda una vez llega a la ciudad C?

20 En un área escolar de 2 000 m^2, la cuarta parte la ocupan las oficinas, 1 235,7 m^2 son para las aulas de clase y el resto corresponde a zonas verdes. ¿Cuántos metros cuadrados ocupan las zonas verdes?

21 El consumo de combustible de un camión durante un día de viaje es de 21,77 litros, el del siguiente día de 15,2 litros, el del tercer día de 25,06 litros y el del último día la mitad de lo que quedaba. Si para comenzar el viaje el tanque de gasolina iba con 80 litros:

a. ¿Cuánto combustible consumió el último día?

b. ¿Qué cantidad de combustible le quedó al final del último día?

c. ¿Cuánta gasolina debe depositársele al tanque para que quede lleno de nuevo?

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Razonamiento

22 Califica como verdadera (V) o falsa (F) cada afirmación.

a. El producto 5,300 · 100 es igual al producto 5,3 · 100.

b. El producto 3,4 · 1 000 es igual al producto 34 · 100.

c. Dividir entre 10 un número es igual que multiplicarlo por 0,1.

d. Para multiplicar por 1 000 un número decimal, se corre la coma tres veces hacia la izquierda.

e. El producto de dos números decimales es otro número decimal.

f. Todos los números naturales son decimales.

g. Todos los números decimales son naturales.

h. El cociente de dos números decimales nunca es un número natural.

23 Con 3,75 L de jugo, ¿cuántos vasos de 0,27 L se pueden llenar?

Resolución de problemas

24 Una fundación recogió diez cajas de 325,7 kg de arroz, 100 bolsas de 40,25 kg de papas y 1 000 bolsas de 12,725 kg de azúcar.

¿Cuántos kilogramos de alimentos se recogieron?

25 El largo reglamentario de una cancha de tenis es 23,77 m (Figura 2.18); el ancho es 0,3462 veces el largo, y el alto de la malla, 0,0378 veces el largo de la cancha.

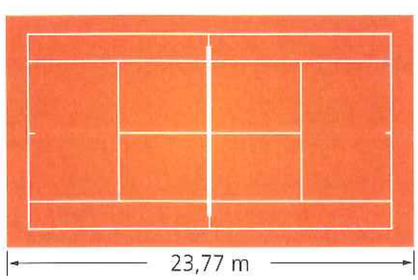


Figura 2.18

¿Cuáles son las medidas reglamentarias de una cancha de tenis?

26 De un listón de madera de 2,15 m de longitud se recortan trozos iguales de $\frac{1}{4}$ m.

¿Cuántos metros de madera se desperdician si se recortan cinco listones?

27 Con el fin de ver mejor la diapositiva de una ameba, Gabriela ajusta el microscopio para agrandar los objetos 100 veces su tamaño real.

a. Si el diámetro real de la ameba es de $\frac{95}{1000}$ mm, ¿cuál es su diámetro visto a través del microscopio?

b. Si Gabriela ajusta el microscopio para agrandar los objetos 10 veces su tamaño real, ¿cuál parecerá ser el diámetro de la ameba con ese ajuste?

28 Una pulgada equivale aproximadamente a $\frac{10}{4}$ cm.

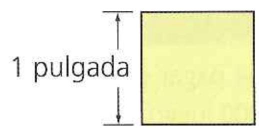


Figura 2.19

¿Cuál es el área de este cuadrado en pulgadas cuadradas? ¿Y en centímetros cuadrados?

Evaluación del aprendizaje

i ¿Cuál es el perímetro del pentágono regular de la Figura 2.20 en centímetros?

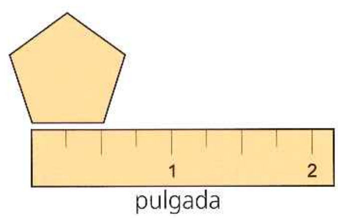


Figura 2.20

ii El monte Vesubio es un volcán activo ubicado al este de Nápoles, Italia.

Para llegar a la cima del volcán, los visitantes deben escalar hasta una altura de 4 202,76 pies. Un grupo de escaladores comienza su ascenso desde el nivel del mar (altura 0) y quiere escalar el monte Vesubio en tres días.

- Si los escaladores quieren subir la misma altura por día, ¿cuántos pies deben subir?

9 Números decimales y porcentajes

Saberes previos

¿Qué entiendes cuando se afirma que los artículos de un supermercado tienen el 50% de descuento?

Analiza

En un almacén se hace un descuento de \$ 30 por cada \$ 100 que cueste una prenda.

- ¿Cuánto se debe pagar por una blusa de \$ 100 000 luego de aplicarle el descuento?

Conoce

Para saber cuánto se debe pagar por la blusa después del descuento, primero se calcula cuántas veces está 100 en 100 000.

Para ello, se efectúa la siguiente división.

$$100\,000 \div 100 = 1\,000$$

El descuento entonces será:

$$1\,000 \cdot 30 = \$30\,000.$$

Así, el valor de la blusa después de aplicar el descuento es de \$ 70 000.

$$\$\ 100\,000 - \$\ 30\,000 = \$\ 70\,000$$

El **porcentaje** es una forma de expresar un número como una fracción con 100 como denominador. También se le llama **tanto por ciento**, que significa «de cada cien unidades». El porcentaje se denota utilizando el símbolo %.

Ejemplo 1

En la misma escala se pueden representar los porcentajes, las razones equivalentes y su expresión decimal. En la Figura 2.21 se observa que el 15% equivale a la razón $\frac{15}{100}$ y a 0,15.

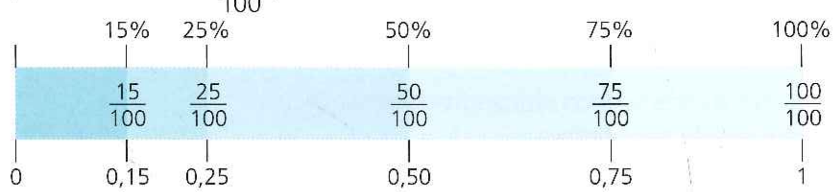


Figura 2.21

Los ejercicios y problemas donde intervienen porcentajes se pueden reducir a una de las situaciones que se presentan a continuación.

- Calcular el tanto por ciento de un número.
- Calcular qué tanto por ciento es un número de otro.
- Calcular un número del cual se conoce el porcentaje.

9.1 Cálculo del porcentaje de un número

Para calcular un **porcentaje** A **de un número** B se efectúa la operación:

$$\frac{A \cdot B}{100}$$

Ejemplo 2

En un curso hay 25 estudiantes, de los que el 60% son mujeres. Para calcular cuántas mujeres hay en el curso, se efectúa la siguiente operación.

$$60\% \text{ de } 25 \Rightarrow \frac{60}{100} \cdot 25 = 0{,}60 \cdot 25 = 15$$

Por tanto, hay 15 mujeres en el curso.

Ejemplo 3

Se realizó una encuesta a 1 260 estudiantes acerca del invento de su preferencia; el 45% de ellos prefiere el celular y el 15% la proyección en tercera dimensión. ¿Cuál es el número de estudiantes que prefiere un invento diferente?

El porcentaje de estudiantes que prefiere otro invento es:

$$100\% - (45\% + 15\%) = 40\%$$

Se calcula el 40% de 1 260.

$$\frac{40}{100} \cdot 1\,260 = 0{,}40 \cdot 1\,260 = 504$$

Por lo tanto, 504 estudiantes prefieren un invento diferente.

9.2 Cálculo de qué tanto por ciento es un número de otro

Para calcular **qué tanto por ciento** de C es D, se divide el segundo entre el primero y se multiplica el cociente que se obtenga por 100:

$$\frac{D}{C} \cdot 100$$

Ejemplo 4

De los 25 caramelos que contiene una bolsa, cinco son de menta. Para calcular qué porcentaje de caramelos de menta hay en la bolsa, se plantea la siguiente operación.

$$\frac{5}{25} \cdot 100\% = \frac{5}{25} \cdot \frac{100\,\%}{1} = \frac{500\,\%}{25} = 20\%$$

Es decir, en la bolsa, el 20% de los caramelos es de menta.

9.3 Cálculo de un número del cual se conoce el porcentaje

Para **calcular un número del cual se conoce cierto porcentaje** M, se multiplica la parte N que se conoce por 100% y al producto se le divide entre M:

$$\frac{N}{M} \cdot 100$$

Ejemplo 5

En un centro de salud se han vacunado 64 niños, que corresponden al 16% del total de niños de la comunidad.

Para saber cuántos niños en total hay en la comunidad, se efectúa la operación que se muestra a continuación.

$$64 \cdot \frac{100\,\%}{16\,\%} = \frac{64}{1} \cdot \frac{100}{16} = \frac{6\,400}{16} = 400$$

Lo anterior significa que en la comunidad hay 400 niños.

9 Números decimales y porcentajes

MatemaTICS

Calcula porcentajes en la calculadora

Una manera de hallar porcentajes en la calculadora consiste en calcular la expresión decimal del porcentaje y multiplicarla por la cantidad a la que se debe calcular dicho porcentaje. También se puede calcular multiplicando el total por el numerador de la fracción equivalente al porcentaje y dividiendo este resultado por el denominador.

Para calcular el 25% de 300 000, se pueden realizar los siguientes procedimientos.

- Se divide 25 entre 100 y se multiplica por 300 000.

  La secuencia que se sigue es:

  2 5 ÷ 1 0 0
  × 3 0 0 0 0 0 EXE

  En pantalla:

  25÷100×300000
  75000

- Se multiplica 300 000 por 25 y el resultado se divide entre 100.

  Se digita:

  (3 0 0 0 0 0 × 2 5)
  ÷ 1 0 0 EXE

  En pantalla:

  (300000×25)÷100
  75000

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1. Expresa cada número decimal en forma de fracción decimal y como porcentaje.

   a. 0,037 b. 0,23 c. 1,5 d. 0,17
   e. 0,05 f. 0,475 g. 0,003 h. 2,1

2. Calcula de forma ágil los siguientes porcentajes.

   a. El 30% de 500. b. El 20% de 800.
   c. El 45% de 1 000. d. El 50% de 720.
   e. El 15% de 100. f. El 25% de 500.

Comunicación

3. Dibuja en tu cuaderno las figuras 2.22 a 2.25 y pinta el 25% de su superficie.

   a. 

   Figura 2.22

   b. 

   Figura 2.23

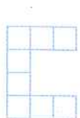
   c. 

   Figura 2.24

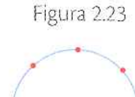
   d. 

   Figura 2.25

4. Completa la Tabla 2.11.

400	300	100	50	25	10	1 000	1
100							

25%

Tabla 2.11

Razonamiento

5. Une con una flecha cada fracción con el porcentaje equivalente.

   $\frac{5}{100}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{25}{50}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{18}{30}$

   5% 75% 60% 50% 25% 20% 40%

6. Une con una flecha cada porcentaje con el número decimal equivalente.

   3% 1% 58% 10% 30% 99% 0,1%

   0,1 0,58 0,3 0,99 0,03 0,001 0,01

Comunicación

7 Indica el número decimal, la fracción y el porcentaje representados por los puntos marcados en la semirrecta de la Figura 2.26.

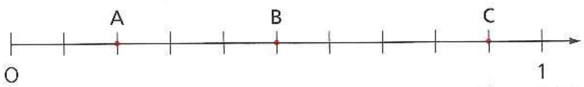


Figura 2.26

Ejercitación

8 ¿Cuál de los siguientes números es el 7% de 2 400?

a. 14 b. 48 c. 168 d. 18,6

9 Completa la Tabla 2.12.

	5%	50%	75%	100%	1%
5 000	250				

Tabla 2.12

Razonamiento

10 Califica cada enunciado como verdadero (V) o falso (F).

a. El 25% de un número equivale a un cuarto de este.

b. El 30% de 900 es igual que el 60% de 450.

c. El 20% de 640 es 1 280.

d. El 50% de cualquier número equivale a su mitad.

e. El 44% de 1 000 es 44.

11 Completa.

a. $25\% + 75\% = \square$ $\quad 0,25 + 0,75 = \square$

b. $5\% + \square = 100\%$ $\quad 0,05 + \square = 1$

c. $99\% + \square = 100\%$ $\quad 0,99 + \square = 1$

d. $\square + 2,5\% = 100\%$ $\quad \square + 0,025 = 1$

12 Escribe el número que cumpla las condiciones dadas.

a. Su 20% es 80.

b. Su 80% es 120.

c. Su 30% es 390.

d. Su 50% es 342.

13 Para un concierto de música, se vendió el 60% de la boletería el viernes y el resto se vendió el sábado. Si se vendieron 120 000 boletas en esos dos días, ¿cuántas boletas se vendieron el sábado?

14 El largo reglamentario de una cancha de voleibol es de 18 m (Figura 2.27); el ancho es el 50% del largo, y el ancho de la malla es, aproximadamente, el 5,56% del largo de la cancha. ¿Cuáles son las medidas reglamentarias de una cancha de voleibol?

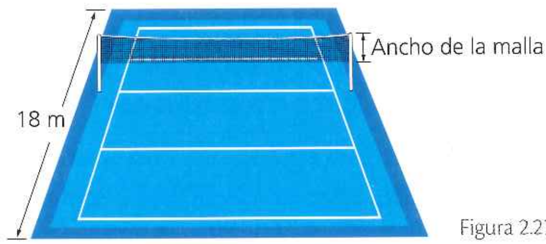


Figura 2.27

15 Un televisor de 50 pulgadas cuesta $ 1 600 000 de contado, pero si se paga con la tarjeta de puntos del almacén recibe un descuento del 20%. ¿Qué costo tiene el televisor pagándolo con la tarjeta de puntos?

16 Ana le prestó $ 300 000 a su hermana con el compromiso de que cuando le pagara le diera, además, una décima parte de intereses. ¿Cuánto dinero tuvo que pagar en total la hermana de Ana?

17 De los 1 400 estudiantes de un colegio, han salido a convivencia 400. ¿Qué porcentaje ha salido a convivencia? ¿A qué fracción corresponde ese porcentaje?

Evaluación del aprendizaje

i Carlos vendió su carro por un precio en el cual perdía un 12% del precio en que lo compró. Si lo vendió a un precio de $ 22 000 000, ¿en cuánto lo había comprado?

ii Para las actividades deportivas, de los 1 200 estudiantes del colegio se inscribieron 294 estudiantes en fútbol, 240 en baloncesto, 135 en voleibol y 68 en tenis de mesa.

a. ¿Cuál es el porcentaje de estudiantes inscritos en cada deporte? Expresa las respuestas como fracciones.

b. ¿Cuál es el porcentaje de estudiantes que se inscribió en total? Expresa la respuesta como fracción.

c. ¿Cuál es el porcentaje de estudiantes que no se inscribió en ningún deporte?

10 Estimaciones

Pensamiento numérico

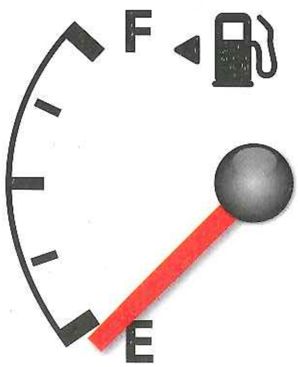
Saberes previos

Martha va al supermercado y compra un champú de $ 18 900 y una crema de $ 26 200. Ella no sabe el valor exacto de lo que pagará pero hace cálculos mentales y saca un billete de $ 50 000 para pagar. ¿Qué cálculos crees que hizo Martha?

Analiza

Mauricio se dirige a la ciudad de Cali en automóvil.

Él sabe que el vehículo consume 8,6 L de gasolina por cada 100 km de recorrido. Si se quedó sin gasolina y se encuentra a 420 km de Cali, ¿le alcanzarán $75 000 para terminar el recorrido, dado que un litro de gasolina cuesta $ 1980?



Conoce

Para saber si el dinero que tiene es suficiente, Mauricio puede hacer una estimación del costo del combustible.

Para ello, puede hacer este razonamiento:

En 100 km, el automóvil consume 8,6 L, es decir, **aproximadamente** 9 L de combustible. Ahora debe recorrer 420 km, o sea, **casi** 4 veces esta distancia, así que consumirá alrededor de:

$$4 \cdot 9 \text{ L} = 36 \text{ L de combustible}$$

Si aproxima el costo de un litro, esto es, $ 1980, a $ 2 000, puede estimar que el costo de 36 L de combustible será, **más o menos**, de:

$$36 \cdot \$\,2\,000 = \$\,72\,000$$

Con lo cual, Mauricio puede concluir que sí le alcanzan los $ 75 000 para comprar el combustible que le permitirá completar el recorrido.

Si al llegar a su destino, Mauricio debe rendir cuentas de este gasto, las operaciones que le permiten obtener el valor exacto son:

Consumo de combustible por cada kilómetro		Costo de un litro de combustible	Cantidad de kilómetros a recorrer		Valor exacto
$\dfrac{8{,}6\text{ L}}{100\text{ km}}$	$\cdot$	$\dfrac{\$\,1980}{1\text{ L}}$	420 km	$\cdot$	$ 71 517,6

Por lo tanto, el valor exacto del combustible que Mauricio necesitó para hacer el recorrido es de $ 71 517,6.

La **estimación** en cálculos aritméticos consiste en la posibilidad de realizar aproximaciones a resultados, sin necesidad de hallar una respuesta exacta. Cuando en las operaciones se estima se puede redondear a la decena, centena o unidad de mil más cercana.

Ejemplo 1

Marcela quiere comprar un pantalón cuyo costo original es de $ 96 000. Si al entrar al almacén se da cuenta de que tiene un descuento de 24%, ¿de cuanto dinero debe disponer aproximadamente para hacer la compra?

Para averiguarlo, Marcela puede hacer el siguiente cálculo mentalmente:

$$\$\,100\,000 \cdot 0{,}8 = \$\,80\,000$$

Esto significa que el pantalón tendrá un valor estimado de $ 80 000.

En este caso, el valor exacto es:

$$\$\,96\,000 \cdot 0{,}76 = \$\,72\,960$$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Estima el resultado de las siguientes operaciones.

a. 146 + 527 + 372

b. 55 + 77 + 82

c. 468 − 220

d. 6,365 − 2,732

2 Aproxima cada número según se muestra y estima los resultados.

	Decena de mil más cercana	Unidad de mil más cercana
71 235 + 52 348 →	70 000 + 50 000	71 000 + 52 000
	↓ 120 000	↓ 123 000

a. 65 146 + 25 270

b. 105 425 + 234 774

c. 746 890 − 544 220

d. 896 365 − 732 200

3 Resuelve los siguientes ejercicios, estimando los resultados como en el ejemplo.

61,3 · 40

61,3 → 60

60 · 40

24 · 100

↓

2 400

a. 51,4 · 7

b. 4,41 · 8

c. 30,9 · 5

d. 23,5 · 13

Razonamiento

4 Daniel y su padre fueron a la ferretería a comprar tuercas y tornillos para hacer una estantería. ¿Cuántos tornillos más que tuercas han comprado aproximadamente?

Resolución de problemas

5 Catalina va al supermercado a comprar algunas cosas que le faltaban en su casa. Observa los precios y responde.

3 yogurt	$2 720	1 pan mantequilla	$2 480
1 kg de azúcar:	$5 200	1 litro de leche	$2 620
2 bolsas de pan:	$2 190		

a. Catalina estima que tendrá que pagar aproximadamente $ 13 000. ¿Crees que Catalina está en lo correcto? ¿Por qué?

b. ¿Cuánto estimas tú que va a ser el total de la cuenta? ¿Cómo estimaste el resultado?

6 Manuel debe recorrer 78,5 km en 5 horas. Si cada hora avanza el mismo número de kilómetros, ¿aproximadamente, cuántos km recorrerá cada hora?

7 A una sala de cine asistieron un total de 874 espectadores, de viernes a domingo. Si cada día asistió el mismo número de personas, ¿cuántas personas estimas que asistieron cada día?

8 Un tren recorre 119 km cada hora. ¿Cuántos kilómetros recorre aproximadamente en 8 horas?

Evaluación del aprendizaje

✓ En una fábrica embotelladora de jugos, una máquina llena 875 045 botellas en una semana, trabajando de lunes a viernes. Cada día llena la misma cantidad de botellas. ¿Cuántas botellas, aproximadamente, llena la máquina en tres semanas de lunes a viernes?

Educación ambiental

La ballena jorobada por lo general tiene una cría cada tres años y su expectativa de vida es de 50 años. Si su vida reproductiva inicia a los cinco años, ¿cuántas crías podría tener una ballena a lo largo de su vida?, ¿por qué crees que este animal se encuentra en amenaza de extinción?

11 Posiciones relativas y números relativos

Saberes previos

¿Has escuchado expresiones como "3 °C bajo 0", "500 años antes de Cristo", "70 m sobre el nivel del mar"? ¿Qué significado tienen para ti?

Analiza

Ana María sale de su casa y camina 200 m hacia la panadería. Luego, sale su hermano del mismo sitio y camina 100 m hacia la videotienda.

- ¿Puede decirse con exactitud qué distancia separa a los hermanos una vez cada uno llegue a su destino?

Conoce

Para saber qué distancia separa a los dos hermanos, es necesario conocer en qué sentido caminó cada uno con respecto a su casa.

Si caminaron en el mismo sentido, se encuentran a 100 m uno del otro; pero, si sus sentidos de desplazamiento fueron opuestos, están a 300 m.

En cualquier caso, el punto de referencia es la casa donde habitan Ana María y su hermano.

La ubicación de un **punto de referencia** con respecto a otro determina su **posición relativa**. Para determinar una posición relativa, se establecen dos **sentidos opuestos** con respecto al punto de referencia.

Los sentidos opuestos con respecto a un punto de referencia pueden ser: izquierda-derecha, arriba-abajo, detrás-delante, antes-después, entre otros.

Ejemplo 1

Observa la Figura 2.28.

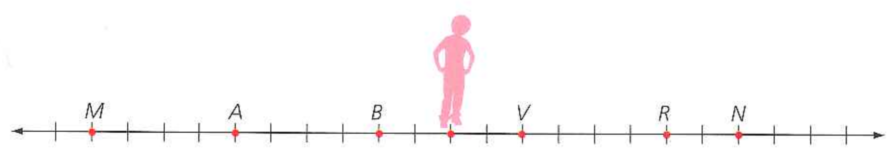


Figura 2.28

Si se considera la ubicación del niño como el punto de referencia, los puntos *M*, *A* y *B* están a su izquierda, en tanto que *V*, *R* y *N* están a su derecha.

Un **número relativo** es aquel precedido por un signo + o −, que indica una cantidad con relación a un **punto de referencia** que determina dos **sentidos opuestos**.

Ejemplo 2

En la Figura 2.29 se tomó como punto de referencia la ubicación del agujero. Este se marca como 0.

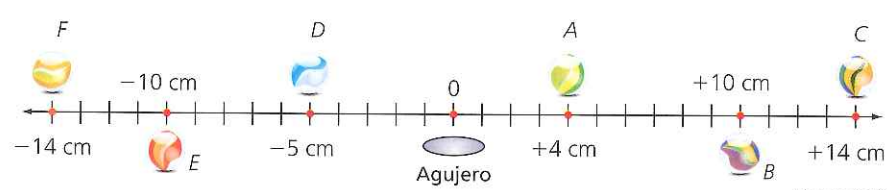


Figura 2.29

Las canicas *A*, *B* y *C* se encuentran a la derecha del punto de referencia y su posición se indica con números precedidos por el signo +. Las canicas *D*, *E* y *F* se encuentran a la izquierda del hoyo para indicar que están en sentido opuesto de las primeras; su posición se indica con números precedidos por el signo −.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Determina si cada uno de los siguientes hechos sucedió antes o después de la llegada del hombre a la Luna.

a. Invención del teléfono celular

b. Descubrimiento de América

c. Revolución francesa

d. Campeonato mundial de fútbol Brasil 2014

e. Muerte de Nelson Mandela

f. Muerte de John F. Kennedy

g. Invención del computador portátil

Comunicación

2 Lee y soluciona.

En un torneo de fútbol se estima que un equipo puede pasar a la ronda siguiente cuando completa 25 puntos. Utiliza números relativos para indicar la situación de cada equipo con respecto a la cantidad de puntos necesarios para seguir en la competencia (Tabla 2.13).

Equipo	Puntos
Florida	24
Alameda	19
Rosario	25
Corceles	22
Alianza	23

Tabla 2.13

Razonamiento

3 Lee, responde y justifica en cada caso.

Anita nació en el año 2000. Sus padres se casaron en 1995 y tuvieron su primer hijo, Daniel, en 1998. El bautizo de Anita fue en el 2008 y cursó quinto grado en 2011.

a. ¿Cuál es el punto de referencia en esta situación?

b. ¿Cuál es el número relativo asociado a los sucesos alrededor del punto de referencia?

Resolución de problemas

4 En un peaje se ubica una báscula que mide el peso de los camiones que transitan por una vía. Debido a las condiciones de la carretera, en los siguientes kilómetros solo pueden transitar camiones cuyo peso no supere los 3 500 kg. En la fila para el pesaje se encuentran varios camiones, cuyos pesos se muestran en la Tabla 2.14.

Camión	Peso (kg)
A	2 850
B	3 547
C	4 560
D	4 685
E	3 687
F	3 500

Tabla 2.14

a. Utiliza números relativos para indicar cuántos kilogramos está por encima o por debajo el peso de cada vehículo con respecto al peso permitido.

b. Elabora una tabla para mostrar cuánto debe disminuir el peso de cada uno de los camiones que exceden el límite permitido.

Evaluación del aprendizaje

Lee y resuelve.

Pablo llegó a Bogotá en el año 2004, salió del colegio en el 2005 y de la universidad en el 2010; terminó la primaria en 1999, hizo la primera comunión en el 2002 y se fue al exterior en el 2011.

Indica el punto de referencia en esta situación y los números relativos asociados a los sucesos alrededor del punto de referencia.

Estilos de vida saludable

El índice de masa corporal (IMC) indica el peso ideal de acuerdo a la estatura, en una persona saludable puede ser de 20 y en una persona con anorexia de 15. Utiliza un número relativo para indicar qué tan lejos está el IMC de una persona con anorexia del IMC de una persona saludable.

12 Números enteros

Saberes previos

Supón que escuchas que el pronóstico del tiempo durante la próxima semana en la Antártica es que la temperatura mínima será de 8 °C bajo cero y la máxima de 4 °C bajo cero. ¿Qué tipo de prendas de vestir crees que usan los habitantes de esta zona? ¿Por qué?

Analiza

Considera el nivel del mar como punto de referencia.

- ¿Qué números relativos utilizarías para describir la posición de un helicóptero de rescate que se encuentra 200 m por encima del mar y del barco hundido que está 500 m por debajo del nivel del mar?

Conoce

Al considerar el nivel del mar como punto de referencia, se pueden usar números positivos para indicar posiciones por encima de este y negativos para las que están por debajo. Así, se podría usar el número $+200$ m para indicar la posición del helicóptero y -500 m para la ubicación del barco hundido.

El **conjunto de los números enteros** ($\mathbb{Z}$) comprende los números enteros positivos ($\mathbb{Z}^+$), los enteros negativos ($\mathbb{Z}^-$) y el 0; es decir:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$$

El conjunto de los números enteros se representa por:

$$\mathbb{Z} = \{...-5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5...\}$$

El 0 es el único **número entero** que no tiene signo: no es **positivo** ni **negativo**.

Los números **enteros positivos** y el 0 también se conocen como **números naturales**. Usualmente, cuando se hace referencia a un **número entero positivo** no se escribe el signo $+$.

Ejemplo 1

Como $+1$, $+2$, $+5$ y $+10$ son números enteros y coinciden con números naturales, se pueden escribir así: $+1 = 1$, $+2 = 2$, $+5 = 5$ y $+10 = 10$.

12.1 Números enteros y temperaturas

Si la temperatura es de 15 °C, se puede deducir que se está disfrutando de una temperatura agradable.

Sin embargo, cuando se hace referencia a una temperatura, es conveniente añadir un signo positivo ($+$) antes del 15 (en este caso) para indicar que la temperatura es de 15 °C sobre cero, o un signo negativo ($-$) si la temperatura es de 15 °C bajo cero.

Ejemplo 2

En la Tabla 2.15 se indican las temperaturas que se han registrado en algunas ciudades del mundo. De acuerdo con la información, se puede deducir que:

a. La ciudad en la que hizo más frío fue Praga.

b. La diferencia en temperaturas entre la ciudad más fría y la más cálida fue de 18 °C.

Ciudad	°C
Praga	-8
Ámsterdam	-4
Fráncfort	0
Madrid	$+7$
Sevilla	$+10$

Tabla 2.15

12.2 Números enteros en la economía

Si se lleva un registro de los ingresos y de los gastos, los ingresos se registran en positivo y los gastos en negativo.

En economía se utilizan los números negativos para contabilizar deudas.

Ejemplo 3

Si Mónica debe \$ 150 000, se debe registrar esta cantidad como −\$ 150 000; mientras que si ella gana \$ 300 000, la cantidad se registra como +\$ 300 000.

Las entidades bancarias llaman a los registros positivos **créditos** y a los registros negativos **débitos**.

El crédito y el débito comprenden las dos partes de cada transacción financiera: el aumento de valor y la reducción de valor, respectivamente. Para indicar un aumento se usan números positivos y para una reducción, números negativos.

Ejemplo 4

Juan vende un carro por \$ 20 000 000, de los cuales le pagan \$ 5 000 000 en efectivo y el resto se los pagarán en 20 días. La forma de registro mediante una cuenta T se puede hacer de la siguiente forma.

Paso 1. Se abre la cuenta de Ventas.

Ventas	
	\$20 000 000

Paso 2. Se abre la cuenta de Caja.

Efectivo en Caja	
\$5 000 000	

Paso 3. Se abre la cuenta de Clientes.

Clientes	
\$15 000 000	

El número rojo indica una salida (que podría indicarse con el número entero negativo −20 000 000) y los verdes, muestran entradas (que podrían notarse con los enteros positivos 5 000 000 y 15 000 000).

El comprobante que se elabora para esta transacción es:

No. 002

Fecha 01-Jul-16

Código	Cuenta	Debe	Haber
	EFECTIVO EN CAJA	\$ 5 000 000	
	Caja General		
	CUENTAS POR COBRAR	\$ 15 000 000	
	Clientes		
	VENTAS DE MERCADERÍA		\$ 20 000 000
	SUMAS IGUALES	\$ 20 000 000	\$ 20 000 000

Es importante anotar que para quien compra el carro, el registro de las cuentas T mostrará como positivas las cantidades que para el vendedor son negativas y viceversa, y que el nombre de las cuentas cambiará también.

12.3 Números enteros y altitud

Cuando se quiere hablar de la profundidad de una cueva o de la profundidad del mar, también se escribe un signo negativo delante de la cantidad que indica la medida.

Así, un espeleólogo desciende a los lugares más profundos de la Tierra, mientras un alpinista asciende a los picos más altos. Estas distancias se representan con números enteros.

Ejemplo 5

Si se afirma que un buceador está a 18 m de profundidad, se puede expresar que se encuentra a −18 m. Por su parte, si se dice que un avión vuela a 6 700 m de altura, es que está a +6 700 m.

Ejemplo 6

El punto más alto sobre la superficie terrestre es el Everest, con una altitud de 8 884 m sobre el nivel del mar. De otro lado, la fosa de las Marianas, en el océano Pacífico, es el lugar más profundo de la corteza terrestre, y se halla a 11 000 m de profundidad.

Si se considera como punto de referencia el nivel del mar, estos dos extremos se indicarían con los números relativos +8 884 m y −11 000 m, respectivamente.

Ejemplo 7

Un submarino que navega a 200 m de profundidad es monitoreado por un barco sobre la superficie. Se puede decir que el submarino se encuentra a −200 m con respecto a la posición del barco.

Ejemplo 8

Observa el significado de los números enteros en las siguientes expresiones.

a. La temperatura de hoy es de 23 °C.

El número 23 °C indica que la temperatura es de 23 °C sobre cero.

b. Algunos peces nadan a −37 m de profundidad.

El número −37 m indica que el pez nada a 37 m bajo el nivel del mar.

c. Un escalador se encuentra a +875 m.

El número +875 m expresa que el escalador se encuentra 875 m sobre el nivel del mar.

d. El carro quedó estacionado en el piso −3.

El número −3 indica que el carro quedó estacionado en el tercer sótano.

e. El saldo de la cuenta es cero.

El cero indica que en la cuenta no hay dinero.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Averigua el año en el que ocurrió cada evento y usa un número relativo para indicarlo. Considera como referencia el año 0.

a. Nacimiento de Pitágoras

b. Batalla de Boyacá

c. Caída del Imperio romano

d. Nacimiento de Cristo

e. Invención de la escritura

2 Expresa cada dato con un número entero.

a. Un buzo se encuentra a 30 m.

b. Andrés retiró de su cuenta $ 200 000.

c. La temperatura descendió hasta 8 °C bajo cero.

d. Me consignaron en la cuenta $ 200 000.

e. La temperatura normal del cuerpo es de 37 °C.

f. La temperatura de ebullición del agua a nivel del mar es de 100 °C.

Modelación

3 Observa la Tabla 2.16, en la que se muestran los movimientos bancarios en pesos de una cuenta. Escribe una frase para cada movimiento que incluya números enteros.

Fecha	Débito	Crédito
15 - 03	20 000	
22 - 03		50 000
30 - 03	14 000	
12 - 04		90 000
28 - 04	45 000	

Tabla 2.16

Razonamiento

4 Observa la Figura 2.30 y describe con un número entero la posición de cada persona con respecto al nivel del mar.

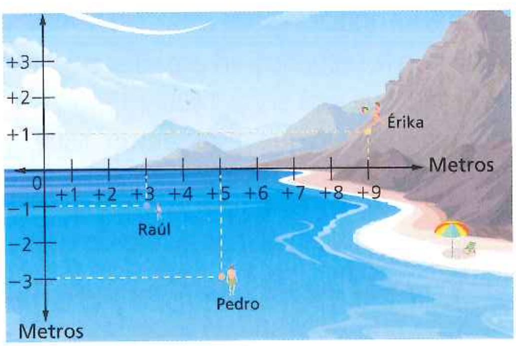


Figura 2.30

5 Califica cada afirmación como verdadera (V) o falsa (F).

a. El conjunto de los números naturales está contenido en el de los enteros.

b. Cero es un número entero negativo.

c. El conjunto de los números enteros positivos es igual al de los naturales.

d. El conjunto de los números enteros es la unión del conjunto de los números positivos y el de los enteros negativos.

Resolución de problemas

6 Un helicóptero que vuela a una altura de 1 500 m sobre el nivel del mar, deja caer un objeto que se sumerge 8 m.

a. ¿Qué número entero representa el nivel del mar?

b. ¿Qué distancia separa el helicóptero del objeto una vez se sumerge?

c. Si el fondo del mar en el punto donde el helicóptero lanza el objeto tiene una profundidad de 25 m, ¿qué distancia hay entre el objeto y el punto más bajo de ese lugar?

Evaluación del aprendizaje

✓ Observa la Figura 2.31, en la que se muestra la relación entre las escalas de medición de temperatura en grados centígrados (Celsius) y Fahrenheit.

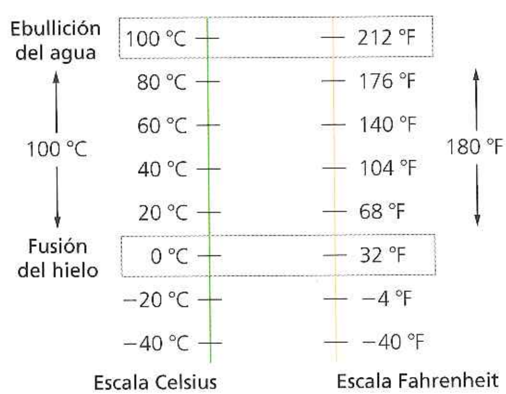


Figura 2.31

a. ¿En qué temperatura las dos escalas coinciden?

b. Si en cierta región del desierto la temperatura varió de 20 °C a 40 °C, ¿cuál es la variación en la escala de grados Fahrenheit?

13 Números enteros en la recta numérica

Saberes previos

¿Hay más números enteros entre -5 y 5 o entre 5 y 10? Explica y haz una representación gráfica que apoye tu respuesta.

Analiza

Las líneas del tiempo se utilizan para representar algunas fechas históricas importantes.

- ¿Qué punto de la línea del tiempo se le asigna al nacimiento de Cristo?

Conoce

En una línea del tiempo como la de la Figura 2.32, el nacimiento de Cristo corresponde al año 0. Los años de los hechos ocurridos antes de ese evento se pueden notar con enteros negativos, en tanto que aquellos que indican acontecimientos posteriores pueden indicarse con enteros positivos.

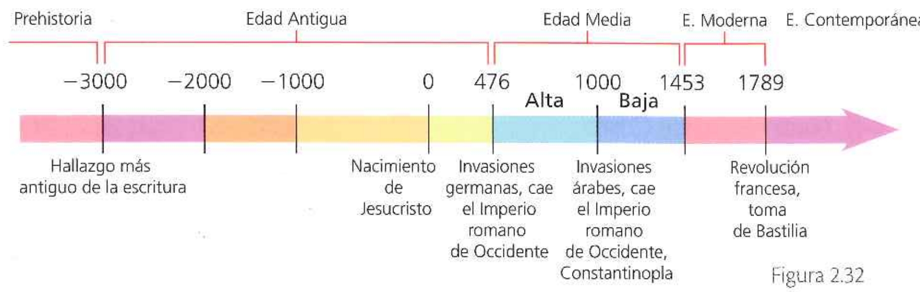


Figura 2.32

Los números enteros se pueden representar sobre una **recta numérica** en la que, los puntos situados de manera uniforme a la **derecha** del cero representan los **enteros positivos** y los situados a su **izquierda** corresponden a los **enteros negativos**.

Para construir una recta numérica en la que se puedan representar los números enteros, se sigue este procedimiento.

1. Se dibuja una recta y se señala el origen O, que es el valor cero (0).
2. Se divide la recta en segmentos iguales a la derecha e izquierda del cero.
3. A la derecha del origen se escriben los números enteros positivos.
4. A la izquierda del origen se escriben los números enteros negativos.

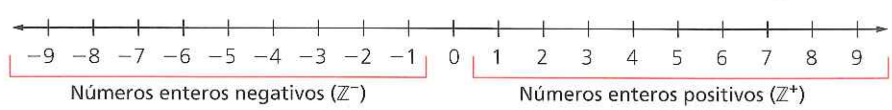


Figura 2.33

Ejemplo 1

Para representar la ubicación aproximada de los números 1 480 y 1 820 en la recta numérica, se siguen los pasos que se muestran a continuación.

- Se elige un tramo de la recta entre 1 400 y 1 900.
- Se marcan separaciones de 100 en 100.
- Se separa la recta de acuerdo con la secuencia en espacios iguales.
- Se ubica el primer número, 1 480, que está entre 1 400 y 1 500.
- Se ubica el segundo número, 1 820, que está entre 1 800 y 1 900 (Figura 2.34).

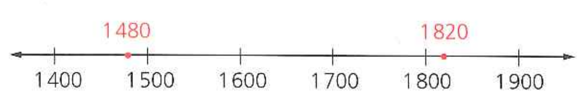


Figura 2.34

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Marca en la recta numérica con puntos lo que se indica.

a. Los números enteros mayores que 7 pero menores que 13.

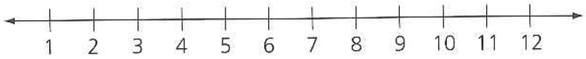


Figura 2.35

b. Los números enteros comprendidos entre -5 y 1.

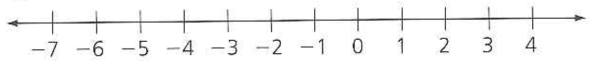


Figura 2.36

c. Los números enteros comprendidos entre -11 y -3.

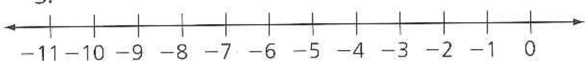


Figura 2.37

2 Escribe los números enteros que faltan en cada recta numérica de las figuras 2.38 a 2.40.

a.

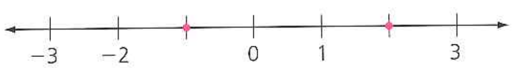


Figura 2.38

b.

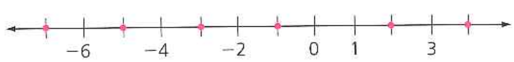


Figura 2.39

c.

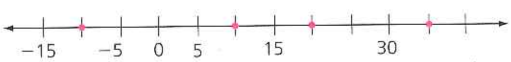


Figura 2.40

Ejercitación

3 Observa la Figura 2.41 y responde.

¿Qué números representan las letras en esta recta?

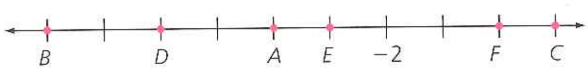


Figura 2.41

Razonamiento

4 Lee y resuelve.

a. ¿Qué números enteros se encuentran a cinco unidades de distancia del número 2?

b. ¿Cuántos números enteros hay entre -2 y 2? Represéntalos en una recta numérica.

c. ¿Cuántos números enteros hay entre -7 y -2? Represéntalos en una recta numérica.

Resolución de problemas

5 Usa la Figura 2.42 para resolver esta situación.

Una ciudad amanece con una temperatura de -4 °C y al llegar al mediodía aumenta 6 °C. ¿Cuál es la temperatura de la ciudad al mediodía?

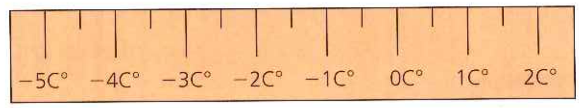


Figura 2.42

6 Averigua en cuántos grados descendió la temperatura de una ciudad si a las 9 p. m. esta era de -1 °C y a las 2 a. m. era de -5 °C.

7 ¿Qué debe ocurrir para que una temperatura de -5 °C llegue a -10 °C?

8 Usa la Figura 2.42 para hallar la temperatura de una ciudad a las 2 p. m. sabiendo que a las 12 de la noche era de -2 °C y que cada dos horas hubo un aumento de 2 °C.

Evaluación del aprendizaje

Escribe un artículo en el que menciones los antecedentes históricos de nuestros medios de comunicación actuales. Usa la información del esquema de la Figura 2.43.

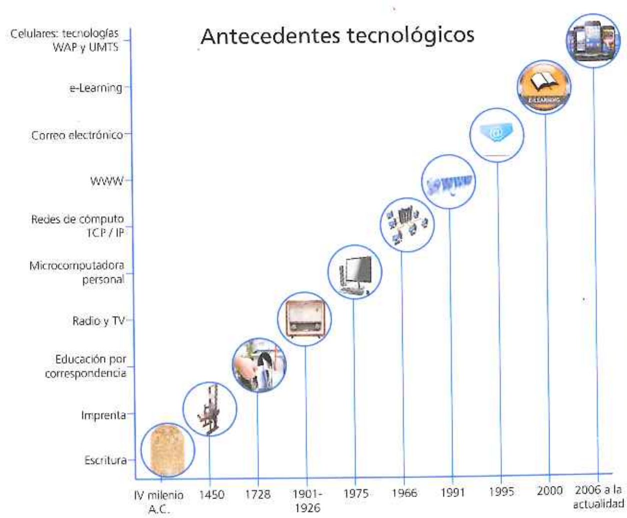


Figura 2.43

¿Es correcta la construcción de la línea de tiempo del esquema? Explica tu respuesta.

14 Valor absoluto de un número entero

Saberes previos

Representa los siguientes números en una recta numérica.

- -10
- 8
- 3
- -4

Analiza

Camilo dice a su compañero que la distancia del punto 7 al 0 es mayor que la distancia del punto -7 al 0.

- ¿Tiene Camilo la razón?

Conoce

La distancia entre -7 y 0 es igual a la distancia entre 0 y 7. Esto se puede confirmar mediante la recta numérica de la Figura 2.44.

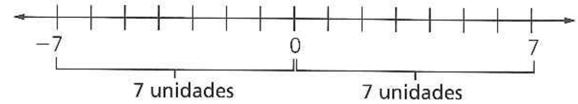


Figura 2.44

Por lo anterior, Camilo no tiene la razón.

El **valor absoluto** de un número entero a se define como la distancia entre a y 0. Se simboliza con el número entre dos barras $|a|$, y es siempre una cantidad positiva.

Ejemplo 1

Teniendo en cuenta la ubicación del cero en la recta de la Figrua 2.45, las letras A, B y C representan los números enteros -5, -2 y 3, respectivamente.

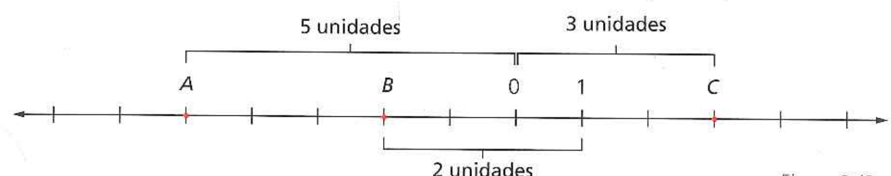


Figura 2.45

A partir de esta representación, se puede concluir que:

$|A| = |-5| = 5$ $|B| = |-2| = 2$ $|C| = |3| = 3$

Ejemplo 2

En la recta numérica de la Figura 2.46 se representan las posiciones de unas pelotas de golf con respecto al agujero.

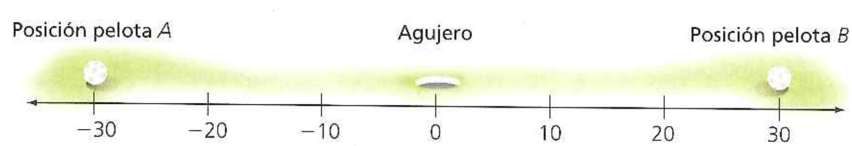


Figura 2.46

Los números $+30$ y -30, se encuentran a la misma distancia de 0, es decir, tienen el mismo valor absoluto.

Ejemplo 3

Para determinar cuál de los números -8, y $+3$ tiene mayor valor absoluto, estos se pueden representar usando la misma recta numérica (Figura 2.47).

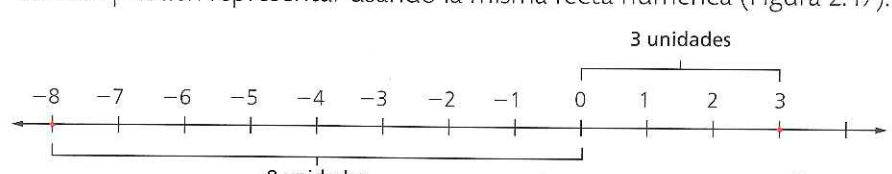


Figura 2.47

Según lo anterior, $|-8| > |+3|$ porque $8 > 3$.

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Calcula estos valores.

a. $|-9|$ b. $|+5|$ c. $|-3|$
d. $|+7|$ e. $|0|$ f. $|-8|$
g. $|-1|$ h. $|15|$ i. $|9|$
j. $|-15|$ k. $|-6|+|5|$ l. $|-8|+|-7|$
m. $|0|$ n. $|17|$ ñ. $|-8|+|-9|$
o. $|4|-|3|$ p. $|8|-|7|$ q. $|-7|+|-11|$

Razonamiento

2 Halla la distancia entre cada par de puntos sobre la recta numérica.

a. 1 y 6 b. -1 y 6 c. -1 y -6 d. 1 y -6

3 Lee y responde.

a. El valor absoluto de un número es 12. ¿Qué número puede ser? ¿Qué número es, si se sabe que está a la izquierda del 0?

b. El valor absoluto de un número es igual a 8 y se representa en la recta numérica entre -7 y -9. ¿Cuál es el número?

4 Representa en una recta todos los números enteros cuyo valor absoluto sea mayor que 2 y menor que 7.

5 Halla mentalmente todos los enteros cuyo valor absoluto sea menor que cada uno de los siguientes números.

a. 2 b. 7 c. 5 d. 12

6 Anota seis números enteros cuyo valor absoluto sea mayor que cada uno de los números que se proponen.

a. 2 b. 5 c. 7 d. 12

Comunicación

7 Escribe una conclusión, a partir de los resultados del ejercicio 2, y verifícala con cinco ejemplos. Muestra tus conclusiones con la ayuda de una recta numérica.

Razonamiento

8 Lee y resuelve.

La distancia entre dos números enteros es de 11 unidades. ¿Cuáles pueden ser esos números? Explica tu respuesta.

9 Califica cada proposición como verdadera (V) o falsa (F).

a. El valor absoluto siempre es un número positivo.

b. La distancia entre a y b se puede hallar mediante el valor absoluto $|b-a|$.

c. Si $|a|=0$, entonces $a=0$.

d. Si $|a|<|b|$, entonces a está a la izquierda de b.

10 Encuentra todos los valores enteros para los que se cumpla cada igualdad. Explica en caso de que no se cumpla.

a. $|x|=5$ b. $|x|<5$
c. $|x|=0$ d. $|x|<4$
e. $|x|<10$ f. $|x|=-2$

Resolución de problemas

11 En un juego de "La escalera", Leonor queda, después del primer turno, cuatro escalones arriba de la salida; en el segundo turno queda dos escalones arriba de la salida, y en el tercero, cinco escalones por debajo. Representa con números enteros los desplazamientos que realizó Leonor en cada turno.

Evaluación del aprendizaje

i Escribe con la notación de valor absoluto la distancia entre cada par de puntos del mismo color de la Figura 2.48.

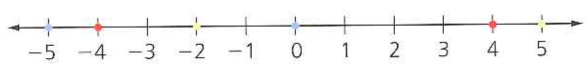


Figura 2.48

Ubica sobre la recta anterior dos puntos cuya distancia sea de 7 unidades. ¿Es única la respuesta? Explica.

ii Escribe los números que deben ir en los cuadrados para que la gráfica de la Figura 2.49 sea correcta.

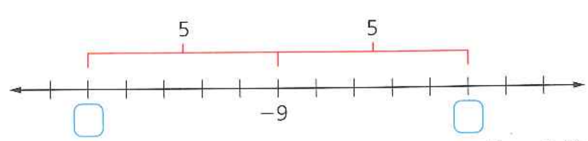


Figura 2.49

Practica más

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Operaciones con fracciones

Ejercitación

1 Resuelve las operaciones y simplifica cada fracción resultante en cada caso.

a. $\frac{3}{2} + \frac{6}{4}$

b. $\frac{16}{3} - \frac{4}{7}$

c. $\frac{12}{5} \cdot \frac{1}{8}$

d. $\frac{5}{9} \div \frac{2}{4}$

e. $\sqrt{\frac{25}{144}} + \sqrt{\frac{9}{16}}$

f. $\left(\frac{1}{4}\right)^3 \div \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$

g. $\sqrt[2]{\frac{16}{25} \cdot \frac{4}{9}} \cdot \sqrt[2]{\frac{1}{4} \cdot \frac{16}{81}}$

h. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} \div \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \sqrt[2]{\frac{49}{64}}$

Resolución de problemas

2 La familia de Rocío gasta $\frac{1}{4}$ de sus ingresos mensuales en el pago de los servicios públicos y $\frac{1}{8}$ en alimentación. ¿Qué parte de los ingresos le queda disponible a la familia de Rocío para otros gastos?

3 Juan plantó árboles frutales en su finca. Del total de árboles que plantó, $\frac{3}{5}$ eran cerezos, $\frac{1}{3}$ eran manzanos y $\frac{1}{15}$ eran perales. Si entre cerezos y manzanos Juan sembró 140 árboles, ¿cuántos perales sembró?

Números decimales

Ejercitación

4 Redondea la cantidad al valor indicado.

a. 3,56 a la décima más cercana.

b. 45,079 a la centésima más cercana.

c. 0,4596 a la milésima más cercana.

d. 12,81262 a la diezmilésima más cercana.

5 Efectúa cada operación.

a. 123,7 · 12

b. 652,42 ÷ 2

c. 31,2 · 3 ÷ 5,1

d. 80,12 ÷ 4 · 1,2

e. (1 ÷ 4) · (2 ÷ 5)

f. (32,8 · 4,1) ÷ (10,2 · 1,1)

Resolución de problemas

6 Carolina dice que el número 125,1548 aproximado a las centésimas es 125,15. Ana dice que la aproximación es 125,16. ¿Quién tiene la razón?

Números enteros

Comunicación

7 Escribe falso (F) o verdadero (V), según corresponda.

a. −3 es un número natural ( )

b. 5 pertenece a $\mathbb{Z}^+$ ( )

c. 0 es un número entero positivo ( )

d. Los números naturales son subconjunto de los números enteros ( )

e. 2 es un número natural y entero ( )

Resolución de problemas

8 La agencia internacional de cambio climático registró la temperatura de cinco lugares considerados los más fríos del mundo: Siberia −71 °C, Yukon (Canadá) −63 °C, los montes Fuji y Argus (en la Antártida) −93 °C, mar Báltico −10 °C y Mongolia −40 °C.

Representa las anteriores temperaturas en un termómetro. ¿Cuál es el lugar más frío de la Tierra?

Comparación de números decimales

Resolución de problemas

9 En una competencia automovilística participaron cuatro corredores: el corredor A obtuvo un tiempo de 45,0216 s; el corredor B 45,1090 s; el corredor C 46,0215 s, y el corredor D 45,0209 s.

a. Menciona el orden de llegada a la meta.

b. ¿Quién ganó la competencia?

c. ¿Quién obtuvo el peor registro?

10 En la Tabla 2.17 se registran los saltos de una competidora en cinco oportunidades en una competencia de salto largo.

Salto	1	2	3	4	5
Medida (m)	15,712	15,701	14,987	15,8	15,10

Tabla 2.17

a. ¿Cuál fue su mejor registro?

b. ¿Cuál fue su peor registro?

c. Si el récord mundial se encuentra en 15,79 m, ¿la atleta logró superar este récord?

Resolución de **problemas**

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Estrategia: Descomponer el problema en partes

Problema

En la Tabla 2.18 se muestran las temperaturas mínima y máxima dadas en dos ciudades durante el mes de abril.

Ciudad	Temperatura mínima	Temperatura máxima
A	−8 °C	4 °C
B	−3 °C	7 °C

Tabla 2.18

¿En cuál de las dos ciudades se presentó la mayor variación de temperatura?

1. Comprende el problema

- ¿Qué datos proporciona el problema?

  R: Las temperaturas máxima y mínima presentadas en dos ciudades durante el mes de abril.

- ¿Qué debes determinar?

  R: La ciudad en la que se presentó la mayor variación de temperatura.

2. Crea un plan

- Determina los problemas más sencillos que se deben resolver, sin perder de vista la solución global.

3. Ejecuta el plan

- Calcula la variación de la temperatura en la ciudad A.

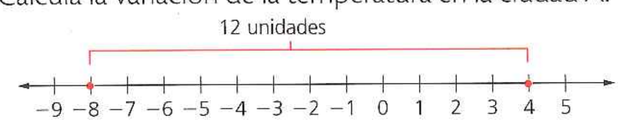


Figura 2.50

- Halla la variación de la temperatura en la ciudad B.

Figura 2.51

- Compara las dos variaciones.

$$12\ °C > 10\ °C$$

R: La ciudad que presentó la mayor variación de temperatura fue la ciudad A.

4. Comprueba la respuesta

- Halla la diferencia entre las variaciones de las temperaturas y verifica que la variación en una de las ciudades fue 2 °C mayor que la presentada en la otra.

Aplica la estrategia

1. Pitágoras, filósofo y matemático griego, nació en el año 570 a. C. y murió en el año 495 a. C. Hipatia de Alejandría, filósofa, astrónoma y matemática romana, nació en el año 370 d. C. y murió en el 415 d. ¿Cuál de los dos personajes vivió más tiempo?

   a. Comprende el problema

   ....

   ....

   b. Crea un plan

   ....

   ....

   c. Ejecuta el plan

   ....

   ....

   d. Comprueba la respuesta

   ....

   ....

Resuelve otros problemas

2. Calcula cuántos años antes de la fecha de la llegada del hombre a la Luna terminó la Segunda Guerra Mundial y cuántos años después explotó el transbordador espacial Challenger.

3. En cierta nevera la temperatura desciende 5 °C cada 15 minutos. Si la temperatura inicial es de 15 °C, ¿en cuánto tiempo alcanzará los −35 °C?

Formula problemas

4. Con la información de la Tabla 2.19 inventa un problema y resuélvelo.

Consignación	Retiro
$ 342 000	
	$ 154 000
$ 221 000	
	$ 824 000
$ 50 000	

Tabla 2.19

Enriquece tu vocabulario

- Construye una oración con estas palabras:

distancia	valor
absoluto	entero

Evaluación del aprendizaje

Operaciones con fracciones

Ejercitación

1 Resuelve las siguientes operaciones. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $5 + \frac{1}{5}$ b. $8 - \frac{6}{7}$

c. $4\frac{4}{5} - 3\frac{1}{6}$ d. $2\frac{3}{5} + 5\frac{2}{3}$

e. $\frac{8}{3} \cdot \frac{32}{8}$ f. $\frac{2}{27} \cdot 3$

g. $\frac{3}{10} \div \frac{5}{8}$ g. $\frac{6}{4} \div \frac{1}{7}$

2 Encuentra en cada caso el valor que hace verdadera la igualdad. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

a. $\frac{5}{3} + \frac{8}{3} + \frac{\square}{3} = 5$ b. $\frac{9}{5} + \frac{7}{5} + \frac{\square}{5} = 5$

c. $\frac{11}{4} + \frac{\square}{4} + \frac{13}{4} = 7$ d. $\frac{\square}{7} + \frac{25}{7} + \frac{9}{7} = 7$

3 Efectúa primero las multiplicaciones y divisiones. Posteriormente, adiciona los resultados. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

a. $\frac{3}{2} \div \frac{16}{6} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

b. $\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{4} + \frac{3}{5} \div \frac{1}{6} = \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

Comunicación

4 Escribe la operación que muestre la fracción total coloreada de cada figura y luego, aquella que indique la diferencia de un color y el otro. PREGUNTA ABIERTA

a.

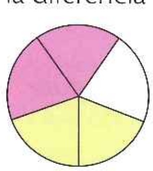


Figura 2.52

b.

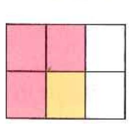


Figura 2.53

c.

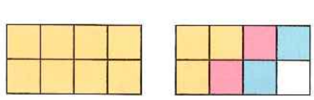


Figura 2.54

d.

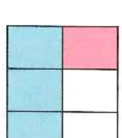


Figura 2.55

Modelación

5 Observa las barras de colores de la Figura 2.56 y contesta cada pregunta. ACTIVIDAD DE REFUERZO

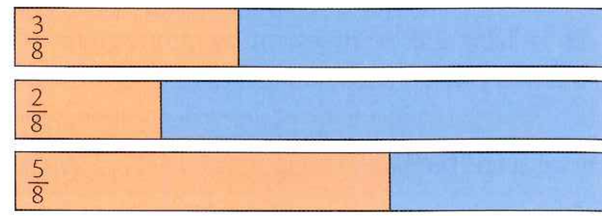


Figura 2.56

a. ¿Cuál es la fracción de color azul en cada franja?

b. ¿Cuál es la diferencia de un color y de otro en cada franja?

Razonamiento

6 Califica cada afirmación como verdadera (V) o falsa (F). VERDADERO/FALSO

a. $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

b. $\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

c. $\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^2 = \frac{1}{4}$

d. $\sqrt{\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{25}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$

Fracciones y números decimales

Resolución de problemas

7 En un colegio se recolectaron ochenta y seis décimas de libras de papel para reciclar durante el mes de enero y cincuenta y cuatro décimas de libras en febrero. Escribe como fracción decimal cada dato. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

8 Las estaturas de Juan Carlos, Manuel, Daniel y Santiago son las siguientes: SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Juan Carlos: 1,68 Manuel: 1,75
Daniel: 1,78 Santiago: 1,69

a. Si ellos hacen una fila y se ordenan del más bajo al más alto, ¿quién se ubica en el último lugar?

b. Si para participar en un equipo de baloncesto se requiere una estatura mínima de 1,72, ¿cuáles de ellos podrían hacer parte de este?

9 Halla la fracción generatriz de cada número decimal. ACTIVIDAD PARA RELACIONAR

a. 1,45 b. 0,45

c. $1,\widehat{45}$ d. $1,\widehat{45}$ e. $0,\widehat{45}$

Comunicación

10 Relaciona cada número de la izquierda con la lectura que le corresponde a la derecha. ACTIVIDAD PARA RELACIONAR

3,07	Cinco y dos décimas
3,7	Treinta y siete
3,007	Cinco y dos centésimas
5,002	Tres y siete décimas
5,2	Tres y siete milésimas
5,02	Tres y siete centésimas
52	Cincuenta y dos
37	Cincuenta y dos décimas
50,2	Cinco y dos milésimas

Razonamiento

11 Determina si la aproximación que se indica en cada caso corresponde a un redondeo o a un truncamiento. SELECCIÓN MÚLTIPLE

a. 63,686 se aproxima a 63,7.
Redondeo Truncamiento

b. 19,8 se aproxima a 20.
Redondeo Truncamiento

c. 134,8743 se aproxima a 134,87.
Redondeo Truncamiento

d. 2014,456 se aproxima a 2014,5.
Redondeo Truncamiento

Resolución de problemas

12 En una campaña de reciclaje se reunieron las siguientes cantidades de periódico: $\frac{21}{2}$ kg el lunes, 13,2 kg el martes, $\frac{79}{5}$ kg el miércoles y 17,8 kg el viernes. ¿Cuántos kilogramos se reunieron en total? ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

Ejercitación

13 Cada rueda de un bicicleta recorre en una sola vuelta $\frac{239}{25}$ cm. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

a. ¿Cuál será la longitud recorrida por la bicicleta en 356,5 vueltas?

b. ¿Dará un número completo de vueltas para recorrer en total 1782,94 cm? Haz una estimación para apoyar tu respuesta.

14 Calcula los siguientes porcentajes. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. 30% de 40 b. 50% de 200

c. 60% de 220 d. 70% de 500

e. 25% de 300 f. 15% de 1 000

Números enteros

Ejercitación

15 Escribe el número entero asociado a cada una de estas situaciones. PREGUNTA ABIERTA

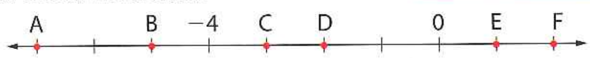
a. La temperatura ambiente es de 5 °C bajo cero.

b. La ciudad está a 650 m sobre el nivel del mar.

c. Julián tiene $ 400 000.

Comunicación

16 Escribe la coordenada de cada punto indicado sobre la recta numérica. ACTIVIDAD DE REFUERZO



A = ☐ B = ☐ C = ☐

D = ☐ E = ☐ F = ☐

Figura 2.57

Razonamiento

17 Analiza la siguiente afirmación.

"La distancia entre un número entero y su opuesto es igual al doble de la distancia del número 0 a alguno de los números enteros". PREGUNTA ABIERTA

Resolución de problemas

18 La latitud de una ciudad es de unos 40° N y la de otra, de unos 58° S.

¿Cuál es, en valor absoluto, la diferencia entre las latitudes de las dos ciudades? PREGUNTA ABIERTA

3 Polígonos, cuerpos geométricos y movimientos en el plano

Ya sabemos

- Clasificar ángulos y triángulos
- Identificar prismas y cuerpos redondos.

Vamos a aprender

- A construir y representar polígonos y poliedros.
- A hacer movimientos en el plano cartesiano.

Nos sirve para

- Solucionar problemas en los que se puede hacer uso de los polígonos.

1 Medición y clasificación de ángulos

Saberes previos

El transportador es un instrumento para medir y construir ángulos. Busca un transportador y descríbelo.

Analiza

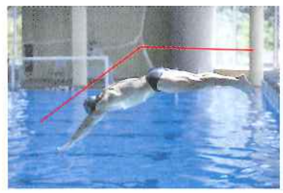
Observa la foto.

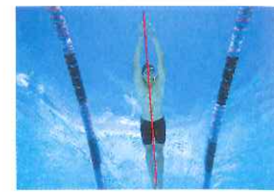
- ¿Qué figura forman las piernas de la gimnasta?

Conoce

La figura que forman las piernas de la deportista es un ángulo.

En muchos deportes aparecen los ángulos. Observa algunos de ellos.





Un **ángulo** es una figura formada por dos rayos no colineales que tienen el mismo origen y los rayos se llaman **lados** del ángulo. Este origen es el **vértice** del ángulo. La unidad de medida de un ángulo es el grado y se simboliza con °. La medida de un ángulo está comprendida entre 0° y 180°.

Ejemplo 1

Los dos rayos de la Figura 3.1 tienen el mismo origen O, y forman el ángulo AOB.

Para nombrarlo, se puede escribir el signo $\measuredangle$ antes del nombre del ángulo ($\measuredangle AOB$). También se puede nombrar mediante una letra griega o un número.

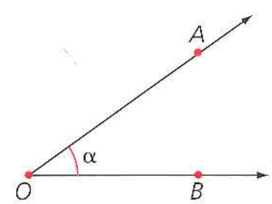


Figura 3.1

1.1 Clasificación de ángulos

La Tabla 3.1 muestra la clasificación de los ángulos según su medida.

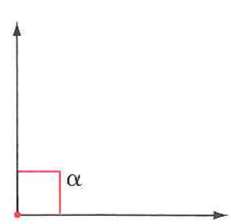
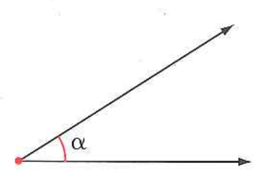
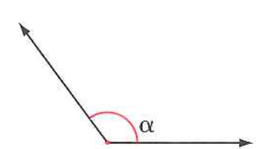
Recto	Agudo	Obtuso
		
Mide 90°	Mide menos de 90°	Mide más de 90° pero menos de 180°

Tabla 3.1

Ejemplo 2

El transportador es un instrumento útil para medir ángulos. Este se utiliza como se muestra en la Figura 3.2.

$$m\,\measuredangle AOB = 123°$$

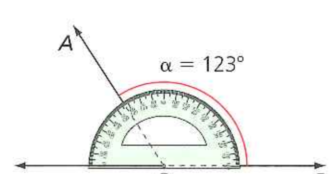


Figura 3.2

1.2 Ángulos complementarios y ángulos suplementarios

Dos ángulos son **complementarios** si la suma de sus medidas es 90°.

Ejemplo 3

Estos son dos pares de ángulos complementarios. En el primer caso, como además del vértice comparten uno de sus lados.

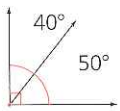


Figura 3.3

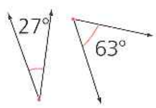


Figura 3.4

$40° + 50° = 90°$ $\quad$ $27° + 63° = 90°$

Dos ángulos son **suplementarios** si la suma de sus medidas es 180°.

Ejemplo 4

Estos dos pares de ángulos son suplementarios. En el primer caso, son consecutivos.

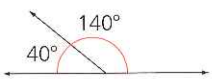


Figura 3.5

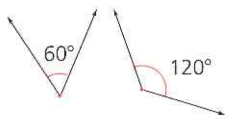


Figura 3.6

$40° + 140° = 180°$ $\quad$ $60° + 120° = 180°$

Dos **ángulos** son **adyacentes** cuando están en el mismo plano, tienen un vértice común, pero no tienen puntos interiores comunes.

Ángulos adyacentes par lineal son aquellos que tienen el vértice y un rayo en común, al tiempo que sus otros dos lados son rayos opuestos. De allí resulta que los ángulos adyacentes par lineal sean a la vez **adyacentes** y **suplementarios**, ya que al sumar sus medidas completan 180° sin poseer ningún punto interior en común.

Ejemplo 5

En la Figura 3.7 se observa , a la izquierda, un par de ángulos adyacentes, el ángulo α y el ángulo β. En la figura de la derecha, los ángulos α y β, aunque tienen el vértice y un lado comunes, no son adyacentes, por tener puntos interiores comunes.

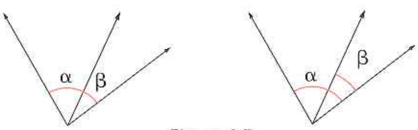


Figura 3.7

Ejemplo 6

Estos ángulos son adyacentes par lineal porque comparten el vértice, un lado y porque $45° + 135° = 180°$.

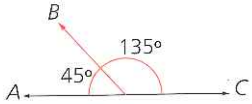


Figura 3.8

1 Medición y clasificación de ángulos

1.3 Ángulos congruentes

Dos ángulos son **congruentes** si tienen la misma medida.

Ejemplo 7

Los ángulos α y β tienen el mismo vértice, y los lados de uno de ellos son rayos opuestos a los del otro (Figura 3.9). Se dice que α y β son **ángulos opuestos por el vértice.**

Si se mide cada uno de ellos, se comprueba que son congruentes.

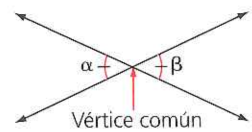


Figura 3.9

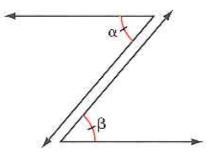


Figura 3.10

Ejemplo 8

Los ángulos α y β de la Figura 3.10 tienen los lados paralelos dos a dos y los dos son ángulos agudos.

Si se miden, se comprueba que son congruentes.

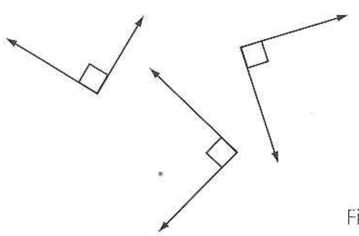


Figura 3.11

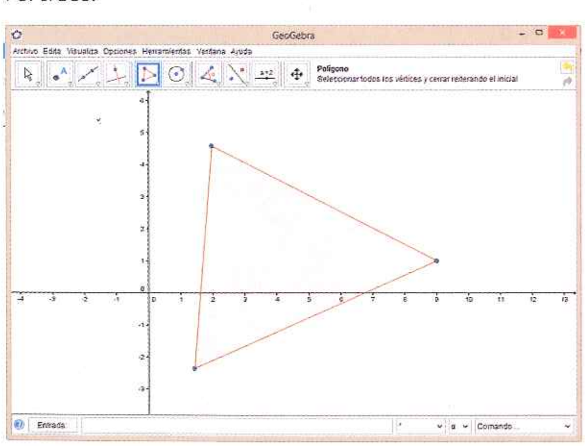
Ejemplo 9

Todos los ángulos rectos como los de la Figura 3.11 son congruentes.

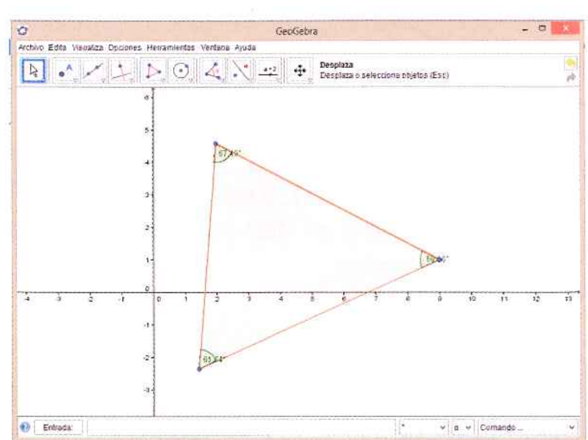
MatemaTICS

Mide los ángulos interiores de un triángulo con GeoGebra

- Abre GeoGebra y utiliza la herramienta , elige *Polígono* y ubica tres puntos que no estén en la misma recta para determinar un triángulo. Cerciórate de cerrar el triángulo haciendo clic sobre el tercer y primer vértices.



- Selecciona el botón y elige *Ángulo*. Para hallar la medida de un ángulo, haz clic sobre un vértice del triángulo, luego en el vértice del ángulo que se quiere medir y, por último, en el tercer vértice.



Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Observa la Figura 3.12 y contesta las preguntas.

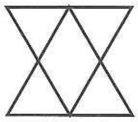


Figura 3.12

a. ¿Cuántos ángulos obtusos internos hay?

b. ¿Cuántos ángulos agudos internos hay?

2 Estima la medida de cada ángulo, nómbralo y clasifícalo. Luego, mídelo y verifica tu estimación.

a.

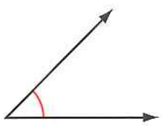


Figura 3.13

b.

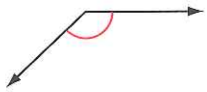


Figura 3.14

c.

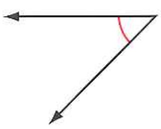


Figura 3.15

d.

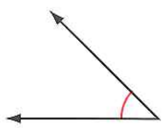


Figura 3.16

Ejercitación

3 Completa la Tabla 3.2 según la información dada.

Medida del ángulo	Medida del ángulo complementario	Medida del ángulo suplementario
64°		
	12°	
89°		
51°		
	36°	

Tabla 3.2

Razonamiento

4 Calcula la medida de los ángulos α, β y δ de la Figura 3.17.

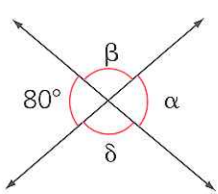


Figura 3.17

5 Calcula el valor de α en las Figuras 3.18 a 3.21.

a.

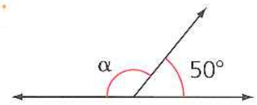


Figura 3.18

b.

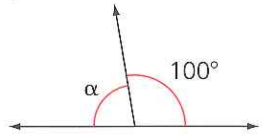


Figura 3.19

c.

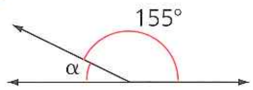


Figura 3.20

d.

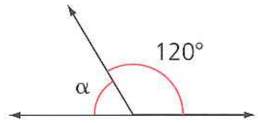


Figura 3.21

Comunicación

6 Analiza y responde. En el reloj análogo de la abuela son las 3:00 p. m. ¿Cuál es la medida del ángulo que describen las manecillas en ese instante?

Evaluación del aprendizaje

i Estima la medida de cada ángulo, nómbralo y clasifícalo. Luego, mídelo y verifica tu estimación.

a.

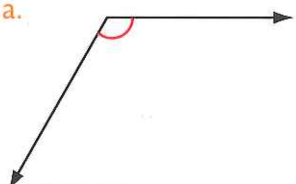


Figura 3.22

b.

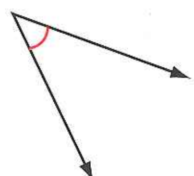


Figura 3.23

ii Rosa hace la siguiente afirmación:

"Si dos rectas paralelas son cortadas simultáneamente por una recta transversal, se forman ocho ángulos".

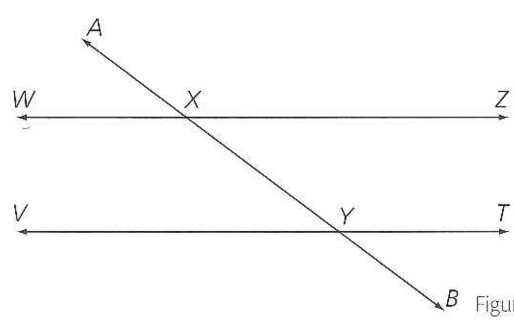


Figura 3.24

a. ¿Identificas parejas de ángulos congruentes en la Figura 3.24? ¿Cuáles? Utiliza el transportador.

b. ¿Encuentras parejas de ángulos congruentes que no son opuestos por el vértice? Explica.

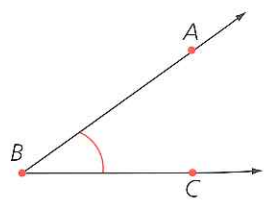
2 Construcción de ángulos y bisectrices

Saberes previos

Construye un ángulo, con regla y transportador, de medida 35°.

Analiza

Observa el ángulo de la Figura 3.25.



- ¿Cómo se puede construir un ángulo congruente con el $\measuredangle ABC$?

Figura 3.25

Conoce

2.1 Construcción de ángulos congruentes

Para construir un ángulo congruente con el $\measuredangle ABC$, se pueden utilizar instrumentos como la regla y el compás y seguir estos pasos.

1. Se traza el $\overrightarrow{B'C'}$, que será uno de los lados del ángulo en construcción (Figura 3.26).

Figura 3.26

2. Con el compás se hace centro en B y se traza un arco que corte los lados $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ y se marcan los puntos M y N (Figura 3.27).

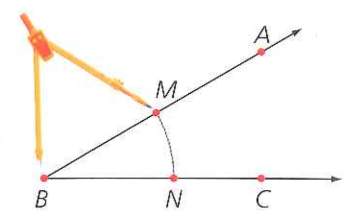


Figura 3.27

3. Con el compás se mide la longitud de $\overline{BN}$. Con esa abertura se hace centro en B' y se traza un arco que corte a $\overrightarrow{B'C'}$ y se marca el punto P (Figura 3.28).

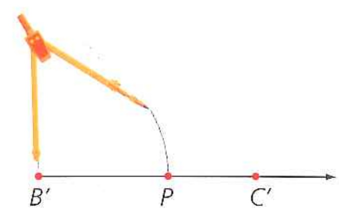


Figura 3.28

4. Nuevamente se usa el compás, esta vez para tomar la longitud del segmento MN (Figura 3.29).

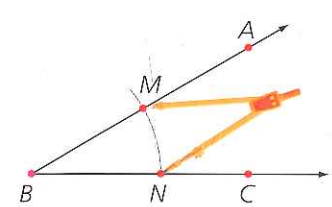


Figura 3.29

5. Con una abertura equivalente a la longitud tomada en el cuarto paso, se hace centro en el punto P y se traza un nuevo arco que corte el obtenido en el paso anterior, que sería el punto Q (Figura 3.30).

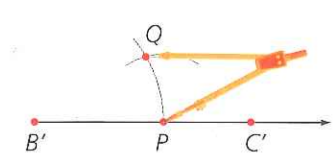


Figura 3.30

6. Se traza el rayo $B'Q$ (Figura 3.31).

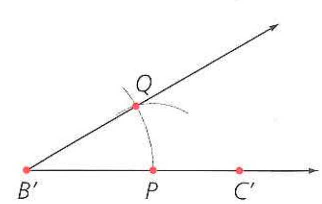


Figura 3.31

El $\measuredangle QB'C'$ es congruente con el $\measuredangle ABC$.

La **construcción de ángulos congruentes con regla y compás** es el trazado de ángulos con la misma medida haciendo uso de estos instrumentos.

2.2 Bisectriz de un ángulo

La **bisectriz de un ángulo** es un rayo con origen en el vértice del ángulo y un punto en el interior del mismo. La bisectriz determina con los lados del ángulo dos ángulos adyacentes congruentes.

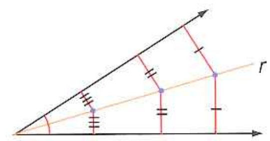


Figura 3.32

Cada punto de la bisectriz de un ángulo se encuentra a la misma distancia de los lados del ángulo, como se observa en la Figura 3.32.

Para construir la bisectriz del ∡*AOB* (Figura 3.33) usando la regla y el compás, se siguen estos pasos.

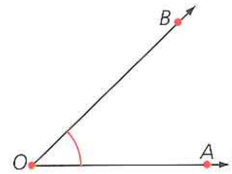


Figura 3.33

1. Con el compás se hace centro en el vértice *O* y se traza un arco de cualquier radio que corte a los lados del ángulo, en estos cortes se marcan los los puntos *P* y *Q* (Figura 3.34).

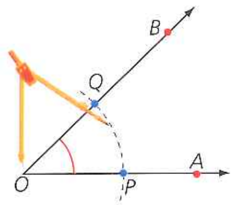


Figura 3.34

2. Luego, con el compás se hacen dos arcos de igual radio con centros en los puntos *P* y *Q* que se cortan en un punto *C* (Figura 3.35).

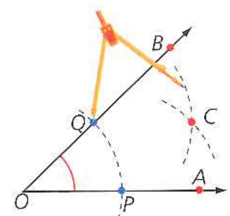


Figura 3.35

3. Con la regla se traza el rayo que une el vértice *O* con el punto *C*, obteniendo así la bisectriz del ángulo (Figura 3.36).

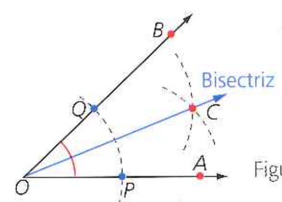


Figura 3.36

Ejemplo 1

Dibuja un ángulo y dobla la hoja haciendo coincidir sus lados. La recta que forma el doblez es la bisectriz del ángulo (Figura 3.37).

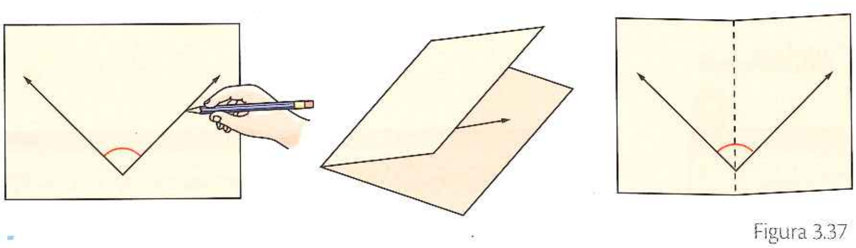


Figura 3.37

Ejemplo 2

Para construir un centro de abastecimiento que equidiste de las tres carreteras que conectan tres ciudades (indicadas con puntos rojos en la Figura 3.38), se construye el triángulo que forman y se halla la bisectriz de cada uno de los ángulos de este. El punto donde se cortan las tres bisectrices está a la misma distancia de cada una de las tres carreteras y, por lo tanto, allí debe construirse el centro de abastecimiento.

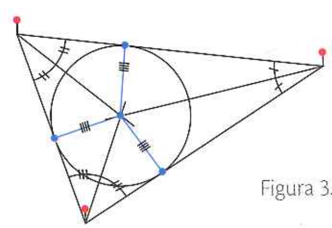


Figura 3.38

2 Construcción de ángulos y bisectrices

Ejemplo 3

Para determinar la ubicación exacta de un altavoz que debe estar a la misma distancia de los asientos situados a los lados de la mesa triangular, se deben trazar las bisectrices de los ángulos determinados por las esquinas de la mesa, como se sugiere en la Figura 3.39.

La ubicación exacta del altavoz corresponde con la intersección de las bisectrices.

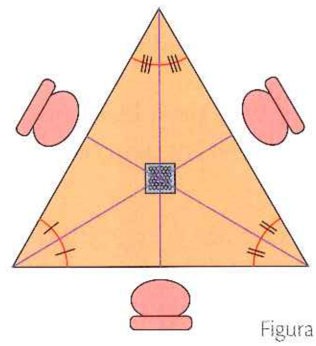


Figura 3.39

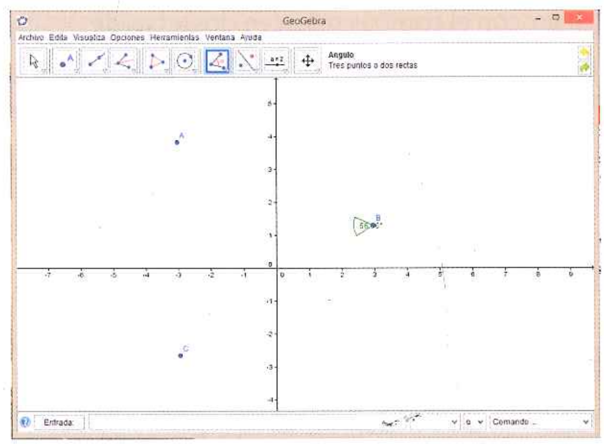
MatemaTICS

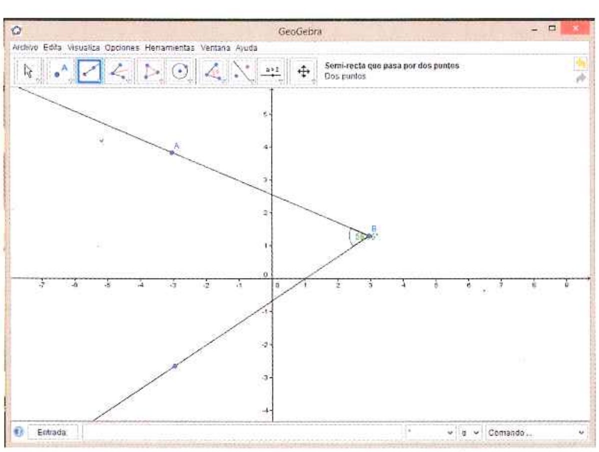
Construye la bisectriz de un ángulo con GeoGebra

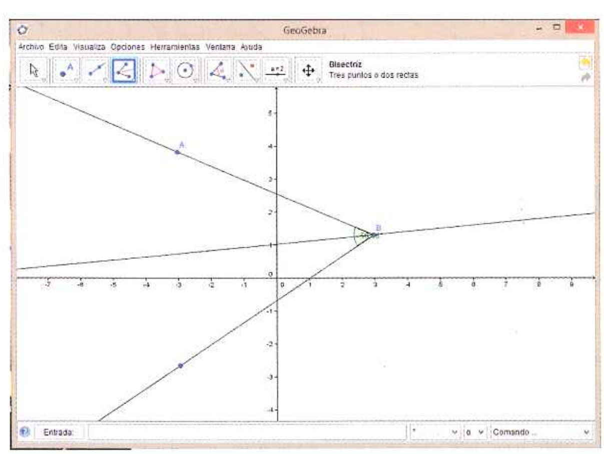
- Abre el programa, haz clic en el icono y, una vez despliegues las opciones que aparecen allí, selecciona *Ángulo*.
- Luego, marca tres puntos (A, B y C). Una vez lo hagas, aparece la medida del ángulo que construiste.
- Para trazar los rayos del ángulo ve al botón y elige *Semirrecta que pasa por dos puntos*.

  Haz clic en B y luego en A para construir el lado del ángulo.

  Después, haz clic en B y luego en C y tendrás el segundo lado.
- Ve al botón y selecciona *Bisectriz*. Haz clic sobre los puntos A, B y C en ese orden; allí aparece la recta que divide al ángulo en dos ángulos congruentes.







Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Dibuja en tu cuaderno cada uno de los siguientes ángulos.

a. 90° b. 60° c. 30° d. 45°

e. 75° f. 105° g. 120° h. 135°

2 Construye en tu cuaderno un ángulo congruente a cada ángulo de la Figura 3.40 y traza su bisectriz utilizando regla y compás.

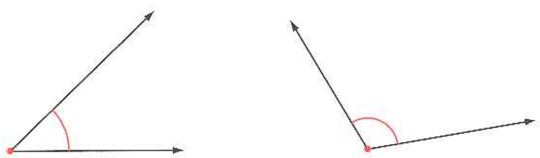


Figura 3.40

Razonamiento

3 Analiza y responde.

a. ¿Cuánto miden los ángulos en los que la bisectriz divide un ángulo de 90°?

b. En un círculo de 10 cm de diámetro se considera un sector circular de 90° y su cuerda correspondiente.

¿Qué relación existe entre la bisectriz del sector y la mediatriz de la cuerda?

4 Traza las bisectrices de los ángulos internos de la Figura 3.41 y describe lo que observas.

Figura 3.41

5 Traza las bisectrices de los ángulos internos de la Figura 3.42 y contesta las preguntas.

Figura 3.42

a. ¿Las bisectrices se cortan en un mismo punto?

b. ¿Pasa lo mismo para las bisectrices de cualquier triángulo?

Comunicación

6 Realiza en tu cuaderno los siguientes pasos:

a. Traza una circunferencia y dos diámetros mutuamente perpendiculares.

b. Traza la bisectriz de cada uno de los ángulos que forman los diámetros perpendiculares.

c. Marca los puntos de intersección de las bisectrices con la circunferencia. Une los puntos.

¿Qué figura obtuviste?

7 Observa el procedimiento para construir un ángulo congruente a un ángulo de 30°.

- Traza un rayo y ubica el 0 del transportador en el origen.

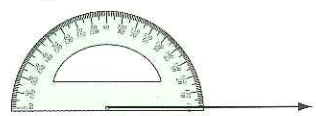


Figura 3.43

- Haz una marca en 30°.

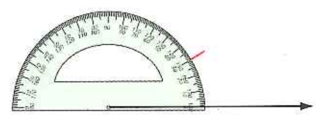


Figura 3.44

- Construye el ángulo.

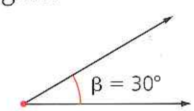


Figura 3.45

Utiliza el transportador para construir ángulos congruentes a cada ángulo dado.

a. 38° b. 85° c. 135° d. 168°

Resolución de problemas

8 Alfredo tiene un terreno en forma de triángulo isósceles para sembrar limones y naranjas. Si él desea sembrar exactamente la mitad del terreno con limones y la otra mitad con naranjas, ¿qué debe hacer y por qué?

Evaluación del aprendizaje

María desea dividir una torta de queso con forma triangular en dos partes exactamente iguales. Si el ángulo de la punta de la torta mide 46°, ¿cuánto miden los ángulos de cada uno de los trozos que obtiene María?

3 Polígonos

Saberes previos

Los indígenas Kunas usan figuras geométricas para diseñar muchos tejidos o molas. ¿Por qué crees que las usen?

Analiza

El Pentágono es la sede del Departamento de Defensa de los Estados Unidos.

- ¿Cuál es la razón de su nombre? ¿Qué ventajas tiene esta construcción?

Conoce

El Departamento de Defensa de los Estados Unidos tiene la forma de una figura de cinco lados. De ahí se deriva su nombre, pues *penta* viene del griego que significa "cinco".

Este edificio se planeó para que fuera el edificio de oficinas más eficiente del mundo. Así, aunque hay 28,16 km de corredores, solo se requiere un máximo de siete minutos para caminar entre dos puntos cualesquiera del edificio.

Un **polígono** es una figura coplanaria compuesta por una secuencia finita de segmentos rectos no colineales que solo se intersecan en los extremos. Estos segmentos se denominan **lados**, y los puntos en que se intersecan se denominan **vértices**.

3.1 Elementos de un polígono

Los elementos de un polígono son:

- **Lado**: cada uno de los segmentos de recta que conforman el polígono.
- **Ángulo interno**: ángulo formado, internamente al polígono, por dos lados consecutivos.
- **Vértice**: intersección de dos lados consecutivos.
- **Diagonal**: segmento que une dos vértices no consecutivos.

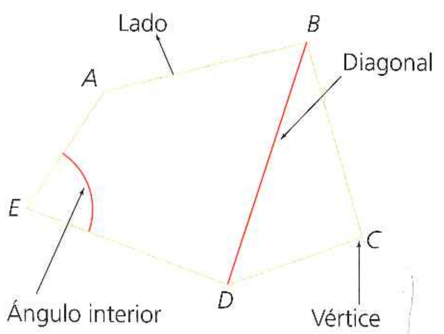


Figura 3.46

En la Figura 3.46 se identifican los elementos del polígono que, en este caso, se denota por *ABCDE*.

3.2 Clasificación de polígonos

Los polígonos se pueden clasificar según su cantidad de lados. Algunos de ellos se muestran en la Tabla 3.3.

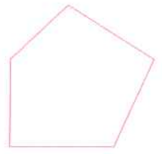
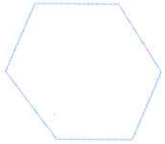
Pentágono	Hexágono	Triángulo	Cuadrilátero
			
5 lados	6 lados	3 lados	4 lados

Tabla 3.3

Los polígonos también se pueden clasificar según sus ángulos en **convexos** (si todos los ángulos interiores son menores que 180°) o **cóncavos** (si alguno de sus ángulos interiores es mayor que 180°).

3.3 Suma de los ángulos interiores de un polígono

La **suma de los ángulos** interiores **de un polígono** de n lados es:

$$180° \cdot (n - 2)$$

Ejemplo 1

En un triángulo cualquiera como el de la Figura 3.47, se marcan sus ángulos interiores, se recortan los ángulos y se colocan de forma consecutiva.

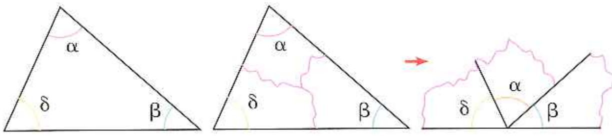


Figura 3.47

Como se puede observar, la suma de las medidas de los ángulos es 180°

Al trazar las diagonales de un polígono desde uno de sus vértices, el número de triángulos en los que queda dividido es dos unidades menor que el número de lados que tiene.

Ejemplo 2

Observa cómo al trazar las diagonales desde uno de los vértices de los distintos polígonos de la Figura 3.48, estos quedan divididos en triángulos.

La suma de la medida de sus ángulos es: 180° · el número de triángulos.

ST_n es la suma de las medidas de los ángulos internos del triángulo T_n.

En el cuadrilátero: $ST_1 + ST_2 = 180° \cdot 2 = 360°$

En el pentágono: $ST_1 + ST_2 + ST_3 = 180° \cdot 3 = 540°$

En el hexágono: $ST_1 + ST_2 + ST_3 + ST_4 = 180° \cdot 4 = 720°$

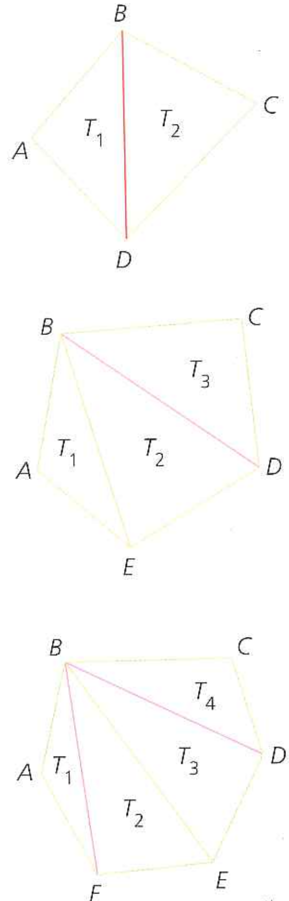


Figura 3.48

Ejemplo 3

En un heptágono (Figura 3.49), la suma de la medida de los ángulos interiores se calcula como $180° \cdot (7 - 2) = 180° \cdot 5 = 900°$.

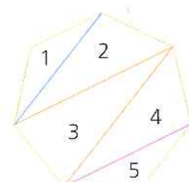


Figura 3.49

Ejemplo 4

Un mosaico es una obra pictórica en la que se usan diversos elementos decorativos. Muchos mosaicos se construyen a partir de polígonos.

En la Figura 3.50 se ha destacado una fracción de un mosaico: un dodecágono y en su interior seis cuadrados, seis triángulos y, justo en el centro, un hexágono.

Observa que el ángulo de cada vértice del dodecágono mide $90° + 60° = 150°$ y, por tanto, la suma de la medida de los ángulos interiores de ese polígono es igual a $12 \cdot 150° = 1800°$.

Ese mismo valor se obtiene utilizando la expresión $180° \cdot (n - 2)$, donde $n = 12$: $180° \cdot (12 - 2) = 180° \cdot 10 = 1\,800°$.

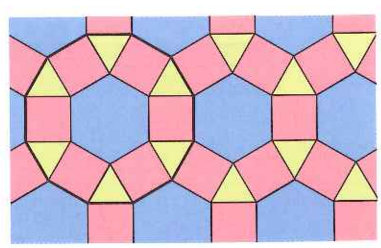


Figura 3.50

3 Polígonos

3.4 Polígonos congruentes

Dos polígonos son congruentes si sus lados y sus ángulos correspondientes son congruentes.

Para comprobar que dos polígonos son congruentes, se coloca uno sobre otro haciendo coincidir al menos un vértice y un lado. Si los demás elementos coinciden, entonces son congruentes.

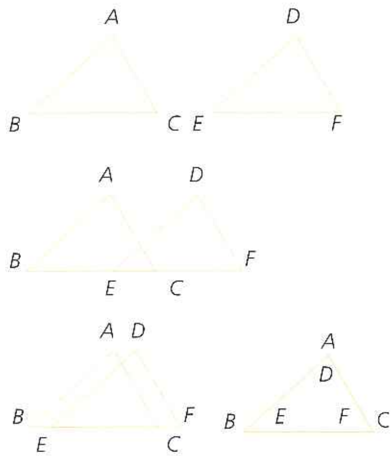


Figura 3.51

Ejemplo 5

Los triángulos *ABC* y *DEF* de la Figura 3.51 son congruentes. Observa la secuencia que muestra cómo el triángulo *DEF* se desplaza hasta superponerse perfectamente al triángulo *ABC*.

Así, el lado *AB* es congruente con el lado *DE*, el lado *AC* es congruente con el lado *DF* y el lado *BC* es congruente con el lado *EF*.

De forma análoga, $\measuredangle BAC$ es congruente con $\measuredangle EDF$, $\measuredangle ACB$ es congruente con $\measuredangle DFE$ y $\measuredangle ABC$ es congruente con $\measuredangle DEF$.

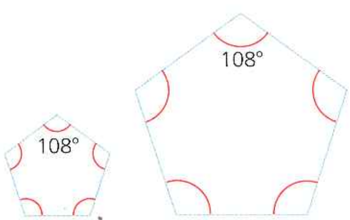


Figura 3.52

Ejemplo 6

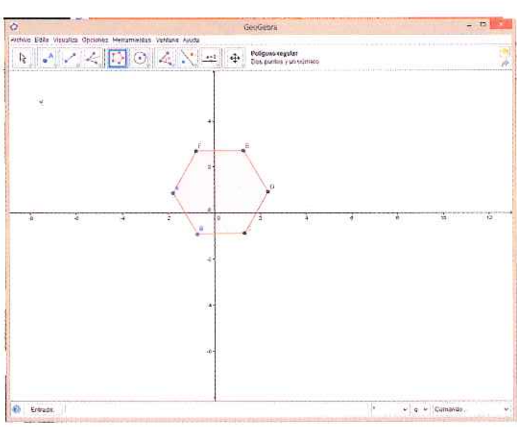
En los pentágonos que aparecen en la Figura 3.52 observamos que a pesar de que los ángulos correspondientes de los dos polígonos tienen la misma medida, no ocurre así con los lados correspondientes; por lo tanto, los dos pentágonos no son congruentes.

No es posible superponer los dos pentágonos.

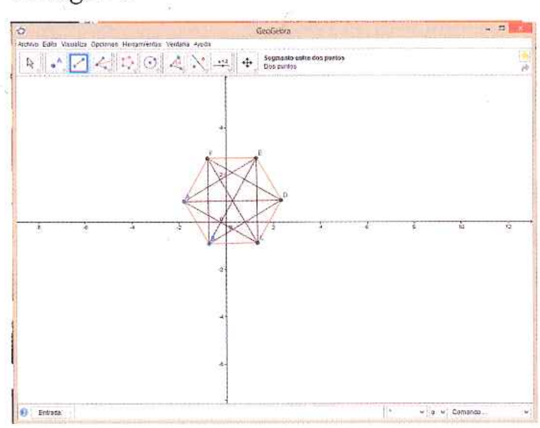
MatemaTICS

Traza polígonos y sus diagonales con GeoGebra

- Ve al botón y elige *Polígono regular*. Una vez allí, marca dos puntos; luego, aparecerá una caja de texto en la que debes escribir el número de vértices que quieres que tenga tu polígono. En este caso se ha elegido 6. Automáticamente aparece un hexágono.



- Ve al botón y selecciona *Segmento entre dos puntos*. Haz clic sobre cada par de puntos no consecutivos para construir todas las diagonales del hexágono.



- Verifica que $D = \dfrac{n \cdot (n-3)}{2}$; siendo n el número de lados, en este caso, $n = 6$.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Clasifica los polígonos de las Figuras 3.53 a 3.56.

a.

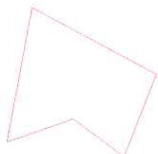


Figura 3.53

b.

Figura 3.54

c.

Figura 3.55

d.

Figura 3.56

2 Completa la Tabla 3.4.

Polígono	Número de lados	Número de diagonales
Heptágono		
Octágono		
Dodecágono		
Pentágono		

Tabla 3.4

3 Calcula la suma de los ángulos interiores de estos polígonos.

a. Trapezoide
b. Dodecágono
c. Octágono regular
d. Eneágono regular

4 Calcula la medida del $\measuredangle BAC$ en cada figura.

a.

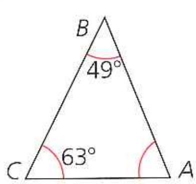


Figura 3.57

b.

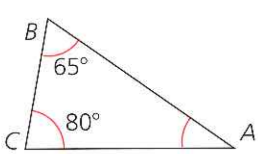


Figura 3.58

Razonamiento

5 Determina cuánto mide el ángulo que falta en el trapecio rectángulo de la Figura 3.59.

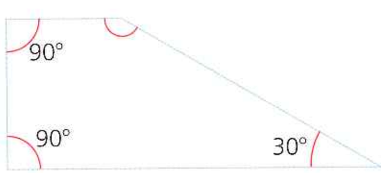


Figura 3.59

Resolución de problemas

6 Para dibujar un terreno con forma triangular, se midieron dos de sus lados y el ángulo comprendido entre ellos. ¿Es suficiente con esas medidas para tener determinado el terreno?

7 Comprueba que la suma de las medidas de los ángulos exteriores de un polígono es igual a 360°.

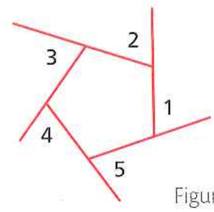


Figura 3.60

Evaluación del aprendizaje

i Clasifica el polígono de la Figura 3.61 y halla la suma de las medidas de sus ángulos interiores. ¿Es posible diseñar un mosaico usando solamente este polígono?

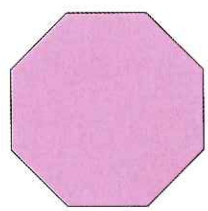


Figura 3.61

ii ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de quince lados? ¿Y uno de 20?

Educación ambiental

La naturaleza exhibe una gran variedad de formas, dibuja sobre la imagen los polígonos que identificas.

4 Polígonos regulares. Construcción

Saberes previos

Utiliza pitillos o palitos de 3 cm, 4 cm, 5 cm y 6 cm de longitud para construir diferentes figuras planas. Luego, determina cantidad de lados, vértices y el nombre de cada una de las figuras formadas.

Analiza

Observa los desarrollos en el plano de la Figura 3.62.

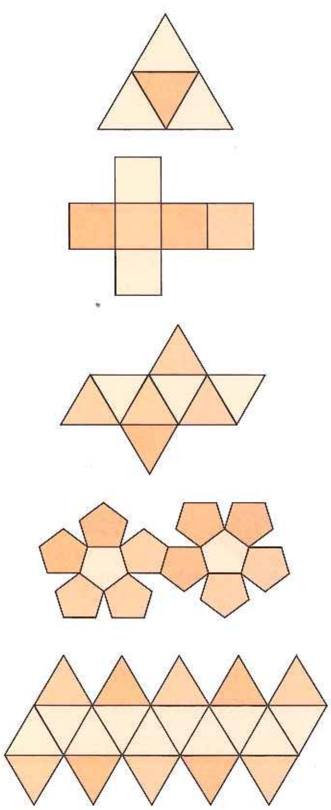


Figura 3.62

- ¿Cuál sólido se construye con cada desarrollo?

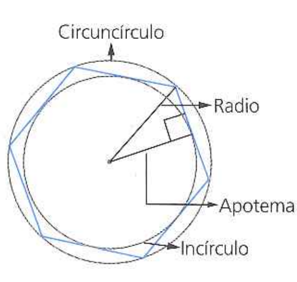


Figura 3.65

Conoce

En la Figura 3.63 se presentan los sólidos que se construyen, respectivamente, con cada desarrollo en el plano.

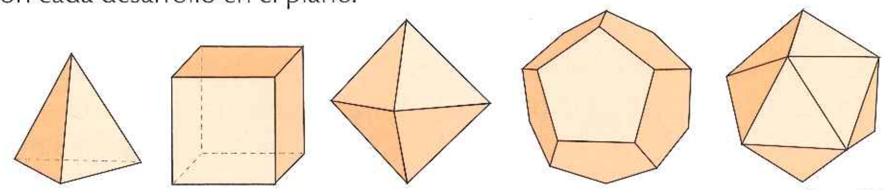


Figura 3.63

Observa que las caras de cada uno de estos sólidos son polígonos congruentes con todos sus lados congruentes y todos sus ángulos de la misma medida.

Un polígono que tiene todos sus lados congruentes y todos sus ángulos también congruentes se denomina **polígono regular**.

4.1 Elementos de un polígono regular

Los elementos que se identifican en un polígono regular son los siguientes.

- **Centro**: punto que equidista de los vértices.
- **Radio**: cualquier segmento que une el centro con un vértice.
- **Apotema**: cualquier segmento que une el centro con el punto medio de un lado.
- **Ángulo central**: cualquier ángulo determinado por dos radios.

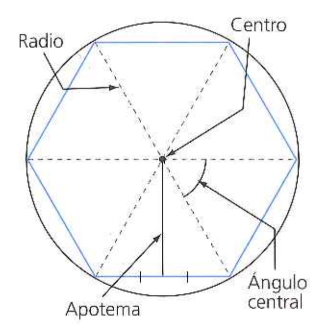


Figura 3.64

A todo polígono regular se le puede dibujar su **circunferencia circunscrita**, cuyo centro coincide con el del polígono y pasa por sus vértices. En este caso, se dice que el polígono está inscrito en la circunferencia.

El polígono de la Figura 3.65 está circunscrito. La circunferencia "interior" se llama inscrita (a veces también "incírculo"), y toca cada lado del polígono en el punto medio. Mientras el radio de la circunferencia circunscrita es el radio del polígono, el radio de la circunferencia inscrita es la apotema del polígono.

Ejemplo 1

En la Figura 3.66 se muestran algunos polígonos regulares. Cada uno de ellos se ha circunscrito.

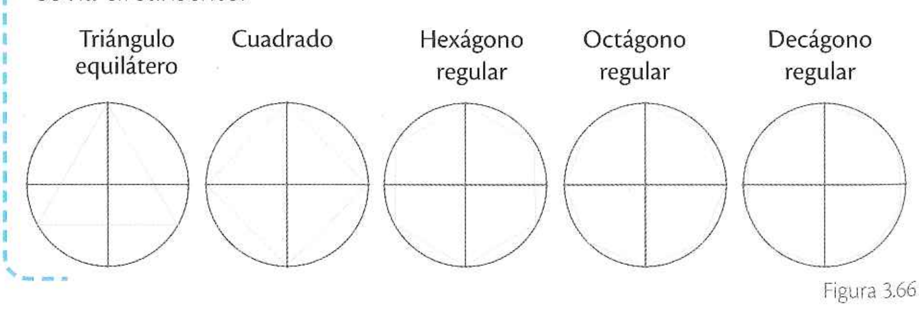


Figura 3.66

4.2 Construcción de polígonos regulares

La construcción de polígonos regulares se puede realizar conociendo el radio de la circunferencia circunscrita o el lado del polígono.

Para **construir polígonos regulares** a partir del radio de la circunferencia circunscrita, se divide esta en el mismo número de partes como lados tenga el polígono y se unen los puntos de división de la circunferencia.

Ejemplo 2

Observa el procedimiento para construir un octágono regular inscrito en una circunferencia de 1,5 cm de radio.

1. Se construye una circunferencia de 1,5 cm de radio.

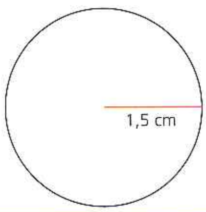


Figura 3.67

2. Se dibujan dos diámetros perpendiculares.

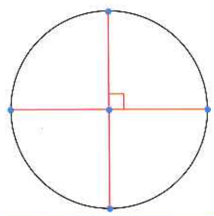


Figura 3.68

3. Se trazan las bisectrices de los ángulos que forman los diámetros.

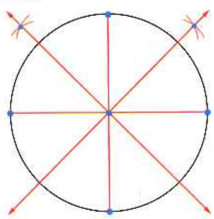


Figura 3.69

4. Se unen los puntos de corte de los diámetros y las bisectrices con la circunferencia.

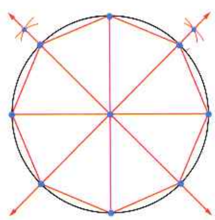


Figura 3.70

El hexágono regular es el único polígono que cumple que la medida de su lado es igual a la medida del radio de la circunferencia circunscrita.

Ejemplo 3

Para construir un hexágono regular de lado $\overline{AB}$, se pueden llevar a cabo los siguientes pasos.

1. Con un radio $\overline{AB}$ se trazan dos circunferencias con centro *A* y *B*. Se toma uno de los puntos de corte, que se llamará *O*. Ese es el centro del hexágono (Figura 3.71).
2. Se traza la circunferencia de centro *O* y de radio $\overline{OA}$. Se obtienen los puntos *D* y *Q* como cortes de las circunferencias anteriores (Figura 3.72).
3. Se construyen rectas perpendiculares al segmento *AB* por *A* y por *B*. Se marcan con *R* y *S* los puntos de corte de las rectas y la circunferencia (Figura 3.73).
4. Uniendo los puntos *A*, *B*, *Q*, *S*, *R*, *D* y *A* se obtiene el hexágono regular buscado (Figura 3.74).

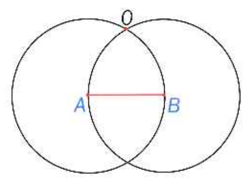


Figura 3.71

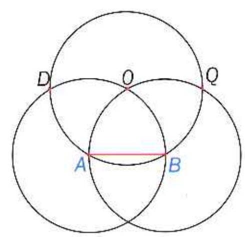


Figura 3.72

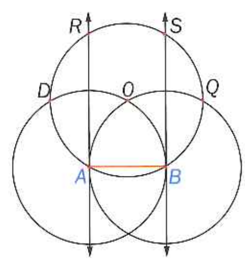


Figura 3.73

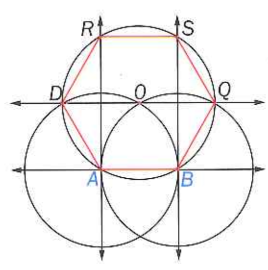


Figura 3.74

4 Polígonos regulares. Construcción

Ejemplo 4

Observa un procedimiento para construir un heptágono regular cuyo lado mida 1,5 cm.

1. Se construye un hexágono regular inscrito en una circunferencia de 1,5 cm de radio.

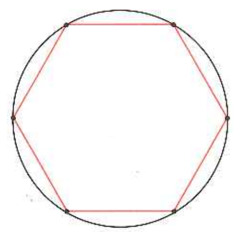


Figura 3.75

2. Se dibuja la mediatriz del lado $\overline{AB}$ y se divide el radio $\overline{OM}$ en seis partes iguales.

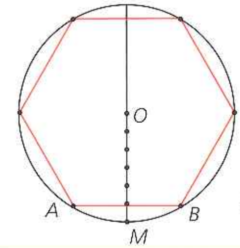


Figura 3.76

3. Se toma la medida de una parte y se traslada sobre la mediatriz siete veces.

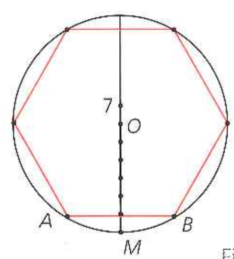


Figura 3.77

4. Se traza la circunferencia cuyo centro es el punto 7, y sobre ella se lleva la medida del lado $\overline{AB}$.

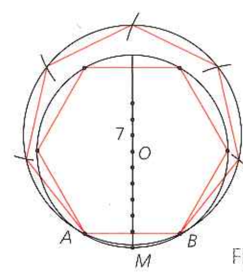
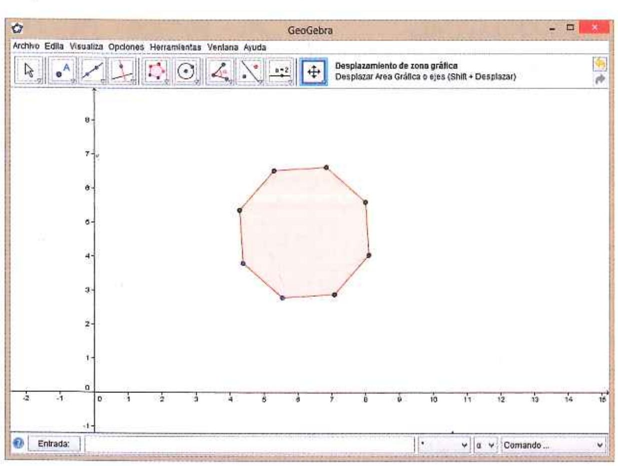


Figura 3.78

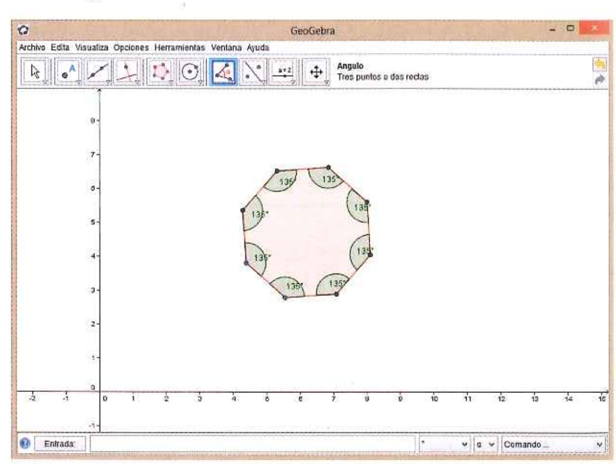
MatemaTICS

Mide los ángulos interiores de un polígono regular

Abre GeoGebra, ve al botón y selecciona *Polígono regular*. Ubica dos puntos no muy lejanos uno de otro. En la caja de texto que aparece indica el número de lados del polígono que quieres construir. Para este caso, se ha construido un octágono.



Selecciona el botón y elige la opción *Ángulo*. Para determinar la medida de cada uno de los ángulos interiores, haz clic en cada terna de vértices consecutivos en el sentido de las manecillas del reloj. Cuando hagas el último de los tres clic, aparece la medida de cada ángulo.



Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Determina cuáles de los polígonos que se presentan a continuación son regulares.

a.

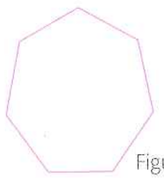


Figura 3.79

b.

Figura 3.80

c.

Figura 3.81

d.

Figura 3.82

Ejercitación

2 Construye los siguientes polígonos regulares a partir de las características enunciadas.

a. Un decágono regular de 80 mm de lado.

b. Un hexágono regular de 6 cm de lado.

c. Un octágono regular de 7 cm de lado.

Razonamiento

3 Responde las preguntas.

a. ¿Cuáles son los polígonos regulares cuyos lados son paralelos dos a dos? Explica.

b. ¿Cuánto mide el lado de un hexágono regular inscrito en una circunferencia de 5 cm de radio?

4 Investiga el procedimiento para encontrar la circunferencia circunscrita de un triángulo equilátero. Luego, construye la circunferencia circunscrita de un triángulo equilátero de 7 cm de lado.

5 La finca de Alfredo tiene un terreno hexagonal regular cuyo lado mide 3 m. Si Alfredo desea dividir el terreno en seis partes iguales, ¿de qué manera puede hacerlo?

Comunicación

6 Construye un octágono regular en una circunferencia circunscrita de 8 cm de diámetro. Une con segmentos los vértices no consecutivos del octágono. La figura que obtienes de este modo, ¿es regular?

7 Julián realiza el siguiente proceso.

- Utilizando el compás, toma la medida del radio de la circunferencia con centro en O (Figura 3.83).
- Sin modificar la abertura del compás y haciendo centro en P, traza un arco que corta la circunferencia. Nombra con Q el punto de corte.
- Repite varias veces el paso anterior, con centro en cada punto de corte, hasta que el último punto marcado coincide con P.
- Une cada par de puntos consecutivos trazando segmentos.

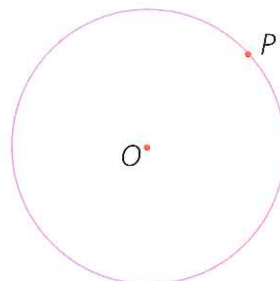


Figura 3.83

¿Cómo se llama la figura obtenida por Julián al trazar los segmentos?

Evaluación del aprendizaje

i Dibuja un octágono regular de 3,5 cm de lado.

a. ¿Cuántos centímetros mide el radio de la circunferencia circunscrita?

b. ¿Cómo construirías un cuadrado a partir del octágono regular?

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

El cuerpo es el territorio de cada persona y sobre él se tiene pleno derecho. Es un deber quererlo, cuidarlo y respetarlo. Construye dos polígonos regulares, en uno escribe cómo cuidas tu cuerpo y en el otro situaciones en las que ejerces derecho sobre él.

5 Construcción de triángulos

Saberes previos

Muchas de las estructuras que sostienen las construcciones son hechas formando triángulos. ¿Por qué crees que sea una figura tan común en la ingeniería?

Analiza

Juan quiere construir un triángulo con tres palillos: uno de 6 cm, otro de 7 cm y otro de 15 cm.

- ¿Es posible que Juan construya ese triángulo?

Conoce

Luego de varios intentos, Juan no pudo construir el triángulo que buscaba, ya que en cualquier triángulo la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera debe ser siempre mayor que la longitud del lado restante.

Al verificar esta propiedad con los palillos, se observa que 6 cm + 7 cm no es mayor que 15 cm.

La **construcción de triángulos equiláteros, isósceles y escalenos** con regla y compás se fundamenta en elementos ya construidos y bien definidos (puntos, segmentos, rectas, ángulos, círculos, etc.).

5.1 Construcción de triángulos equiláteros e isósceles

Ejemplo 1

Para construir un triángulo equilátero con regla y compás, se procede de la siguiente manera.

1. Se dibuja un segmento *AB* y se toma su medida con el compás.

Figura 3.84

2. Sin cambiar la abertura del compás, se traza un arco con centro en *A*.

Figura 3.85

3. Manteniendo la abertura del compás, se traza otro arco con centro en *B*, que corte al anterior.

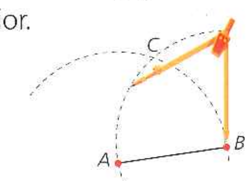


Figura 3.86

4. Se trazan los segmentos *BC* y *CA*. El $\triangle ABC$ es equilátero.

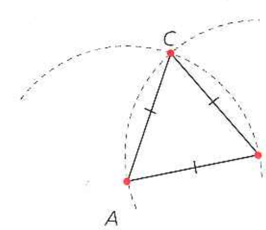


Figura 3.87

Ejemplo 2

A continuación se presentan los pasos para construir un triángulo isósceles con regla y compás.

1. Se traza un segmento *ST* (Figura 3.88).
2. Con una abertura mayor que la longitud de $\overline{ST}$, se traza un arco con centro en *S* (Figura 3.89).
3. Sin cambiar la abertura del compás, se traza un arco con centro en *T* que corte al anterior (Figura 3.90).
4. Se trazan los segmentos *TR* y *RS*. El $\triangle STR$ es isósceles (Figura 3.91).

Figura 3.88

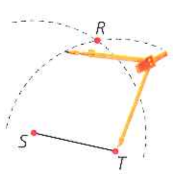


Figura 3.89

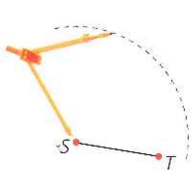


Figura 3.90

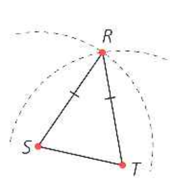


Figura 3.91

5.2 Construcción de triángulos escalenos

Ejemplo 3

La construcción de un triángulo escaleno, con regla y compás, es la que sigue.

1. Se traza un segmento HI.

Figura 3.92

2. Con una abertura del compás diferente a la longitud de $\overline{HI}$, se traza un arco haciendo centro en H.

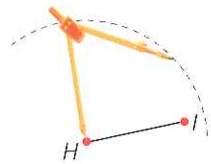


Figura 3.93

3. Se cambia la abertura del compás y se traza otro arco haciendo centro en I, que corte al anterior.

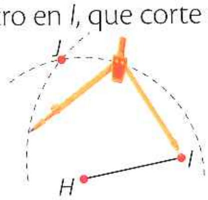


Figura 3.94

4. Se trazan los segmentos IJ y JH. El $\triangle HJI$ es escaleno.

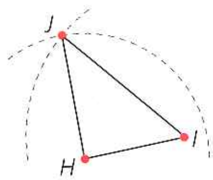


Figura 3.95

También puede trazarse un triángulo escaleno a partir de uno de sus lados y dos ángulos interiores contiguos no congruentes.

Ejemplo 4

Para construir un triángulo escaleno, con regla y transportador, en el que dos de sus ángulos midan 30° y 70° y el lado comprendido entre ellos mida 7 cm, se procede así:

1. Se dibuja un segmento AB de 7 cm.

Figura 3.96

2. Se traza un ángulo de 30° con vértice A y uno de sus lados sobre el $\overline{AB}$.

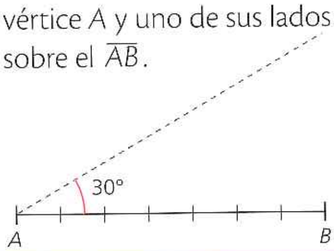


Figura 3.97

3. Se dibuja un ángulo de 70° con vértice B y uno de sus lados sobre el $\overline{AB}$.

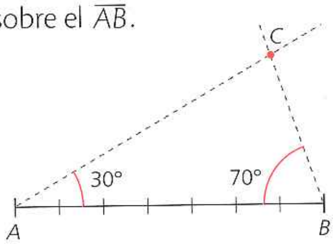


Figura 3.98

4. Se trazan los segmentos correspondientes. El $\triangle ABC$ es escaleno.

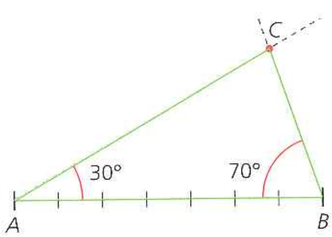


Figura 3.99

5 Construcción de triángulos

Ejemplo 5

A continuación se presentan los pasos para construir el triángulo *ABC* cuyos lados se muestran en la Figura 3.100.

Figura 3.100

1. Se dibuja uno de los tres lados, por ejemplo, $\overline{AB}$.

Figura 3.101

2. Se traza un arco con centro en *A* y con una abertura del compás igual a la longitud del $\overline{AC}$.

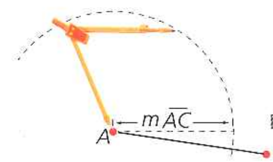


Figura 3.102

3. Se traza otro arco con centro en *B* y con una abertura igual a la longitud del $\overline{BC}$, que corte el arco anterior.

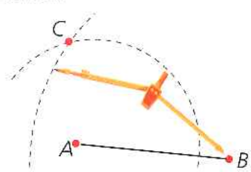


Figura 3.103

4. Se marca el punto *C* y se trazan los otros dos lados del $\triangle ABC$.

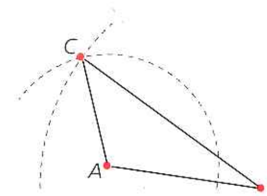
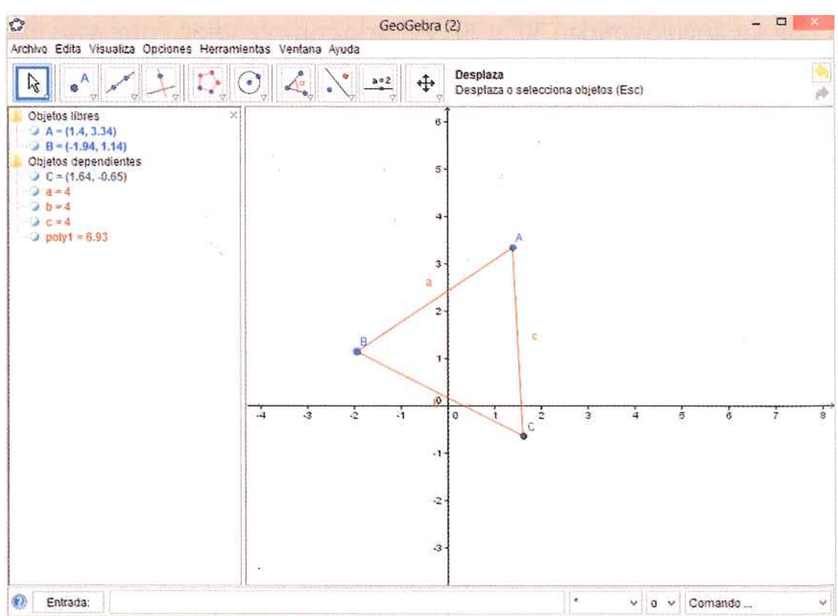


Figura 3.104

MatemaTICS

Construye un triángulo equilátero cuyos lados midan 4 cm con GeoGebra

- Selecciona el botón *Polígono regular* y marca dos puntos en el plano cartesiano.
- Cuando aparezca la caja de diálogo, cambia el número 4 (que aparece por defecto) por 3, que es el número de lados que tiene un triángulo.
- Selecciona *Movimiento*, ubica el cursor en uno de los vértices y arrástralo hasta obtener 4 cm. Al hacerlo, cada uno de los lados del triángulo quedará con esa medida, pues la base de la construcción es un polígono regular.



- Explora con GeoGebra la construcción de triángulos isósceles y escalenos, y construye uno de cada clase.

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Construye con regla y compás los triángulos con las condiciones dadas.

a. Isósceles cuya base mida 4 cm.

b. Equilátero cuyos lados tengan 5 cm.

c. Escaleno con lados de 6 cm, 8 cm y 10 cm.

2 Elabora en tu cuaderno triángulos equiláteros a partir de los segmentos dados.

a. A partir del $\overline{AB}$ que se muestra en la Figura 3.105.

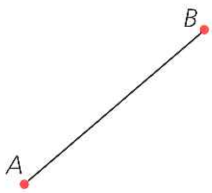


Figura 3.105

b. A partir del $\overline{EF}$ que se muestra en la Figura 3.106.

Figura 3.106

3 Construye la circunferencia circunscrita de un triángulo equilátero de 10 cm de lado.

4 Construye la circunferencia circunscrita de un triángulo equilátero de 6 cm de lado.

Razonamiento

5 Intenta dibujar un triángulo de lados 12 cm, 8 cm y 22 cm. ¿Fue posible hacerlo? Explica.

6 Traza una semicircunferencia de 5 cm e inscribe un triángulo en ella. ¿Qué tipo de triángulo se obtiene? Explica tu respuesta.

Ejercitación

7 Elabora en tu cuaderno el triángulo isósceles XCV, si se sabe que los segmentos XC, XV y CV son los que se muestran en la Figura 3.107.

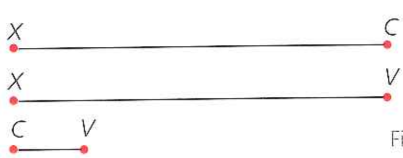


Figura 3.107

8 Dibuja un $\triangle ABC$ con un ángulo que mida 60° y con los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ que se muestran en la Figura 3.108.

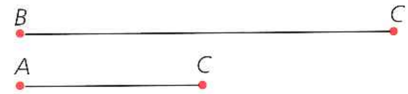


Figura 3.108

9 Construye un triángulo que tenga un ángulo de 50° y que los lados que lo forman midan 4,5 cm y 2,8 cm.

Razonamiento

10 Lee la información y responde.

a. ¿Cuántos triángulos como el de la Figura 3.109 caben en la Figura 3.110? Utiliza la regla y el compás para construir los triángulos en la figura 3.110.

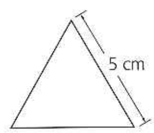


Figura 3.109

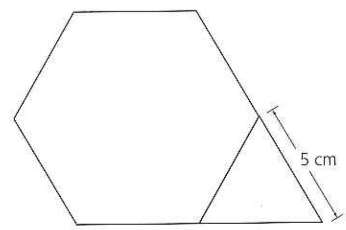


Figura 3.110.

b. Carlos desea saber de qué manera se puede construir un triángulo rectángulo sin utilizar compás. ¿Cómo puede hacerlo?

Resolución de problemas

11 ¿Se puede construir un triángulo con los siguientes palillos? Si es posible construirlo, clasifícalo; si no lo es, explica las razones.

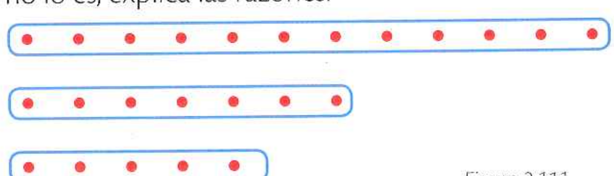


Figura 3.111

Evaluación del aprendizaje

Construye un triángulo HJK con un ángulo que mida 60°, otro que mida 50° y el lado $\overline{HK}$ sea el que se muestra en la Figura 3.112.

Figura 3.112

6 El plano cartesiano

Saberes previos

Dibuja un plano de una ciudad y ubica un sitio en la calle 1 con carrera 2 y otra en la calle 2 con carrera 1. ¿Están esos sitios a la misma distancia de la calle 0 con carrera 0?

Analiza

Lucía invita a Sara a jugar "Encuentra el tesoro". Para ello, cada una tiene un tablero con una cuadrícula numerada como la que se muestra en la Figura 3.113, en la cual ubica el tesoro que la otra debe descubrir.

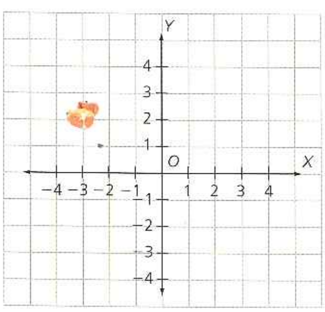


Figura 3.113

- ¿Qué deben tener en cuenta todas las jugadoras para encontrar el tesoro?

Conoce

Para indicar cualquier posición en la cuadrícula, cada jugadora debe sugerir un cierto número de unidades a la derecha o a la izquierda del 0, y un cierto desplazamiento vertical hacia arriba o hacia abajo. En la Figura 3.113, el tesoro A está ubicado 3 unidades a la izquierda del 0 y 2 unidades arriba, lo cual se indica de manera abreviada como $A(-3, 2)$. Los números -3 y 2 son las **coordenadas** de la ubicación del tesoro en el tablero.

Un **sistema de coordenadas cartesianas** está formado por dos rectas perpendiculares y graduadas, una horizontal y otra vertical, denominadas **ejes de coordenadas**, que dividen el plano en **cuatro cuadrantes**.

En la Figura 3.114 se representa un sistema de coordenadas cartesianas.

- El punto de intersección de los ejes es el **origen de coordenadas**.
- El eje horizontal se llama **eje de abscisas** o eje X.
- El eje vertical recibe el nombre de **eje de ordenadas** o eje Y.
- Los puntos del plano se indican dando sus dos coordenadas $P(x, y)$.

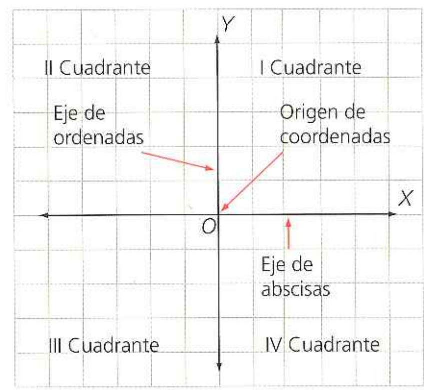


Figura 3.114

Una **pareja ordenada** es una representación numérica que consta de dos números escritos en un orden específico. La notación (x, y) representa la pareja ordenada cuyo primer elemento es x (abscisa) y cuyo segundo elemento es y (ordenada).

La coordenada x indica el desplazamiento sobre el eje horizontal X. Si el valor es positivo, el desplazamiento se realiza hacia la derecha del origen de coordenadas tantas unidades como indique el número; si es negativo, las unidades se contarán hacia la izquierda de dicho punto.

Por su parte, la coordenada y corresponde al desplazamiento sobre el eje Y; hacia arriba si el número es positivo o hacia abajo si es negativo. El punto de referencia es el origen de coordenadas.

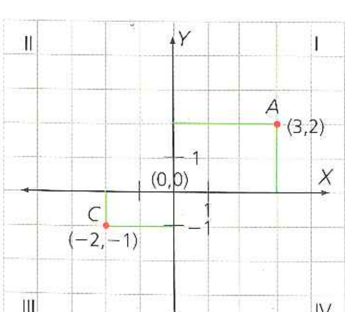


Figura 3.115

Ejemplo 1

En la Figura 3.115 se observa la representación de los puntos $A(3, 2)$ y $C(-2, -1)$.

El punto $A(3, 2)$ está 3 unidades a la derecha y 2 hacia arriba. Como x y y son positivos, el punto A está en el cuadrante I.

El punto $C(-2, -1)$ está 2 unidades a la izquierda de 0 y una unidad hacia abajo. Como x y y son negativos, el punto C está en el cuadrante III.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Ubica en un plano cartesiano los siguientes puntos.

a. $A(0, 2)$ b. $C(-3, 3)$ c. $E(-4, -4)$

d. $B(1, -6)$ e. $D(4, 0)$ f. $F(-5, -4)$

2 Escribe las coordenadas de los puntos representados en el plano de la Figura 3.116.

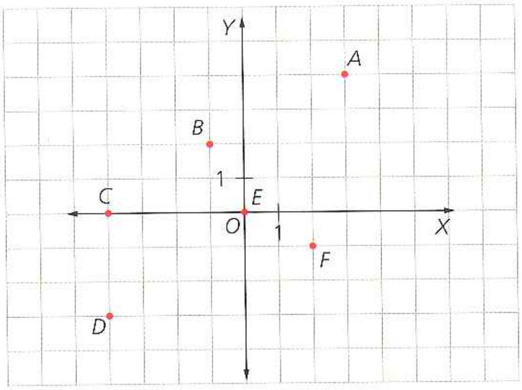


Figura 3.116

Razonamiento

3 Indica en qué cuadrante está cada uno de los siguientes puntos. Si no está en ninguno de ellos, explica la razón.

a. $A(-2, -5)$ b. $B(1, 2)$

c. $C(5, 0)$ d. $D(-6, 8)$

e. $E(0, 5)$ f. $F(8, -5)$

4 Ubica sobre el plano cartesiano las coordenadas que se indican y une con una línea los puntos obtenidos en el orden dado. Descubre la palabra que arruinó la vida del rey Midas.

- Une estos puntos en orden y descubre la letra inicial: (1, 1), (1, 4), (3, 4), (3, 1) y (1, 1).
- Une estos puntos en orden y descubre la segunda letra: (4, 1), (4, 4), (6, 4), (6, 3), (5, 2) y (6, 1).
- Une estos puntos en orden y descubre la tercera letra: (7, 4), (9, 4), (9, 1), (7, 1) y (7, 4).

La palabra escondida es: ....

5 Dibuja en el plano cartesiano los polígonos cuyos vértices son los puntos que se indican.

a. $A(-4, 3)$, $B(4, 3)$ y $C(0, -5)$

b. $A(-7, -4)$, $B(-6, -2)$, $C(-2, -1)$, $D(-2, -5)$ y $E(-4, -6)$

Resolución de problemas

6 En una isla se encuentra oculto un tesoro exactamente en el punto de corte del segmento AB con el segmento CD. Si las coordenadas de cada punto son: $A(4, 5)$, $B(0, 1)$, $C(4, 2)$ y $D(0, 2)$, traza los segmentos en un plano cartesiano e indica las coordenadas del punto en el que está ubicado el tesoro.

Evaluación del aprendizaje

✓ La casa de Manuela está ubicada en el punto (5, 10), el colegio en el punto (8, 4) y el parque en el punto (1, 2).

a. Ubica en el plano los tres lugares.

b. Traza algunas rutas para ir de la casa al colegio. ¿Cuál es la ruta más corta?

c. ¿Qué lugar está más cerca del parque, la casa de Manuela o el colegio?

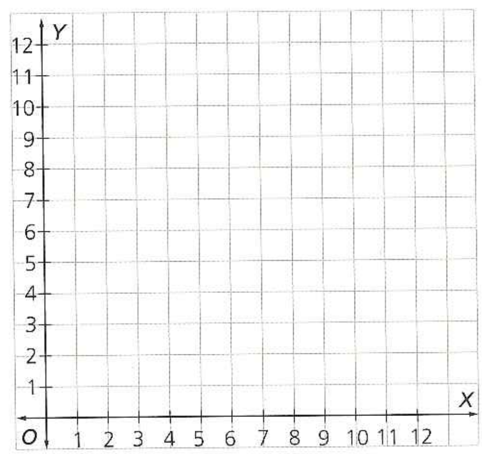


Figura 3.117

Estilos de vida saludable

Para mantener su buen estado físico, Sara hace el siguiente recorrido diariamente: inicia en (5, 20), después se dirige a (30, 20); continúa hasta (30, 5); luego pasa por (5, 5) para terminar en el punto de partida. Representa el plano cartesiano del recorrido de Sara. Explica la importancia hacer ejercicio para mantener una buena salud.

7 Traslación

Saberes previos

Dibuja el plano de tu colegio. Luego, los desplazamientos que debes hacer para ir del salón de clases hasta la biblioteca.

Analiza

Ángela debe trasladar el rombo *ABCD* cuatro unidades hacia la derecha.

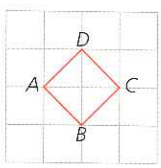


Figura 3.118

- Dibuja el rombo una vez se ha trasladado.

Analiza y conoce

Para trasladar el rombo *ABCD*, Ángela desplazó cuatro unidades cada uno de los vértices y los llamó *A´B´C´D´*; de esa manera obtuvo la imagen trasladada que buscaba.

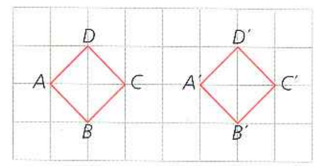


Figura 3.119

7.1 Elementos de una traslación

Una **traslación** es un movimiento en el plano en el que todos los puntos de una figura se mueven en la misma dirección, y la trayectoria de cada punto es una línea recta. La imagen de cualquier figura mediante la traslación es congruente con la inicial; conserva la medida de los ángulos, los lados y las áreas.

Una traslación se define por la magnitud, la dirección y el sentido.

- La **magnitud** de la traslación corresponde a la cantidad de unidades de desplazamiento.
- La **dirección** está determinada por el vector asociado al desplazamiento.
- El **sentido** se indica mediante la punta del vector asociado al desplazamiento.

Ejemplo 1

El cuadrilátero *ABCD* de la Figura 3.120 se trasladó en el sentido que indica la punta de la flecha $\overrightarrow{v}$ (vector v), con una dirección dada por su inclinación y una magnitud igual a su longitud.

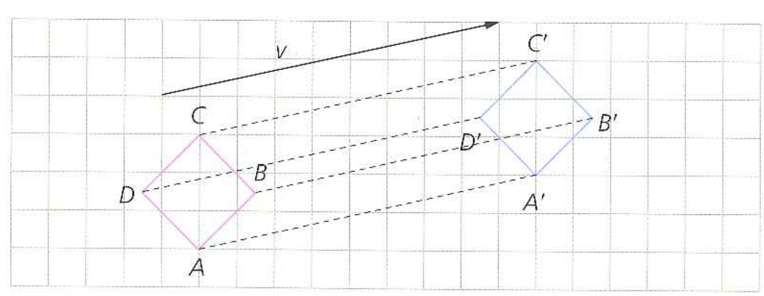


Figura 3.120

La imagen del cuadrilátero *ABCD* después de la traslación es el cuadrilátero $A'B'C'D'$. $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ y $\overline{DD'}$ son paralelos al vector v, y la distancia entre los vértices correspondientes de las dos figuras es igual a la longitud de $\overrightarrow{v}$.

7.2 Procedimiento para realizar una traslación

Para realizar la **traslación de un polígono en el plano** determinada por un vector v ($\vec{v}$), se siguen estos pasos.

1. Se trazan rectas paralelas a $\vec{v}$ que pasen por los vértices de la figura.
2. Con el compás, se construye sobre cada recta un segmento cuya medida sea la magnitud de $\vec{v}$.
3. Se marcan los vértices del polígono imagen.
4. Se traza el polígono imagen.

Ejemplo 2

La imagen del pentágono $ABCDE$ mediante la traslación determinada por el vector t es el pentágono $A'B'C'D'E'$, como se muestra en la Figura 3.121.

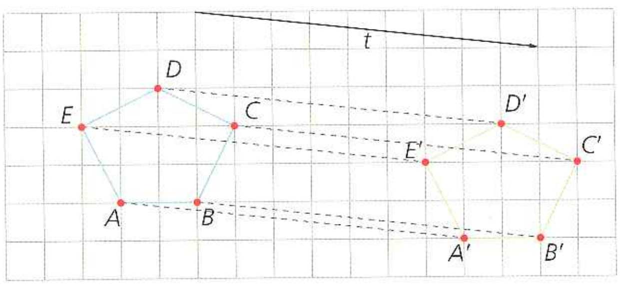


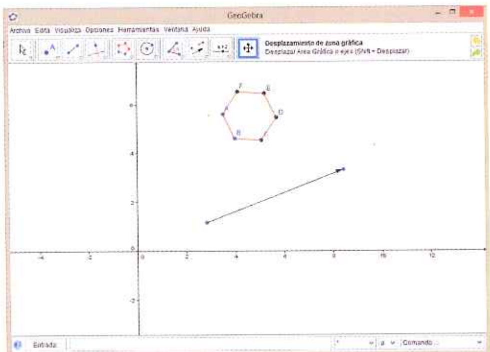
Figura 3.121

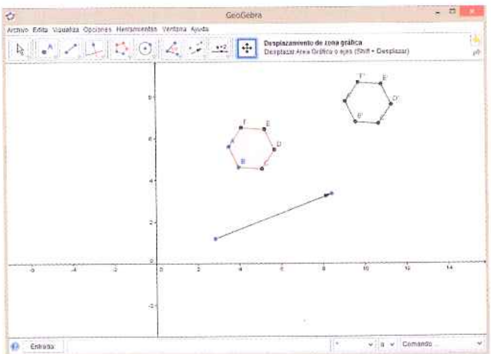
MatemaTICS

Traslada un polígono con GeoGebra

- Ve al botón y selecciona *Polígono regular*. Marca dos puntos y se desplegará una caja de texto donde debes cambiar el 4 que aparece por un 6. Aparecerá un hexágono regular.
- Ubícate en el botón y selecciona la opción *Vector entre dos puntos*.

  Haz dos veces clic y aparecerá un vector, que será el que indica la magnitud y el sentido de la traslación del hexágono.
- Ahora ve al botón y selecciona la opción *Traslada objeto acorde a vector*. Haz clic alternamente a un vértice y al vector e irán apareciendo las imágenes de estos.
- Traza los segmentos de la imagen de la figura haciendo uso de la opción *Segmento* que aparece en el botón .





7 Traslación

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Traslada cada figura con la magnitud, dirección y sentido dados por el vector v.

a.

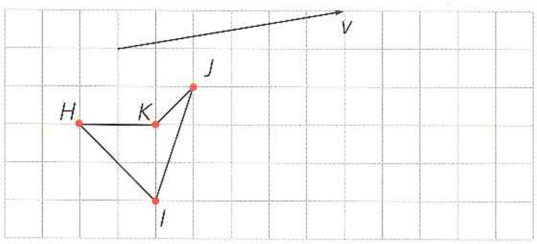


Figura 3.122

b.

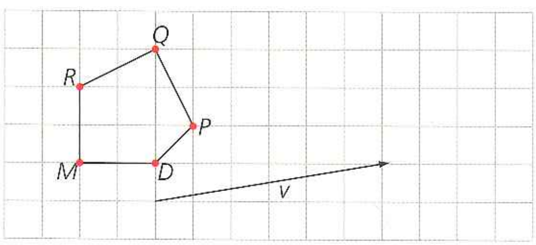


Figura 3.123

Razonamiento

2 Obtén el polígono $PQRS$, si el polígono $P'Q'R'S'$ es la traslación en siete unidades a la izquierda del polígono $PQRS$.

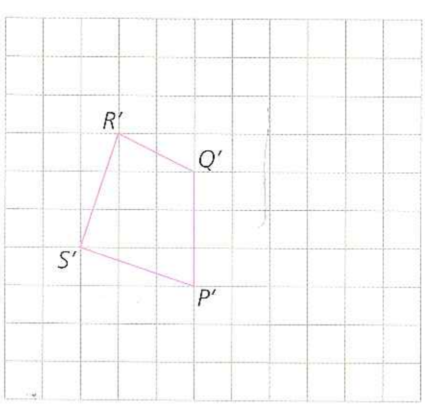


Figura 3.124

3 Determina si es verdadera (V) o falsa (F) cada una de las siguientes afirmaciones

a. Cuando una figura se traslada cambia su forma.

b. Cuando un polígono se traslada la abertura de sus ángulos no cambia.

4 Observa y responde. ¿Cuál forma (P, Q, R o S) se puede ubicar en la figura grande simplemente desplazándola? ¿Qué debe hacerse para ubicar las demás?

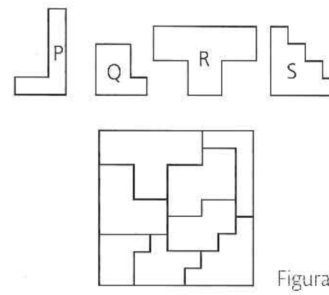


Figura 3.125

Modelación

5 Traslada las figuras según el vector v. Después, trasládalas según el vector u.

a.

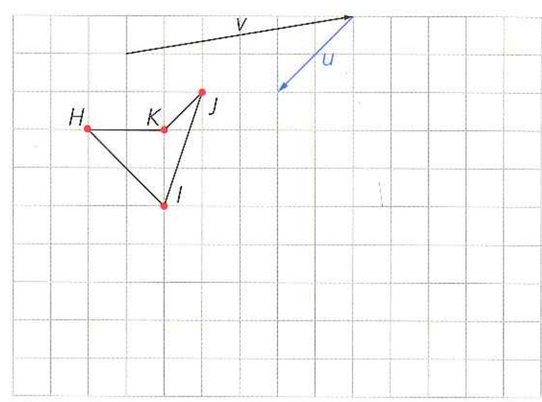


Figura 3.126

b.

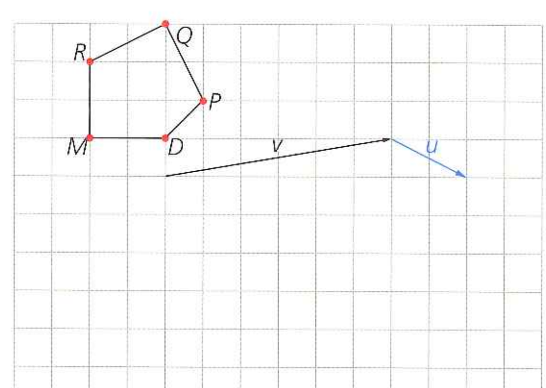


Figura 3.127

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Razonamiento

6 Copia las figuras 3.128 y 3.129 en tu cuaderno y, en cada caso, dibuja un vector con la magnitud, dirección y sentido de cada traslación.

a.

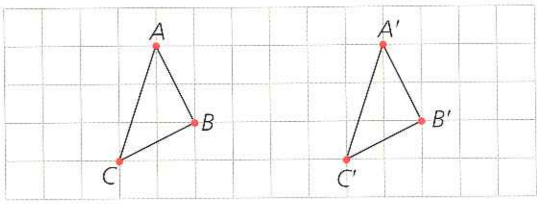


Figura 3.128

b.

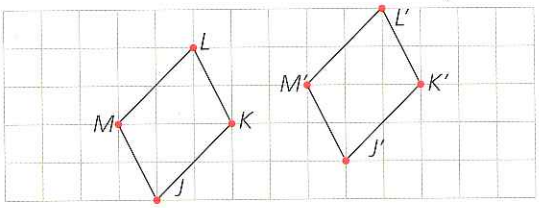


Figura 3.129

7 Si la circunferencia de la figura 3.130 se traslada tres unidades a la izquierda y dos unidades hacia abajo, ¿cuáles serían las coordenadas del centro de la circunferencia trasladada?

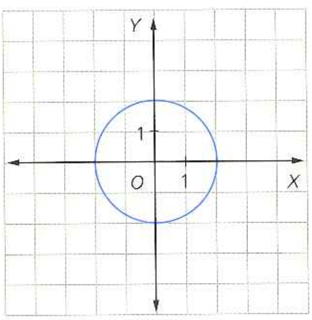


Figura 3.130

8 Observa el triángulo de la Figura 3.131 y encuentra las coordenadas del triángulo que se obtiene al trasladarlo tres unidades a la izquierda y dos unidades hacia arriba.

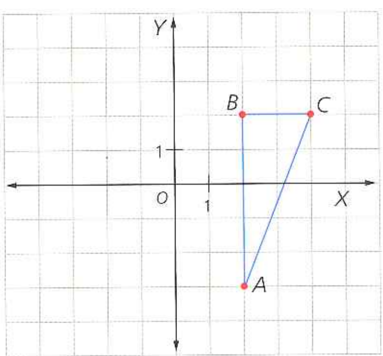


Figura 3.131

9 Usa la traslación para repetir la figura hacia la derecha y hacia abajo y completa el siguiente mosaico en tu cuaderno. Coloréalo a tu gusto.

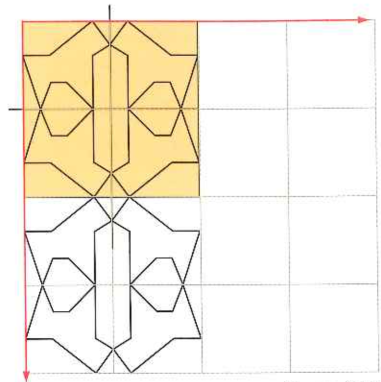


Figura 3.132

Evaluación del aprendizaje

i Responde las preguntas a partir de la información provista en la Figura 3.133.

a. ¿Cuáles son las coordenadas del punto correspondiente a la intersección de las diagonales del hexágono?

b. ¿Cuáles serían las coordenadas de tal punto si el hexágono se traslada dos unidades a la derecha?

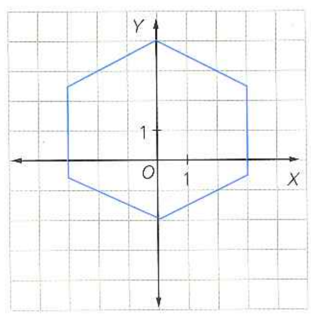


Figura 3.133

ii Traslada el perro de la Figura 3.134 nueve unidades hacia la derecha y luego dos hacia abajo.

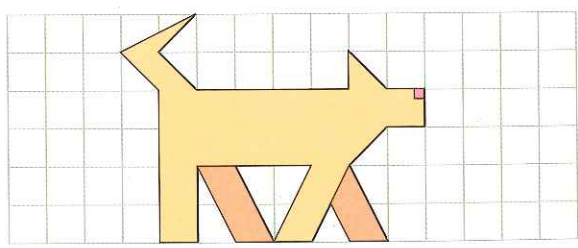


Figura 3.134

8 Rotación y reflexión

Saberes previos

Ubícate mirando al norte y determina la rotación que debes realizar para quedar mirando al sur. ¿Es lo mismo rotar dicha cantidad a la derecha que a la izquierda? ¿Sucede lo mismo con otras rotaciones?

Analiza

En una prueba de razonamiento, Manuel debía seguir una secuencia de tres figuras para hallar la cuarta.

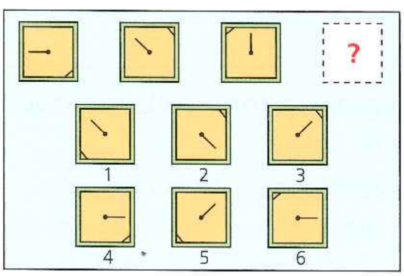


Figura 3.135

- ¿Cuál de las opciones va en la cuarta posición?

Conoce

8.1 Rotación

Manuel observó que la manecilla se mueve a una esquina del cuadrado, luego al centro de un lado del cuadrado, etc. en el mismo sentido de las manecillas del reloj, y la línea diagonal se mueve por las esquinas del cuadrado en sentido contrario a las manecillas del reloj. Siguiendo este razonamiento, la cuarta figura debe ser la indicada con la opción 5.

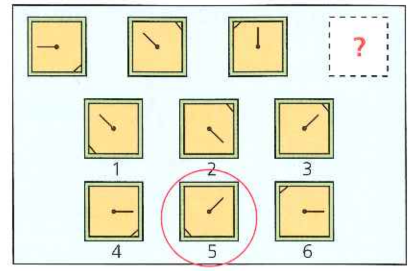


Figura 3.136

La **rotación** es un movimiento que se realiza en un plano mediante el cual una figura gira alrededor de un punto fijo llamado centro de rotación. Para rotar cualquier polígono se tienen en cuenta el **centro de rotación**, el **sentido** y la **amplitud de giro**.

A continuación se explica el **procedimiento para rotar un triángulo** *ABC* en el plano con respecto a un punto *O*.

1. Se trazan segmentos que unan el punto *O* con cada uno de los vértices del triángulo.
2. Con el compás se trazan arcos que tengan centro en *O* y pasen por cada uno de los vértices del triángulo.
3. Se mide la amplitud del ángulo en el sentido indicado, con respecto a cada segmento trazado en el paso 1, y se trazan nuevos segmentos que corten los arcos en los puntos A', B' y C', respectivamente.
4. Se traza el triángulo $A'B'C'$.

Ejemplo 1

En la rotación que se observa en la Figura 3.137 , el centro de rotación es el punto *O*, el sentido es negativo (en el sentido de las manecillas del reloj) y la amplitud de giro es de 90º. El triángulo que se rotó bajo esas condiciones fue *ABC*, y su imagen es $A'B'C'$.

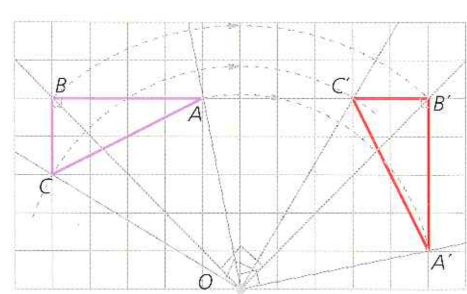


Figura 3.137

El procedimiento descrito para rotar un triángulo es similar al que se aplica para cualquier otro polígono.

Ejemplo 2

Al rotar el pentágono *MNQRS* de la Figura 3.138, 90° en sentido positivo con respecto al punto *O*, se obtiene el pentágono $M'N'Q'R'S'$.

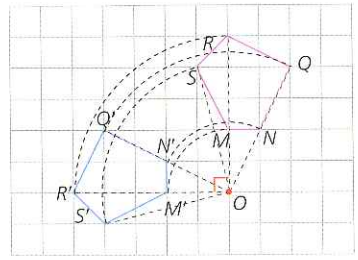


Figura 3.138

8.2 Reflexión

La **reflexión** es un movimiento que se realiza en un plano mediante el cual una figura se refleja respecto a una línea recta denominada **eje de reflexión**.

Con el movimiento de la reflexión, la imagen de la figura se obtiene como su reflejo en un espejo.

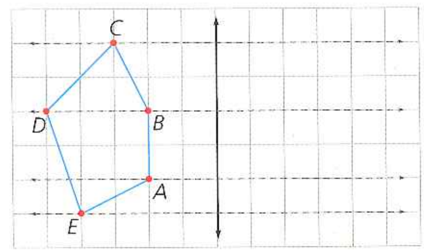


Figura 3.139

Ejemplo 3

Los siguientes son los pasos para obtener la imagen de un polígono *ABCDE* por reflexión.

1. Se trazan rectas perpendiculares al eje de reflexión que pasen por cada uno de los vértices del polígono *ABCDE* (Figura 3.139).

2. Con el compás se mide la distancia entre cada vértice y el eje de reflexión, y se ubican los respectivos vértices de la imagen al otro lado del eje (Figura 3.140).

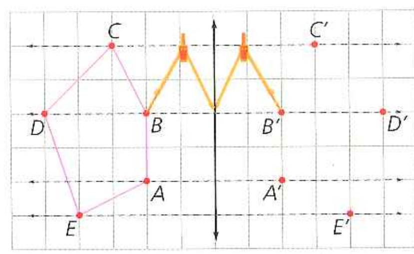


Figura 3.140

3. Se trazan $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'E'}$ y $\overline{E'A'}$ obteniendo así el polígono $A'B'C'D'E'$, que es la imagen del polígono *ABCDE* mediante la reflexión (Figura 3.141).

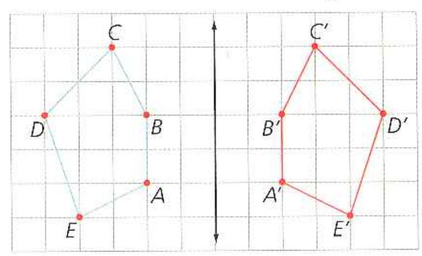


Figura 3.141

Ejemplo 4

Refleja el triángulo *ATF* respecto al eje *h*. Al seguir los pasos para reflejar una figura en el plano, se obtiene el triángulo $A'T'F'$ de la Figura 3.142.

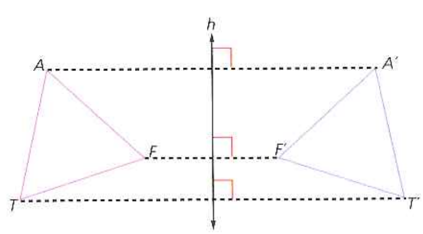


Figura 3.142

La imagen de cualquier figura rotada o reflejada es congruente con la inicial; conserva la medida de los ángulos, los lados y las áreas.

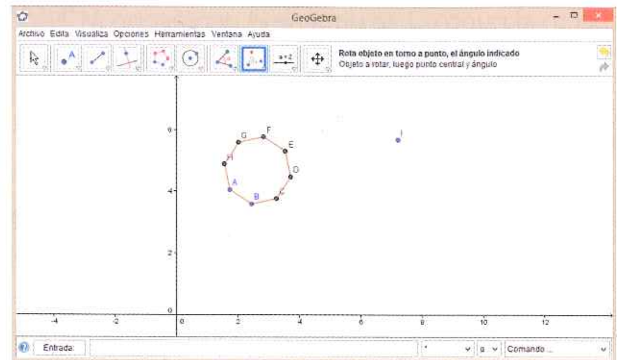
8 Rotación y reflexión

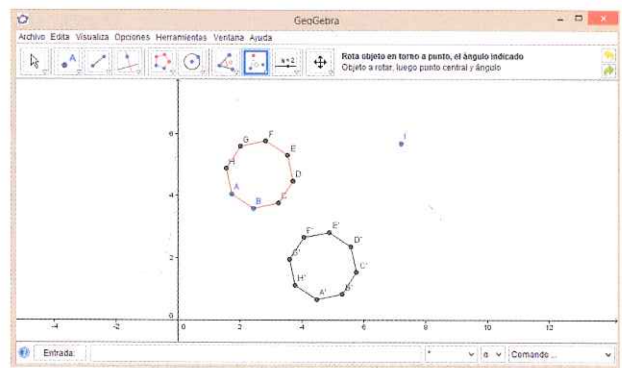
MatemaTICS

Rota un polígono con GeoGebra

- Ve al botón y selecciona *Polígono regular*. Marca dos puntos y se desplegará una caja de texto donde debes cambiar el 4 que aparece por un 8, luego de lo cual aparecerá un octágono regular.
- Ve al botón y marca un punto en el plano, que será alrededor del cual rotará el hexágono.
- Ahora ve el botón y selecciona la opción *Rota objeto en torno a punto, ángulo indicado*. Haz clic alternamente a un vértice y al punto *I* de rotación.

  Cada vez que lo hagas, aparecerán las imágenes rotadas de cada uno de los puntos.
- Traza los segmentos de la imagen de la figura rotada haciendo uso de la opción *Segmento* que aparece en el botón .





Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1. Rota el cuadrilátero *ABCD* de la Figura 3.143, 45° en sentido negativo con respecto al punto *E*.

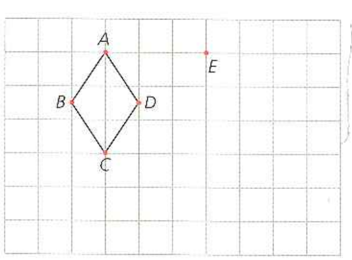


Figura 3.143

2. Rota el pentágono *ABCDE* de la Figura 3.144, 60° en sentido positivo con respecto al punto *F*.

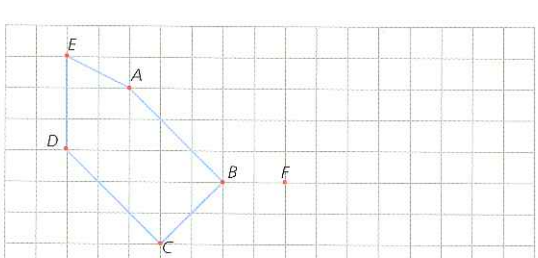


Figura 3.144

Razonamiento

3. Indica cuál es la amplitud del giro del polígono *RQOP* de la Figura 3.145. Explica tu respuesta.

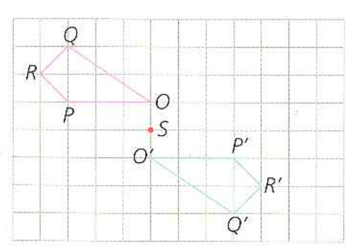


Figura 3.145

4. Indica cuál es la amplitud del ángulo de rotación del polígono *RSMPK* de la Figura 3.146, en sentido positivo, alrededor del punto *T*.

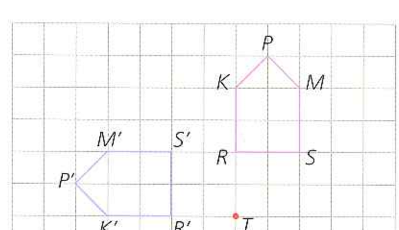


Figura 3.146

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Modelación

5 Dibuja un triángulo *PQW* en el plano cartesiano donde el punto *P* tenga como coordenadas (0, 0), el punto *Q* (0, 4) y el punto *W* (3, 1). Posteriormente, propón una amplitud de giro en sentido positivo con respecto al punto *H*, que tiene coordenadas (6, 6).

6 Observa la figura y responde. ¿Cuál es la amplitud del ángulo de rotación con la que se giró el polígono *PQRS* de la Figura 3.147, si se rotó en sentido positivo alrededor del punto *O*?

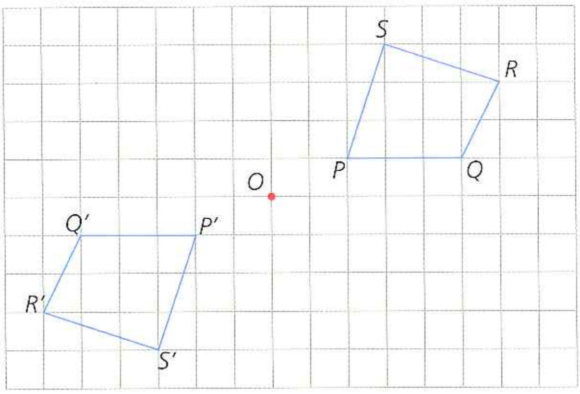


Figura 3.147

7 Lee y responde.

a. Si se refleja un hexágono regular sobre un eje de reflexión, ¿la imagen es congruente con la original? Explica.

b. ¿Un polígono puede ser rotado con respecto a diferentes centros de rotación? Explica.

Ejercitación

8 Dibuja un pentágono regular y refléjalo sobre el eje de reflexión que elijas.

9 Copia en tu cuaderno las figuras 3.148 y 3.149. Luego, refleja cada polígono con respecto al eje *e*.

a.

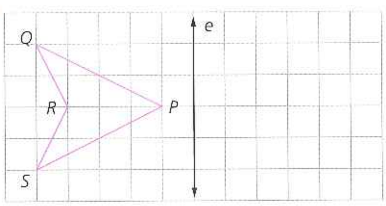


Figura 3.148

b.

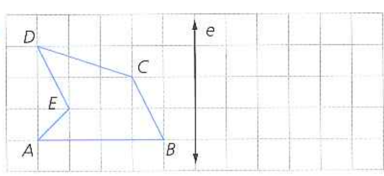


Figura 3.149

Razonamiento

10 Indica en cuáles de los siguientes casos se realizó una reflexión. Explica

a.

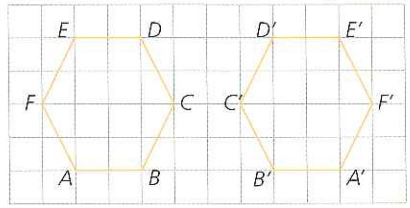


Figura 3.150

b.

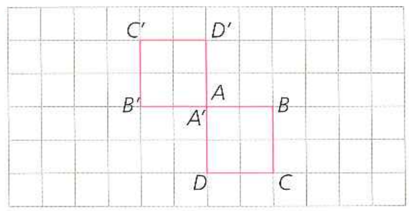


Figura 3.151

11 Explica cómo se obtuvo el triángulo *A″ B″ C″* a partir del triángulo *ABC*.

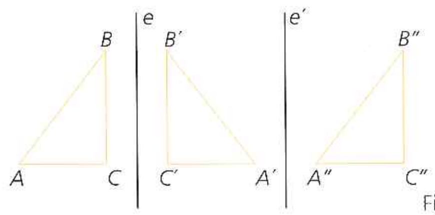


Figura 3.152

Evaluación del aprendizaje

i Rota el cuadrilátero *DEFG*, 270° en sentido positivo alrededor del punto *Q*.

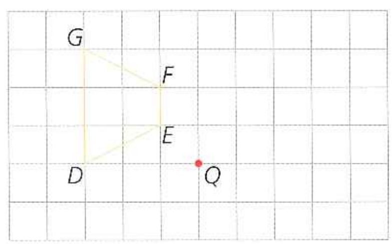


Figura 3.153

ii Encuentra la imagen del polígono *CDEFGH* de la Figura 3.154 al reflejarse con respecto a la recta *r*.

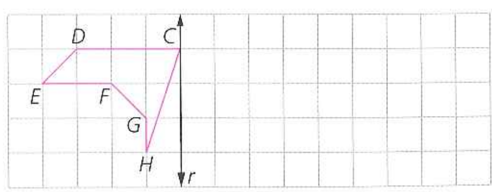


Figura 3.154

9 Prismas

Saberes previos

¿Por qué crees que la mayoría de los edificios altos tienen como base un polígono regular?

Analiza

María desea construir una caja para empacar el regalo que le dará a su hermano en su cumpleaños; para ello, recortó un cartón en la forma que lo indica la Figura 3.155.

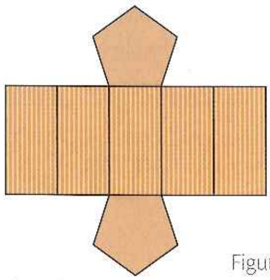


Figura 3.155

- ¿Qué poliedro obtendrá al construir el empaque? ¿Cómo son sus caras?

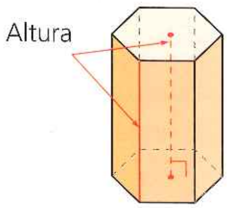


Figura 3.157

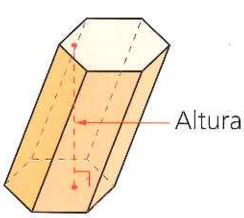


Figura 3.158

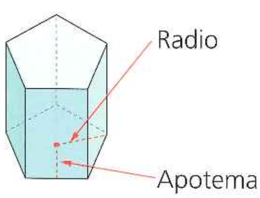


Figura 3.159

Conoce

Al doblar y pegar el cartón se obtiene el prisma de la Figura 3.156, el cual está formado por dos pentágonos congruentes y cinco rectángulos congruentes. Como los pentágonos son las bases del prisma, el poliedro obtenido recibe el nombre de **prisma pentagonal**.

Figura 3.156

Un **prisma** es un sólido geométrico que tiene dos polígonos congruentes y paralelos que se llaman **bases**. Las caras restantes son paralelogramos, y se denominan **caras laterales**. La distancia entre las bases es la **altura** del prisma.

Los prismas se nombran según el polígono de sus bases como triangular, rectangular, pentagonal, hexagonal, etc. Si todas las caras laterales de un prisma son rectángulos el prisma se denomina **recto**, y si alguna de las caras laterales no es un rectángulo el prisma se denomina **oblicuo**.

Ejemplo 1

En las figuras 3.157 y 3.158 se observan dos prismas hexagonales, uno recto y otro oblicuo, respectivamente. La altura del prisma recto coincide con las aristas laterales, mientras que la altura del prisma oblicuo es menor que la longitud de las aristas, ya que en los prismas oblicuos las aristas laterales no son perpendiculares a las bases.

Los prismas son regulares si sus bases son polígonos **regulares** e irregulares si sus bases son polígonos **irregulares**. En los prismas regulares se distinguen dos elementos nuevos: la **apotema**, que es el segmento que une el centro de la base con el punto medio de uno de los lados de dicha base, y el **radio**, que es un segmento que une el centro de la base con un vértice de la misma (Figura 3.159).

Un **paralelepípedo** es un prisma cuyas caras, incluidas las bases, son paralelogramos. En la Tabla 3.5 se clasifican los paralelepípedos.

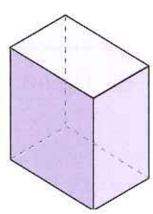
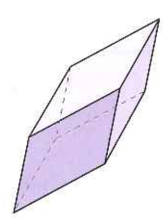
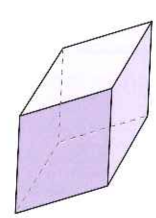
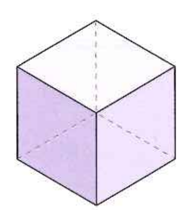
Ortoedro	Romboiedro	Romboedro	Cubo
			
Las caras son rectángulos.	Las caras son romboides.	Las caras son rombos.	Las caras son cuadrados.

Tabla 3.5

Un prisma es cóncavo si sus bases son polígonos cóncavos y es convexo si sus bases son polígonos convexos.

Ejemplo 2

El prisma de la Figura 3.160 es un prisma triangular convexo recto, el de la Figura 3.161 es cuadrangular convexo oblicuo y el de la Figura 3.162 es hexagonal cóncavo recto.

a.

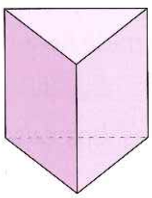


Figura 3.160

b.

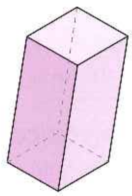


Figura 3.161

c.

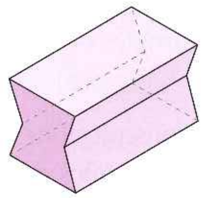


Figura 3.162

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Clasifica cada una de las siguientes afirmaciones como verdadera (V) o falsa (F).

a. En todo prisma regular, la longitud de la apotema es menor que la longitud del radio. ( )

b. La altura de un prisma es una arista del prisma. ( )

c. Si un prisma es recto, todas las aristas laterales son iguales. ( )

Ejercitación

2 Calcula la suma de las medidas de los ángulos de las caras que concurren en los vértices indicados en las figuras 3.163 y 3.164. Ten en cuenta que los prismas son regulares y sus caras laterales son rectángulos.

a.

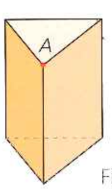


Figura 3.163

b.

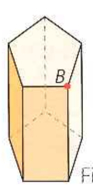


Figura 3.164

Comunicación

3 Determina qué prisma se forma con los desarrollos en el plano de las figuras 3.165 y 3.166.

a.

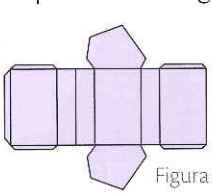


Figura 3.165

b.

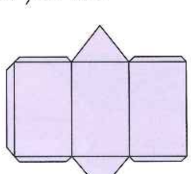


Figura 3.166

Resolución de problemas

4 En una caja se empacan seis envases Tetra pak de leche con las dimensiones que se muestran en la Figura 3.167.

Figura 3.167

a. ¿Qué prisma forma la caja?

b. Dibuja el desarrollo en el plano de la caja e indica sus dimensiones.

Evaluación del aprendizaje

i Calcula el número de caras de un prisma que tiene doce aristas y ocho vértices. Luego, responde.

a. ¿Es posible saber qué prisma es?

b. Si todas sus caras son rombos, ¿Cómo se llama el prisma?

ii Para la semana de la ciencia, Pilar y sus compañeros de clase van a construir prismas con los que decorarán el aula. ¿Cómo deben dibujar el desarrollo en el plano de los siguientes prismas?

a. Un prisma cuadrangular de base 5 cm.

b. Un cubo de 6 cm de lado.

10 Pirámides

Saberes previos

Averigua sobre las pirámides de Teotihuacán, su ubicación y sus características.

Analiza

En la antigüedad, diversas civilizaciones construyeron pirámides principalmente con fines religiosos o funerarios.

- ¿Qué características en común tienen estas construcciones?

Conoce

Algunas de las pirámides más antiguas y conocidas son las pirámides de Guiza, la pirámide Cestia y la pirámide Roja.

		
Pirámides de Guiza (Egipto)	Pirámide Cestia (Roma)	Pirámide Roja de Seneferu (Egipto)

Estas construcciones tienen cinco vértices, ocho aristas, una base cuadrada y cuatro triángulos que corresponden a sus caras laterales.

Una **pirámide** es un poliedro cuya **base** está determinada por un polígono y sus **caras laterales** están formadas por triángulos que concurren en un mismo punto llamado **vértice**.

En la Figura 3.168 se observan los elementos de una pirámide de base cuadrangular.

- La base es un cuadrado, y sus cuatro caras laterales son triángulos isósceles que concurren en el vértice.
- La **altura de la pirámide** es la medida del segmento perpendicular que va de su vértice a su base.
- La **apotema de la pirámide** es la altura de cada una de las caras laterales de la pirámide.

Elementos de una pirámide

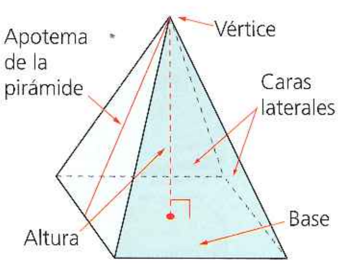


Figura 3.168

10.1 Clasificación de las pirámides

Las pirámides se pueden clasificar como triangulares, rectangulares, pentagonales, hexagonales, etc., o en **cóncavas** y **convexas**, según el tipo de polígono de la base. También pueden ser **rectas** si sus caras laterales son triángulos isósceles, u **oblicuas** si alguna de las caras no es un triángulo isósceles.

10.2 Troncos de pirámide

Si se corta una pirámide por un plano paralelo a la base y se le quita la parte de arriba, el cuerpo resultante es un **tronco de pirámide** (Figura 3.169).

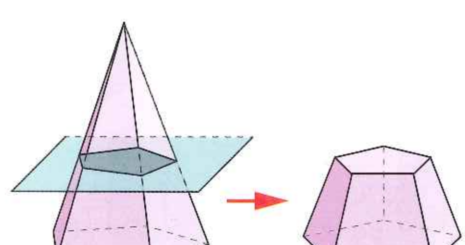


Figura 3.169

Ejemplo 1

En las figuras 3.170 a 3.172 se muestran una pirámide triangular recta convexa, una pirámide hexagonal recta cóncava y una pirámide pentagonal oblicua convexa, respectivamente.

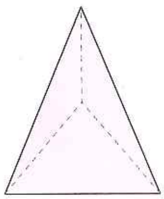


Figura 3.170

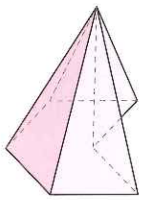


Figura 3.171

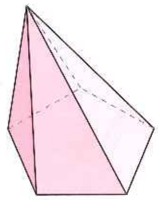


Figura 3.172

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Relaciona cada pirámide con la descripción que le corresponde.

- Pirámide hexagonal, convexa y oblicua.
- Pirámide hexagonal, convexa y recta.
- Pirámide pentagonal, cóncava y recta.
- Pirámide cuadrangular, cóncava y recta.

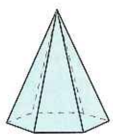


Figura 3.173

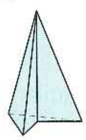


Figura 3.174

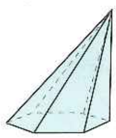


Figura 3.175

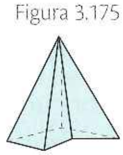


Figura 3.176

Razonamiento

2 Determina qué tipo de pirámide resulta de los desarrollos de las figuras 3.177 y 3.178.

a.

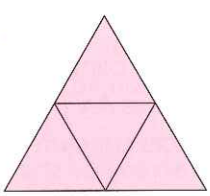


Figura 3.177

b.

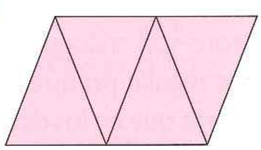


Figura 3.178

Evaluación del aprendizaje

i Completa la Tabla 3.6

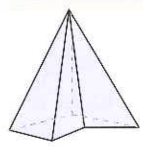
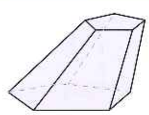
	N.° de aristas	N.° de vértices	N.° de caras
			
			
			

Tabla 3.6

ii Miguel y Felipe fueron de campamento el fin de semana. Miguel asegura que la carpa tiene forma de pirámide, mientras que Felipe afirma que tiene forma de prisma. A partir de la Figura 3.179, decide quién tiene la razón. Justifica tu respuesta.


Figura 3.179

11 Poliedros regulares

Saberes previos

Describe un cubo con todas sus características: número de aristas, de caras, de vértices, tipos de ángulos en sus esquinas, diagonales, etc.

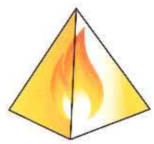
Analiza

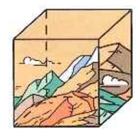
Los poliedros regulares convexos se conocen también como sólidos platónicos, pues en la Grecia clásica fueron objeto de estudio por parte de Platón. Este filósofo asoció los poliedros regulares con los cuatro elementos de la naturaleza y con el universo.

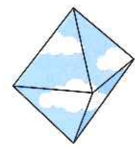
- ¿Cuáles son los cinco sólidos platónicos y con cuál elemento fueron asociados en la antigüa Grecia?

Conoce

Los cinco sólidos platónicos son: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. A continuación se muestra una representación de los cinco poliedros regulares convexos realizada por Johannes Kepler, con su respectiva asociación con los elementos que forman el universo.


Tetraedro (Fuego)


Cubo (Tierra)


Octaedro (Aire)


Dodecaedro (Universo)


Icosaedro (Agua)

Un **poliedro** es **regular convexo** si todas sus caras son polígonos regulares congruentes, y en cada vértice concurre el mismo número de caras y de aristas.

Las características y elementos de cada poliedro regular se enuncian en la Tabla 3.7.

Poliedro regular	Polígono de sus caras	Número de aristas	Número de vértices	Número de caras
Tetraedro	Triángulo equilátero	6	4	4
Cubo	Cuadrado	12	8	6
Octaedro	Triángulo equilátero	12	6	8
Dodecaedro	Pentágono regular	30	20	12
Icosaedro	Triángulo equilátero	30	12	20

Tabla 3.7

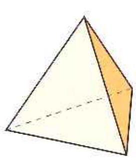


Figura 3.180

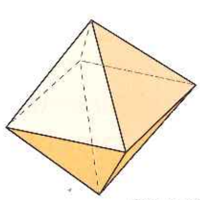


Figura 3.181

Ejemplo 1

Los poliedros que se observan en las figuras 3.180 y 3.181 son convexos regulares porque:

1. Las caras de ambos poliedros son polígonos regulares congruentes. En este caso, son triángulos equiláteros.
2. En todos los vértices concurre el mismo número de caras y de aristas. En la Figura 3.180, en cada vértice concurren tres caras y tres aristas, mientras que en la Figura 3.181 en cada vértice concurren cuatro caras y cuatro aristas.

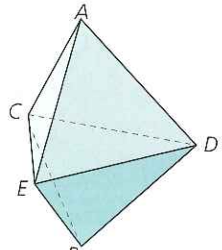


Figura 3.182

Ejemplo 2

El poliedro de la Figura 3.182 no es regular.

Las seis caras del poliedro son triángulos equiláteros congruentes; sin embargo, no es un poliedro regular porque en los vértices A y B concurren tres aristas y tres caras, mientras que en los demás vértices concurren cuatro aristas y cuatro caras.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Modelación

1 Une con una línea cada poliedro regular con su respectivo desarrollo en el plano.

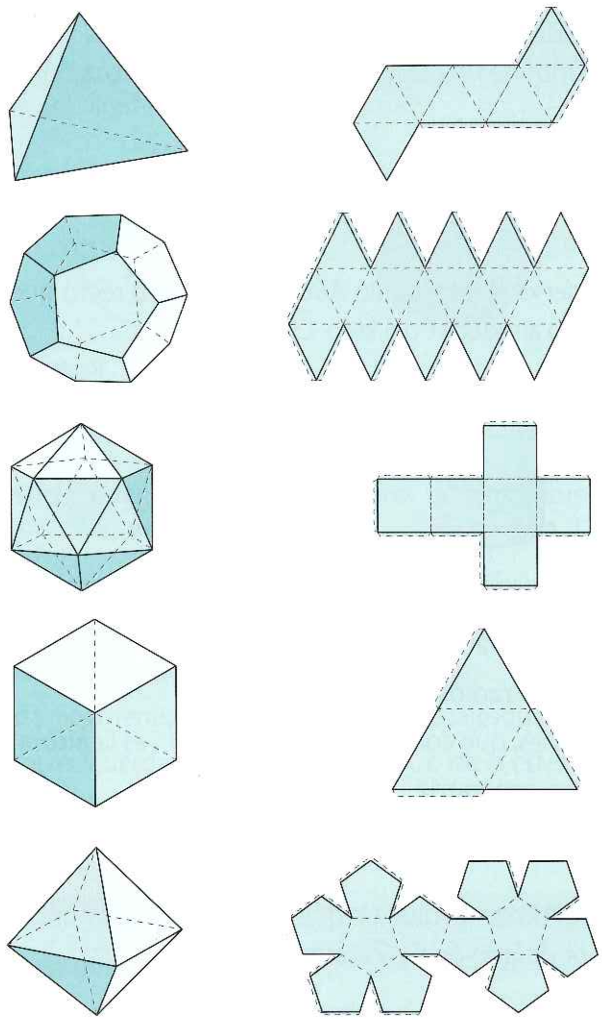


Figura 3.183

2 Responde las preguntas.

a. ¿Se puede obtener un poliedro regular uniendo dos pirámides cuadrangulares por sus bases?

b. Si tu respuesta es afirmativa, ¿qué poliedro se obtiene?

Razonamiento

3 Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. Existe un poliedro regular cuyas caras son hexágonos. ( )

b. El poliedro regular formado por el mayor número de triángulos equiláteros es el icosaedro. ( )

c. En cada vértice de un poliedro concurren al menos tres caras. ( )

Resolución de problemas

4 Si se realizan cortes planos a la misma distancia de cada vértice de un sólido platónico, se obtienen los **sólidos truncados**. En la Figura 3.184 se observa el **tetraedro truncado**.

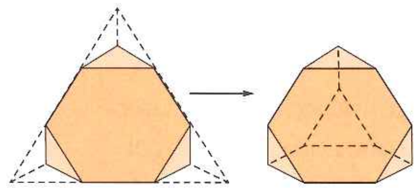


Figura 3.184

a. ¿El tetraedro truncado es un poliedro regular? Justifica tu respuesta.

b. ¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene el tetraedro truncado?

c. Describe las caras del tetraedro truncado.

d. Explica la relación entre el número de caras, vértices y aristas del tetraedro y los elementos del tetraedro truncado.

e. Dibuja el desarrollo del tetraedro truncado.

5 La fluorita es un mineral utilizado en el proceso de fundición del hierro y del acero, y al cristalizarse se encuentra en la naturaleza adoptando diferentes formas poliédricas. Indica el tipo de poliedro que es la fluorita de la Figura 3.185.

Figura 3.185

Evaluación del aprendizaje

i Explica por qué no son regulares los poliedros de las figuras 3.186 y 3.187.

a.

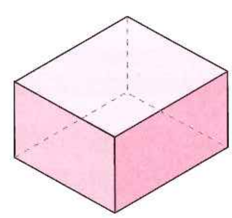


Figura 3.186

b.

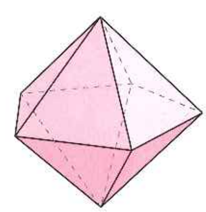


Figura 3.187

ii Dibuja tres desarrollos diferentes de un tetraedro.

12 Cuerpos redondos

Saberes previos

¿Qué figura describe una bailarina de ballet que gira sobre su propio eje con los brazos abiertos?

Analiza

Algunas construcciones arquitectónicas y varios objetos de la cotidianidad tienen forma de **cuerpo redondo**.

- ¿Cuáles son los cuerpos redondos más conocidos?

Conoce

Los cuerpos redondos más conocidos son: el **cilindro**, el **cono** y la **esfera**.

Los cuerpos redondos son sólidos que tienen al menos una cara curva. También se denominan **sólidos de revolución** porque se generan haciendo girar una figura plana alrededor de una recta que se llama **eje de rotación**.

12.1 Cilindros

Un **cilindro recto** es un sólido de revolución que se obtiene al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados.

En la Figura 3,188 se observa el rectángulo *ABCD* y el cilindro recto que se obtiene al girar el rectángulo alrededor del lado $\overline{CD}$

Figura 3.188

En un cilindro se distinguen los siguientes elementos:

- Los círculos que generan los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son las **bases**.
- Los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son los **radios**.
- La distancia entre las bases, que coincide con el lado $\overline{CD}$, es la **altura**.
- El lado $\overline{AB}$ se denomina **generatriz**.

12.2 Conos

Un **cono recto** es un sólido de revolución que se obtiene al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

En la Figura 3.189 se observa el triángulo *BAC* rectángulo en el $\measuredangle A$, que gira alrededor de su cateto $\overline{CA}$.

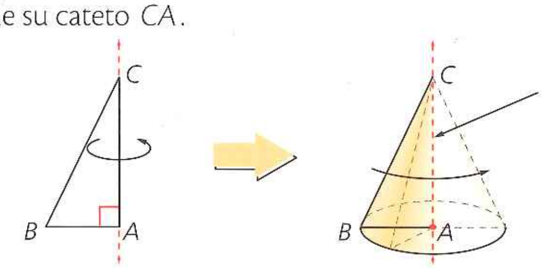


Figura 3.189

De la Figura 3.189 se pueden deducir los elementos de un cono:

- El punto *C* es el **vértice** del cono.
- El círculo generado por el lado $\overline{AB}$ se llama **base**.
- El lado $\overline{AB}$ es el **radio**.
- La **altura** $\overline{AC}$ es la distancia del vértice a la base.
- La hipotenusa $\overline{BC}$, en cualquiera de sus posiciones, es la **generatriz**.
- La superficie que genera la hipotenusa es la **superficie lateral**.

Elementos de un cono

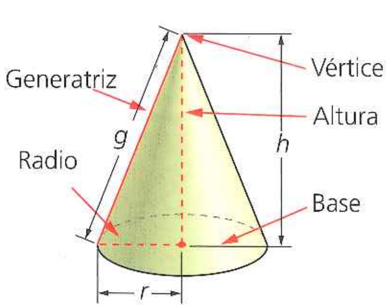


Figura 3.190

12.3 Esferas

Una **esfera** es un sólido de revolución que resulta al girar un semicírculo alrededor de su diámetro.

En la Figura 3.191 se observa cómo se genera una esfera al girar el semicírculo de radio $\overline{OP}$ alrededor de su diámetro $\overline{PP'}$.

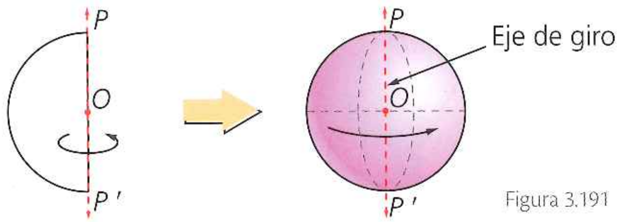


Figura 3.191

En la Figura 3.192 se observan los elementos de una esfera, que se explican como sigue.

- **Superficie esférica**. Se genera al girar la semicircunferencia alrededor del eje $\overline{PP'}$.
- **Centro de la esfera**. Es el centro del círculo máximo.
- **Radio de la esfera**. Segmento que se obtiene al unir el centro de la esfera con cualquier punto de la superficie esférica.
- **Cuerda**. Segmento que une dos puntos cualesquiera de la superficie esférica.
- **Diámetro**. Cuerda que pasa por el centro de la esfera.
- **Polos**. Puntos de corte del eje de giro con la superficie esférica.

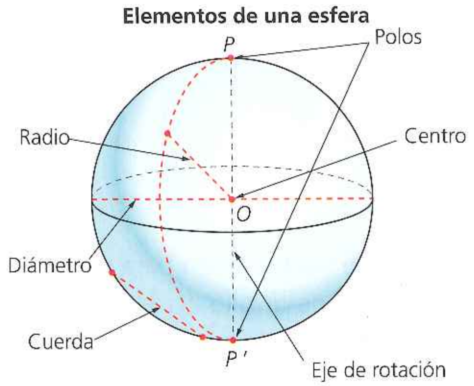


Figura 3.192

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1. Determina el radio y la longitud de la generatriz de los cilindros de las figuras 3.193 y 3.194.

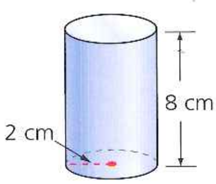


Figura 3.193

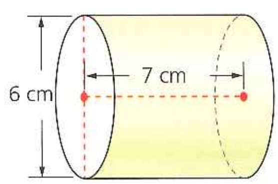


Figura 3.194

2. Lee y responde.

Si se gira un rectángulo de base 7 cm y altura 11 cm tomando como eje de rotación la altura,

a. ¿qué sólido se forma?

b. ¿cuánto mide la generatriz?

c. ¿cuánto mide el radio de la circunferencia de la base del sólido?

Resolución de problemas

3. ¿Cuánto mide el diámetro de la circunferencia de la base del cono que se obtiene al girar el triángulo ABC de la Figura 3.195 alrededor del lado $\overline{CB}$?

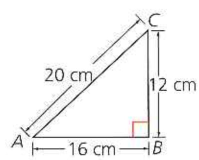


Figura 3.195

Evaluación del aprendizaje

i. ¿Qué tipo de rectángulo debe hacerse girar alrededor de uno de sus lados para que el diámetro del círculo de la base y la atura del cilindro que se obtenga sean iguales?

ii. ¿Cómo son las distancias desde cualquier punto de la superficie de una esfera a su centro?

13 Construcción y representación bidimensional de sólidos

Saberes previos

Toma una caja pequeña y dibuja cómo se vería si se desarmara. Construye otra caja siguiendo el modelo que dibujaste.

Analiza

Observa la Figura 3.196.

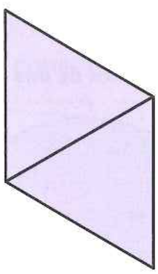


Figura 3.196

- ¿Qué figuras faltan para completar el desarrollo en el plano de una pirámide cuadrangular?
- ¿En qué posición deben ir?

Conoce

En la Figura 3.197 se representan algunos desarrollos en el plano para construir una pirámide cuadrangular.

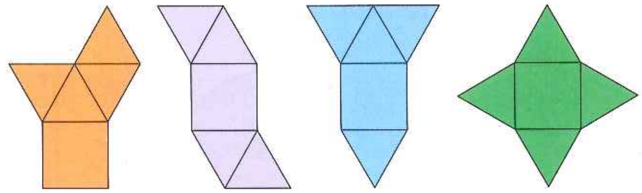


Figura 3.197

Observa que las figuras en cada desarrollo corresponden a un cuadrado y cuatro triángulos. Cada figura debe tener una posición adecuada en el desarrollo.

Un sólido se puede representar bidimensionalmente mediante desarrollos en el plano.

13.1 Representación de un sólido mediante dibujos

Los prismas, pirámides, cilindros y cono, se pueden representar mediante dibujos teniendo en cuenta ciertas características como la **perspectiva**.

En la Tabla 3.8 se presentan los pasos para dibujar un paralelepípedo.

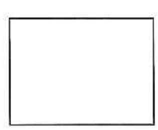
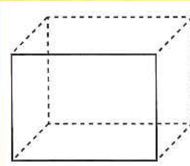
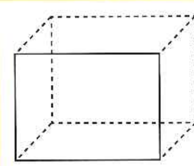
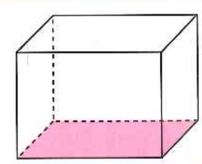
Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4
			

Tabla 3.8

Un sólido se puede representar bidimensionalmente mediante dibujos.

Ejemplo 1

En la Tabla 3.9 se presentan los pasos para dibujar un cilindro.

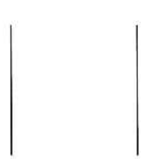
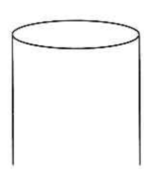
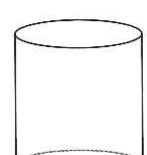
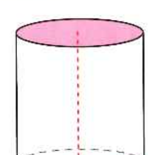
Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4
			

Tabla 3.9

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

13.2 Vistas de un sólido

A un sólido representado bidimensionalmente mediante un dibujo, se le pueden identificar las formas de sus caras mediante sus **vistas**.

Ejemplo 2

La Figura 3.198 es una representación bidimensional de un sólido.

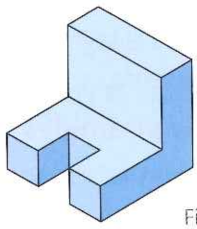


Figura 3.198

En la Figura 3.199 se presentan las distintas vistas del sólido.

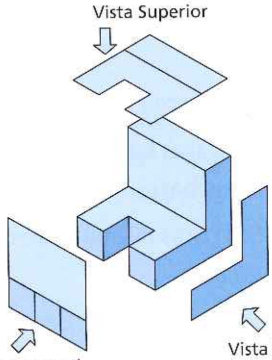


Figura 3.199

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

Identifica cuales desarrollos no forman un poliedro.

a.

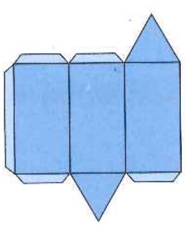


Figura 3.200

b.

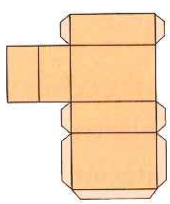


Figura 3.201

c.

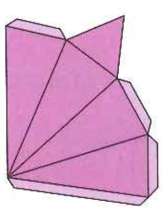


Figura 3.202

d.

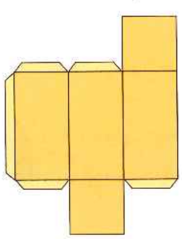


Figura 3.203

Evaluación del aprendizaje

Observa el desarrollo de la Figura 3.204.

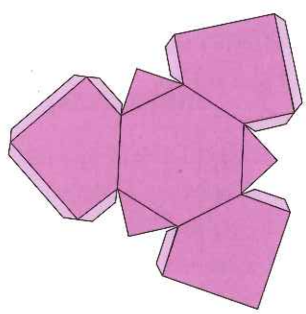


Figura 3.204

a. Cópialo en una cartulina y arma el sólido.

b. Determina sus características.

c. Representa todas las vistas.

d. Represéntalo mediante un dibujo bidimensional.

Practica más

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ángulos

Ejercitación

1 Mide cada ángulo y construye su bisectriz.

a. b.

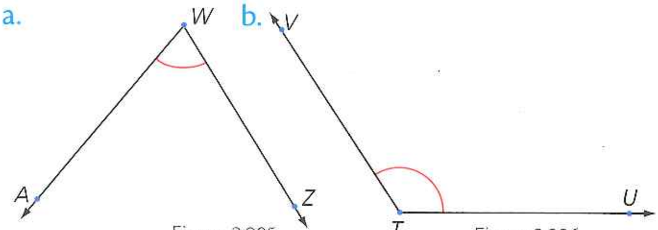


Figura 3.205 Figura 3.206

2 Usa el transportador para construir ángulos con las medidas dadas.

a. 35° b. 98° c. 135° d. 15°

Polígonos. Construcción

Razonamiento

3 Contesta las siguientes preguntas sobre un decágono.

a. ¿En cuántos triángulos se puede dividir?

b. A partir del resultado anterior, ¿cuánto miden sus ángulos?

4 Analiza y responde. En un triángulo se sabe que un ángulo es igual a la suma de los otros. ¿Qué clase de triángulo es?

Modelación

5 Construye un triángulo *ABC* donde los segmentos *AB*, *BC* y *CD* midan 5 cm, 12 cm y 13 cm, respectivamente. ¿Qué clase de triángulo se obtiene?

Plano cartesiano y movimientos

Ejercitación

6 Escribe las coordenadas de los puntos que aparecen en el plano de la Figura 3.207.

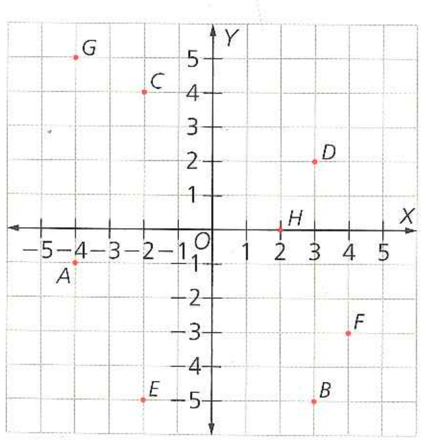


Figura 3.207

Razonamiento

7 Ubica en el plano cartesiano los puntos $M(2, 2)$ y $N(4, 3)$. Luego, ubica lo que se indica en cada caso y traslada.

a. El tercer vértice *O*, para formar un triángulo rectángulo *MNO*. Trasládalo 3 unidades arriba.

b. El tercer vértice R, para formar un triángulo isósceles *MNR*, en el que uno de sus lados congruentes es el segmento *MN*. Trasládalo 5 unidades a la izquierda.

Prismas y pirámides

Razonamiento

8 Determina si cada enunciado es verdadero (V) o falso (F).

a. Un prisma pentagonal tiene siete caras regulares. ( )

b. Un prisma octogonal tiene 24 aristas. ( )

c. Las caras laterales de un prisma son paralelas a sus bases. ( )

d. Las caras laterales de un prisma son rectangulares. ( )

e. La base de un prisma es un polígono regular. ( )

Modelación

9 En la Figura 3.208, el plano β divide al cubo en dos poliedros congruentes. ¿Cuántos planos diferentes que cumplan la misma condición se pueden dibujar en el cubo?

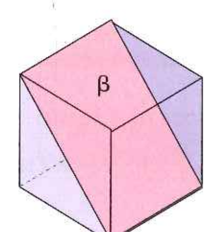


Figura 3.208

Construcción y representación bidimensional de sólidos

Ejercitación

10 Dibuja todas las vistas del siguiente sólido.

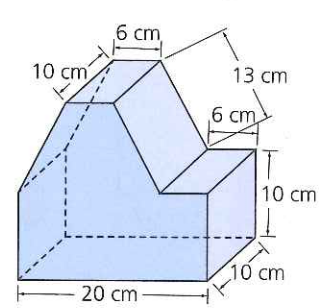


Figura 3.209

Resolución de **problemas**

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Estrategia: Utilizar una fórmula

Problema

Sebastián va a comprar una cuerda para adornar cada una de las diagonales de un hexágono regular que construyó en una maqueta. Si cada diagonal mide 35 cm, ¿qué cantidad de cuerda necesita?

1. Comprende el problema

- ¿De qué términos debes conocer el significado en el enunciado del problema?

  R: De hexágono regular y de diagonal de un polígono.

- ¿Qué información adicional se requiere?

  R: El número de diagonales que se pueden trazar en un hexágono.

2. Crea un plan

- Utiliza la fórmula que permite calcular el número de diagonales que se pueden trazar en un hexágono. Luego, calcula la cantidad de cuerda que se necesita.

3. Ejecuta el plan

- La fórmula $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$ permite calcular el número de diagonales de un polígono de n lados. Reemplaza n por 6.

Número de lados del hexágono — Número de diagonales

$$\frac{6 \cdot (6-3)}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

- Calcula la cantidad de cuerda necesaria.

Número de diagonales — Cantidad total de cuerda

$$9 \cdot 35 \text{ cm} = 315 \text{ cm}$$

Cantidad de cuerda por diagonal

R: Sebastián necesita 315 cm de cuerda.

4. Comprueba la respuesta

- Traza todas las diagonales de un hexágono y cuéntalas. ¿Coincide este número con el obtenido mediante la fórmula?

Aplica la estrategia

1. La rueda panorámica de un parque de diversiones tiene forma de octágono regular; cada diagonal es una barra de metal de 12 m de longitud. ¿Cuánto suman las medidas de todas las diagonales de la rueda?

   a. Comprende el problema

   ....

   ....

   b. Crea un plan

   ....

   ....

   c. Ejecuta el plan

   ....

   ....

   d. Comprueba la respuesta

   ....

   ....

Resuelve otros problemas

2. Calcula el valor de x en la Figura 3.210.

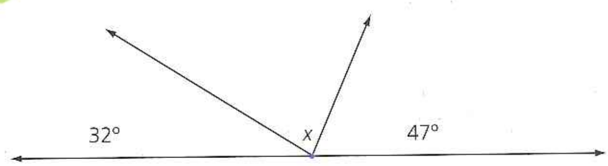


Figura 3.210

3. En un parque para niños, el arenero tiene forma de hexágono regular. ¿Cuál es la medida de cada ángulo interior del arenero?

Formula problemas

4. Plantea y resuelve un problema en el cual se necesite trabajar con un ángulo de 45° y con su ángulo complementario.

Enriquece tu vocabulario

- ¿Cuáles de las siguientes palabras están relacionadas con la palabra prisma?

caras	aristas	esférico	polígono

Evaluación del aprendizaje

Ángulos

Ejercitación

1 Dibuja lo que se pide en cada caso. Luego, clasifica los ángulos dibujados. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. Un ángulo congruente a uno de 30°

b. Un ángulo suplementario a uno de 23°

c. Dos ángulos congruentes con un ángulo recto

d. Un ángulo complementario a uno de 62°

2 Mide y clasifica cada ángulo. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a.

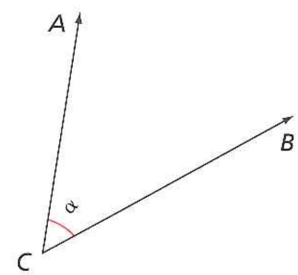


Figura 3.211

b.

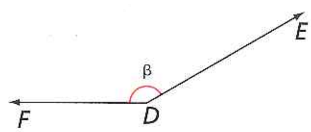


Figura 3.212

Razonamiento

3 Completa cada expresión. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

a. Si la medida del ángulo $\theta = 43°$, su suplemento mide ☐.

b. Si el complemento del ángulo $\beta = 17°$, β mide ☐.

Polígonos. Construcción

Ejercitación

4 Completa la tabla. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

Polígono	Número de lados	Número de diagonales	Suma de los ángulos interiores
			540°
		20	
	9		
Hexágono			
			180°

Tabla 3.10

5 Determina la cantidad de hexágonos regulares que se necesitan para recubrir la Figura 3.213. Utiliza la regla y el compás para construir los hexágonos. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

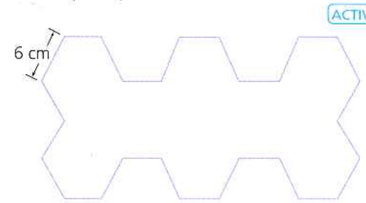


Figura 3.213

6 Camilo quiere construir con el compás un triángulo de lados 12 cm, 5 cm y 4 cm. ¿Logrará construirlo? Si es así, ¿qué clase de triángulo será? Si no lo es, ¿por qué no es posible? SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Movimientos en el plano

Razonamiento

7 Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). VERDADERO / FALSO

a. La intersección de los ejes tiene coordenadas (0, 0). ( )

b. Un punto en el cuadrante III tiene abscisa negativa y ordenada positiva. ( )

c. La intersección de los ejes de coordenadas divide al plano en cuatro cuadrantes. ( )

Plano cartesiano

Ejercitación

8 Traslada dos unidades hacia arriba este rectángulo y rota la figura que obtengas 90° en el sentido de las manecillas del reloj sobre el punto (1, 2). Escribe las coordenadas de las dos figuras que obtuviste. ACTIVIDAD DE REFUERZO

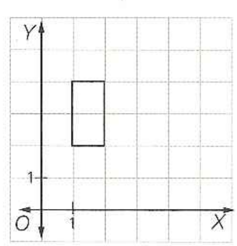


Figura 3.214

9 Dibuja la reflexión del siguiente polígono con respecto a la recta *l*. ACTIVIDAD DE REFUERZO

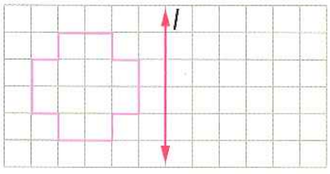


Figura 3.215

Prismas

Comunicación

10 Califica cada enunciado como verdadero (V) o falso (F). VERDADERO / FALSO

a. Un paralelepípedo es un prisma regular. ( )

b. Todas las caras de un ortoedro son rombos. ( )

c. Los paralelepípedos se clasifican según el tipo de paralelogramo que formen sus caras. ( )

d. Todas las caras de un romboedro son polígonos regulares. ( )

e. Todos los prismas cuadrangulares son romboedros. ( )

Pirámides

Razonamiento

11 Escribe qué tipo de pirámide resulta de cada desarrollo. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a.

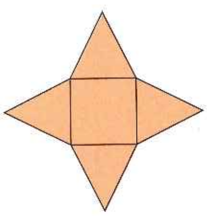


Figura 3.216

b.

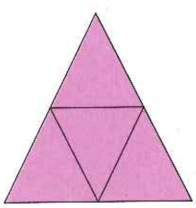


Figura 3.217

c.

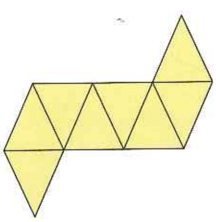


Figura 3.218

d.

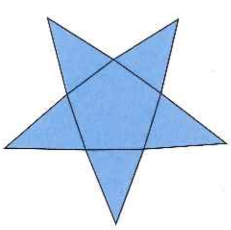


Figura 3.219

Poliedros regulares

Razonamiento

12 Completa la siguiente tabla. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

Poliedro regular	Polígono de sus caras	Número de caras que concurren en un vértice
Tetraedro		
Cubo		
Octaedro		
Dodecaedro		
Icosaedro		

Tabla 3.11

Cuerpos redondos

Comunicación

VERDADERO / FALSO

13 Clasifica cada afirmación como verdadera o falsa.

a. Los cilindros no son poliedros. ( )

b. Una esfera tiene infinitos diámetros. ( )

c. Al cortar una esfera por un plano se obtiene una circunferencia. ( )

Resolución de problemas

14 La galleta que enrolla un cono de helado tiene una altura de 30 cm y un radio de 10 cm. ¿Cuánto mide la generatriz? ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

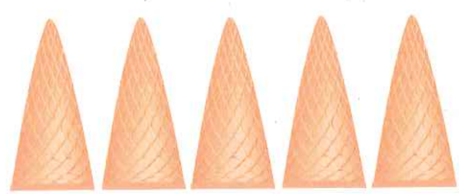


Figura 3.220

Construcción y representación bidimensional de sólidos

Comunicación

15 Describe, utilizando dibujos, el proceso para dibujar los siguientes sólidos. PREGUNTA ABIERTA

a. Un prisma pentagonal regular recto.

b. Un prisma de hexagonal regular oblicuo.

4 Unidades de medida

Ya sabemos

- Usar algunas herramientas para medir: regla, transportador, reloj, balanza, etc.

Vamos a aprender

- A tomar la medida directa o mediante alguna expresión matemática de algunas figuras, objetos o fenómenos.

Nos sirve para

- Resolver problemas diversos de medición dentro de las matemáticas y en situaciones cotidianas.

1 Sistema métrico decimal

Saberes previos

El palmo era una antigua unidad de longitud correspondiente a la medida entre el extremo del dedo pulgar y el extremo del meñique con la mano extendida. ¿Es esa medida igual para todas las personas?

Analiza

Un rey le pidió al pequeño carpintero real que construyera una cama de seis pies de largo por tres de ancho para regalársela a la reina. Sin embargo, cuando el carpintero entregó la cama, era demasiado pequeña y la reina no cupo.

- ¿Qué pudo haber sucedido?

Conoce

Cuando el rey tomó las medidas de la cama que quería, usó sus pies para hacerlo. Pero el carpintero real usó los suyos para interpretar la información que le dio el rey, así que construyó una cama con unas medidas diferentes a las que necesitaba el rey.

Con el fin de evitar este tipo de problemas se creó un sistema internacional de medidas.

El **sistema métrico decimal** es el sistema de medición incluido en el **Sistema Internacional de Unidades** (SI) utilizado para medir magnitudes como longitud, área, volumen, masa y capacidad.

Para medir una magnitud, se compara su valor con el de un patrón al que se le llama **unidad** y se determina el número de veces que la contiene.

- Para medir longitudes se utiliza como unidad patrón el **metro**.
- Para medir superficies se utiliza el **metro cuadrado**.
- Para medir masas se utiliza el **gramo**.
- Para medir volúmenes se utiliza el **metro cúbico**.
- Para medir capacidades se utiliza el **litro**.

Cada una de estas unidades cuenta con múltiplos y submúltiplos.

Ejemplo 1

Se puede determinar cuál de los segmentos de la Figura 4.1 tiene mayor longitud de la siguiente manera.

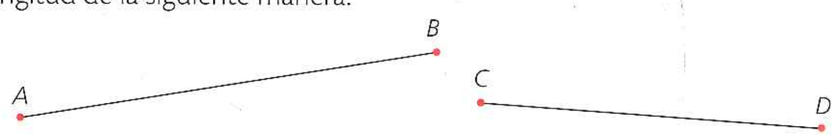


Figura 4.1

Se comparan sus longitudes con otra longitud (u) que se elige como patrón y se averigua cuántas veces la contiene cada segmento (Figura 4.2).

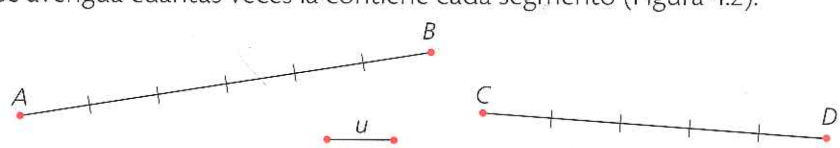


Figura 4.2

El segmento AB contiene seis veces a u, y el segmento CD contiene cinco veces a u. Por tanto, el primer segmento mide más que el segundo.

Ejemplo 2

Para hallar la longitud del segmento de la Figura 4.3 con ayuda del compás

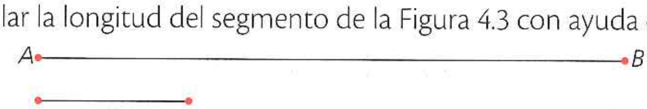


Figura 4.3

Se transporta u sobre $\overline{AB}$ hasta cubrirlo. La medida de $\overline{AB}$ es 4 u.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Indica la unidad que utilizarías para medir estas magnitudes.

a. La capacidad del tanque de gasolina de un carro.

b. La distancia entre Bogotá y Cali.

c. La masa de un frasco de café.

Ejercitación

2 Dibuja un segmento y mídelo con la regla graduada.

a. ¿Qué magnitud mediste?

b. ¿Cuánto mide el segmento que dibujaste?

c. ¿Qué unidad utilizaste?

Razonamiento

3 Relaciona cada situación con la unidad básica que mida su magnitud.

a. La estatura de los estudiantes de un salón.

b. El espacio que ocupa un ladrillo.

c. El tiempo que tarda una persona para llegar a una cita.

d. La sensación térmica de cierta ciudad.

e. La cantidad de líquido que hay en una botella.

f. La cantidad de masa que equilibra una balanza.

- metro cúbico
- gramo
- metro
- litro
- grado Celsius
- segundo

Resolución de problemas

4 Cada vez que dan un paso, Juana avanza 45 cm y Adriana 60 cm.

- ¿Cuántos pasos debe dar Juana para recorrer 2 250 cm?
- ¿Cuántos debe dar Adriana?

5 Para medir la longitud de una escalera de 12 m se utilizan tres reglas, A, B y C, que sirven como unidad patrón. Con la regla A la longitud es 6 m; con la B, 3 m, y con la C, 4 m.

a. Si se toma como unidad de longitud la regla más corta, ¿cuál será la longitud de las tres reglas, colocadas una tras otra?

b. Si se toma como unidad la regla más larga, ¿cuál es la longitud de las otras dos reglas?

Evaluación del aprendizaje

i Lee con atención.

La medida surge debido a la necesidad de informar a los demás de las actividades de caza y recolección, como por ejemplo: **a qué distancia** estaba la presa, **qué tiempo transcurría** para la recolección, **hasta dónde marcaban los límites** de la población, etc.

Todos los sistemas de medidas de longitud derivaron de las dimensiones del cuerpo humano (codo, pie...), de sus acciones y de las acciones de los animales.

Otros sistemas derivaron de los fenómenos cíclicos que afectaban la vida del hombre.

- ¿A qué tipo de medida se refieren los textos resaltados en la lectura?
- ¿Qué entiendes por fenómenos cíclicos y qué tipos de unidades se usan para medirlos?

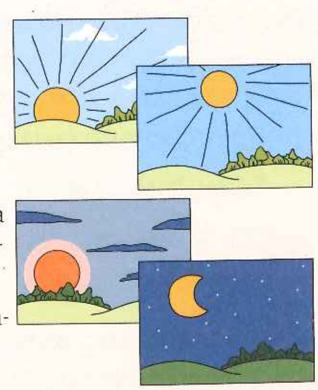
ii Los chibchas dividían un día así:

Sua Mena: desde la salida del sol hasta el mediodía.

Sua Meca: desde el mediodía hasta la puesta del sol.

Zasca: desde la puesta del sol hasta la medianoche.

Cagui: desde la medianoche hasta la nueva salida del sol.



- ¿Se puede decir con exactitud de cuántas horas consistía cada una de las divisiones del día para los chibchas? Explica.

2 Sistema sexagesimal

Saberes previos

Si giras un cuarto de vuelta a tu derecha y luego otro cuarto de vuelta más en el mismo sentido, ¿cómo describirías tu nueva posición? ¿Cuántos grados giraste en total?

Analiza

Carlos construyó una pared y desea saber si quedó formando un ángulo de 90° con respecto al piso.

- ¿Cómo puede saberlo?

Conoce

Carlos puede tomar una escuadra y disponerla de tal forma que los lados más cortos de esta coincidan con la pared y con el piso (Figura 4.4). Como los lados de la escuadra son perpendiculares, entonces la pared y el piso también lo son; esto significa que forman entre sí un ángulo de 90°.

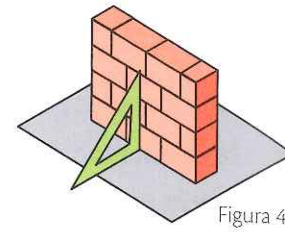


Figura 4.4

Un **grado** es la medida de un ángulo central al que corresponde una de las 360 partes iguales en que se divide una circunferencia. Se escribe 1°.

Para medir ángulos más pequeños que el grado se utilizan el minuto (1′) y el segundo (1″). Sus equivalencias son:

$1° = 60'$ $\qquad$ $1' = 60''$

Las unidades de medida de ángulos aumentan y disminuyen de 60 en 60. Por eso, este sistema de unidades se llama **sexagesimal**.

2.1 Adición y sustracción de medidas de ángulos

Para **adicionar** o **sustraer medidas de ángulos**, se adicionan o se sustraen las cantidades correspondientes a las mismas unidades.

En el caso de la adición, si una vez realizada la suma se obtiene más de 60 en los segundos o en los minutos, tal cantidad se convierte en la unidad superior correspondiente. En el caso de la sustracción, si alguna unidad del minuendo es menor que su correspondiente unidad del sustraendo, se realizan cambios en las unidades del minuendo teniendo en cuenta las equivalencias.

Ejemplo 1

Para sumar 31° 42′ 15″ con 25° 37′ 23″, se procede así:

$$\begin{array}{r} 31° \, 42' \, 15'' \\ +\, 25° \, 37' \, 23'' \\ \hline 56° \, 79' \, 38'' \end{array}$$

Como 79′ = 1° + 19′, entonces:

$$\begin{array}{r} 31° \, 42' \, 15'' \\ +\, 25° \, 37' \, 23'' \\ \hline 57° \, 19' \, 38'' \end{array}$$

Ejemplo 2

En el cálculo de 7° 21′ 43″ − 3° 56′ 24″ se tiene en cuenta que como 21 es menor que 56, se pasa uno de los grados a minutos y luego se sustrae. Así:

$$\begin{array}{r} 7° \, 21' \, 43'' \\ -\, 3° \, 56' \, 24'' \\ \hline \end{array} \rightarrow \quad 7° \, 21' \, 43'' = 6° \, 81' \, 43'' \quad \rightarrow \begin{array}{r} 6° \, 81' \, 43'' \\ -\, 3° \, 56' \, 24'' \\ \hline 3° \, 25' \, 19'' \end{array}$$

Ejemplo 3

Juan debe construir dos ángulos que sean suplementarios. Si uno de ellos mide 169° 45′ 02″, hallamos su diferencia con respecto a 180° o lo que es equivalente a 179° 59′ 60″.

$$\begin{array}{r} 179^\circ\ 59'\ 60'' \\ -\ 169^\circ\ 45'\ 02'' \\ \hline 10^\circ\ 14'\ 58'' \end{array}$$

El ángulo suplementario de 160° 45' 02" mide 10° 14′ 58′′.

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Expresa en grados, minutos y segundos cada medida angular.

a. 168″ b. 6 427″ c. 44 469″

d. 83 775″ e. 21 342″ f. 117 952″

2 Expresa en grados cada medida angular.

a. 3′ 40″ b. 8° 5′ 31″ c. 8° 46′ 52″

d. 17° 43′ 25″ e. 45° 36′ 20″ f. 90° 45′ 30″

3 Realiza las siguientes operaciones.

a. 39° 17′ 43″ + 52° 48′ 30″

b. 46° 53′ 8″ + 20° 6′ 53″

c. 70° 18′ 33″ − 49° 20′ 15″

d. 65° 34′ 28″ − 5° 17′ 38″

4 Halla la medida de un ángulo que sumada a la del ángulo de la Figura 4.5 dé la medida de un ángulo recto.

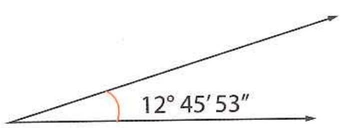


Figura 4.5

5 Halla la medida del ángulo que se pide en cada caso.

a. El complemento de 34° 25′ 37″.

b. El suplemento de 129° 45′ 45″.

c. El complemento de 50° 28′ 36″.

d. El suplemento de 76° 59′ 39″.

Resolución de problemas

6 Cuánto miden los ángulos *B*, *C* y *D* del paralelogramo de la Figura 4.6?

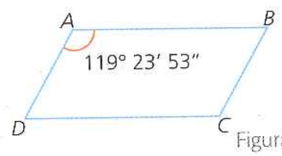


Figura 4.6

7 Determina la medida de cada uno de los ángulos congruentes de un triángulo isósceles, considerando que su ángulo desigual mide 70°.

Evaluación del aprendizaje

i Observa el ejemplo y resuelve.

$$\begin{array}{r} 12^\circ\ 21'\ 43'' \\ \times\qquad\quad 4 \\ \hline 48^\circ\ 84'\ 172'' \end{array}$$

Se multiplican los grados, minutos y segundos por el número natural dado.

$$\begin{array}{r} 2'\ 52'' \\ \hline 48^\circ\ 86'\ 52'' \\ 1^\circ\ 26' \\ \hline 49^\circ\ 26'\ 52'' \end{array}$$

Como los segundos y minutos se pasan de 60, se expresan de forma compleja y se suman minutos con minutos y grados con grados, respectivamente.

a. 2 · (44° 30′ 12″) b. 5 · (10° 24′ 8″)

c. 3 · (28° 45′ 32″) d. 6 · (18° 5′ 41″)

ii Consulta el procedimiento para dividir la medida de un ángulo entre un número natural y realiza las divisiones.

a. (64° 29′) ÷ 3 b. (43° 7′ 5″) ÷ 7

3 Unidades de longitud. Conversiones

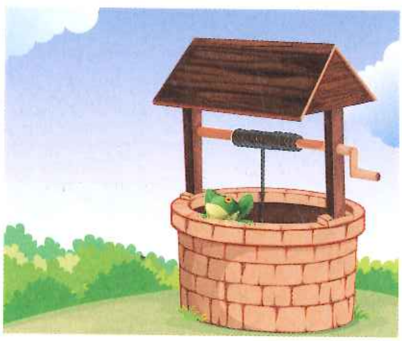
Saberes previos

Explica cómo efectúas multiplicaciones abreviadas por 10, 100, 1 000... Luego, aplica tu estrategia para obtener cada producto.

- $5{,}731 \times 10$
- $45{,}203 \times 100$
- $0{,}00035 \times 1\,000$
- $21 \times 10\,000$

Analiza

Una rana cae en un pozo de 7 metros de profundidad. Cada día sube 0,4 dam y resbala 0,3 dam.



- ¿Cuántos días tardará en salir del pozo?

Conoce

Antes de resolver la situación, es conveniente expresar todas las medidas en la misma unidad, en este caso, en metros. Así:

$$0{,}4 \text{ dam} = (0{,}4 \times 10) \text{ m} = 4 \text{ m y } 0{,}3 \text{ dam} = (0{,}3 \times 10) \text{ m} = 3 \text{ m}$$

Por lo tanto, durante el primer día la rana asciende 4 metros y se resbala 3, por lo que queda a 1 metro del piso. El segundo día sube 4 metros desde donde se hallaba y se resbala 3 metros, así que al final de ese día está a 2 metros del suelo. El tercer día sube 4 metros y llega a avanzar hasta los 6 metros pero se resbala 3 metros, o sea que queda a 3 metros del suelo. El cuarto día sube 4 metros y logra salir del pozo.

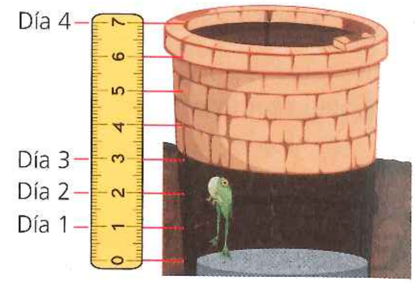


Figura 4.7

3.1 El metro. Múltiplos y submúltiplos

La unidad de medida de longitud en el SI es **el metro** (m). El decímetro (dm), el centímetro (cm) y el milímetro (mm) son sus **submúltiplos**, y el decámetro (dam), el hectómetro (hm) y el kilómetro (km) son sus **múltiplos**.

3.2 Conversión de unidades de longitud

Cada unidad de longitud es diez veces mayor que la unidad inmediata inferior y diez veces menor que la unidad inmediata superior.

Para realizar conversiones de unidades de longitud, se multiplica o se divide por 10 (Figura 4.8).

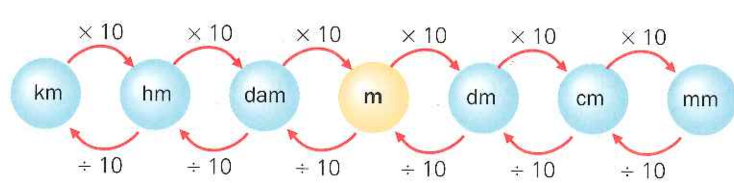


Figura 4.8

Ejemplo 1

Para hacer una conversión de una unidad mayor a una menor, se multiplica por 10 tantas veces como lugares haya de una unidad a otra.

$$175 \text{ cm} \cdot \underbrace{10}_{\text{Un lugar, de centímetros a milímetros}} = 1\,750 \text{ mm}$$

Para hacer una conversión de una unidad menor a una mayor, se divide por 10 tantas veces como lugares haya de una unidad a otra.

$$22 \text{ m} \div \underbrace{1\,000}_{\text{Tres lugares, de metros a kilómetros}} = 0{,}022 \text{ km}$$

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Determina si las igualdades son verdaderas (V) o falsas (F). Justifica tus respuestas.

a. 6 540 m = 6 dam + 5 m + 4 dm + 0 cm

b. 95 803 cm = 9 hm + 5 dam + 8 m + 3 cm

c. 4 629 mm = 4 dam + 6 dm + 2 dm + 9 cm

d. 92 588 dm = 9 km + 2 hm + 5 dam + 8 m + 8 dm

2 Analiza y responde.

a. ¿Cuántos metros hay en un kilómetro?

b. ¿Cuántas veces es mayor un metro que un milímetro?

c. ¿Cuántos centímetros hay en un decámetro?

d. ¿Cuántas veces es mayor un kilómetro que un milímetro?

e. ¿Cuántos milímetros hay en un decámetro?

Ejercitación

3 Lee y expresa en tu cuaderno, usando diferentes unidades, estas longitudes.

a. 12 m | b. 5 dm
c. 7 dam | d. 3 hm
e. 10 km | f. 6 dm
g. 54 m | h. 79 hm

Razonamiento

4 Copia en tu cuaderno estas longitudes usando diferentes unidades.

a. 23 dam = $\boxed{\quad}$ dm = $\boxed{\quad}$ mm

b. 0,75 m = $\boxed{\quad}$ cm = $\boxed{\quad}$ mm

c. 2,5 km = $\boxed{\quad}$ m = $\boxed{\quad}$ cm

5 Ordena de menor a mayor las medidas en cada caso.

a. 2,5 dam   2 400 dm   0,075 km   250 000 mm

b. 3 m   24 dam   21 hm   2 km

Resolución de problemas

6 Si una lámina de 6 m de largo por 4 m de ancho se recortara en cuadrados de 1 cm de lado y se pusieran todos en fila, ¿qué longitud se alcanzaría?

7 El agua de una piscina alcanza 250 cm de altura. Si la estatura de Pablo es 1 520 mm, ¿podrá estar de pie dentro de la piscina sin que el agua lo cubra? ¿Por qué?

Evaluación del aprendizaje

i Lina quiere confeccionar una hamaca wayuu de 3 m y otra de 4,6 m. Si para ello cuenta con una tela de 5 m, ¿cuántos cm de tela le hacen falta?

ii Lee y resuelve.

Daniel compró 6 yardas de tela para diseñar ruanas, pagó con 1 billete de $ 20 000 y con uno de $ 10 000 y le devolvieron $ 5 322. ¿A cómo pagó el metro de tela?

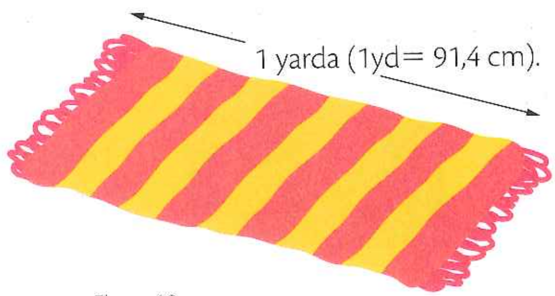


Figura 4.9

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

A las personas se les han asignado roles según su género. Lee este caso: Juan y Luisa fueron a buscar empleo a una constructora. A él le asignaron pintar una columna de 30 m de alto, mientras que Luisa deberá pintar una de 100 dm. ¿Quién pintará la columna más larga? ¿Por qué crees que tienen trabajos diferentes?

4 Perímetro de figuras planas

Saberes previos

Un atleta trota alrededor de un parque rectangular de 200 metros de largo por 50 metros de ancho. ¿Cómo averiguas cuántos metros cubre en cada recorrido alrededor del parque? Explica.

Analiza

Andrés quiere enmarcar una pintura de forma rectangular.

- Si las dimensiones de la pintura son 25 cm de largo por 17 cm de ancho, ¿cuántos centímetros de marco de madera debe comprar?

Conoce

Para saber cuánto marco debe comprar, Andrés debe calcular la medida del contorno del cuadro. Esto lo logra adicionando las medidas de todos sus lados.

$$P = 25 \text{ cm} + 17 \text{ cm} + 25 \text{ cm} + 17 \text{ cm} = 84 \text{ cm}$$

Figura 4.10

Andrés necesita 84 cm de marco para encuadrar la pintura.

El **perímetro de una figura plana** corresponde a la medida lineal de su contorno. Se calcula mediante la adición de las medidas de sus lados.

Ejemplo 1

Juanita pinta cuadros en partes que luego une para formar una pintura completa. Observa en la Figura 4.11 las tres partes que ella pintó y cómo calculó el perímetro de la pintura resultante.

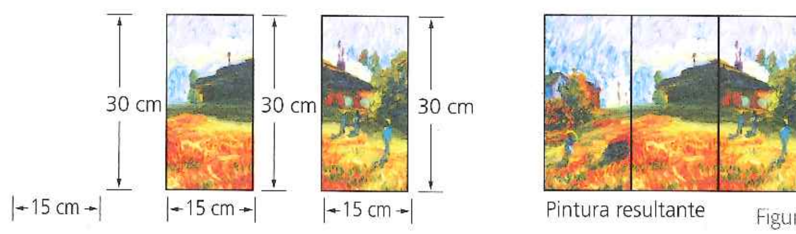


Figura 4.11

Perímetro de la pintura resultante:

$$30 \text{ cm} + 15 \text{ cm} + 15 \text{ cm} + 15 \text{ cm} + 30 \text{ cm} + 15 \text{ cm} + 15 \text{ cm} + 15 \text{ cm} = 150 \text{ cm}$$

Ejemplo 2

Se quiere cercar con malla la zona de cultivo de una granja autosuficiente que tiene la forma de un pentágono regular. (Figura 4.12).

Para calcular la cantidad de metros lineales de malla necesaria para encerrar el terreno, primero se expresa en esa unidad la longitud de su lado y luego se suma cinco veces ese valor, o lo que es equivalente, se le multiplica por 5.

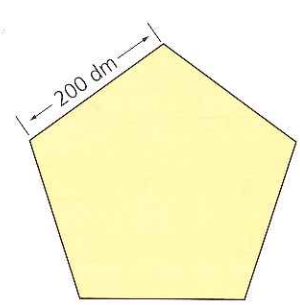


Figura 4.12

$$200 \text{ dm} = 200 \div 10 = 20 \text{ m}$$

$$P = 20 \text{ m} + 20 \text{ m} + 20 \text{ m} + 20 \text{ m} + 20 \text{ m}$$

$$P = 5 \cdot 20 \text{ m} = 100 \text{ m}$$

Se deben comprar 100 metros lineales de malla.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Halla el perímetro de las figuras que son regulares.

a.

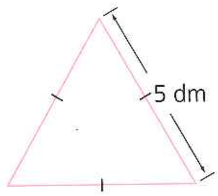


Figura 4.13

b.

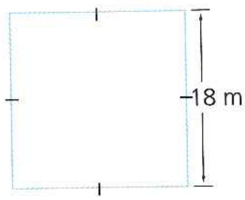


Figura 4.14

c.

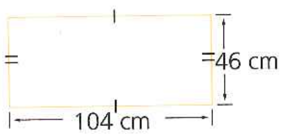


Figura 4.15

d.

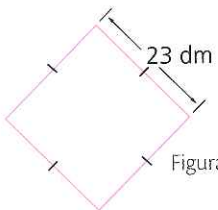


Figura 4.16

Comunicación

2 Observa los polígonos y discute con tus compañeros sobre el procedimiento que se debe seguir para calcular sus perímetros. Explica qué ocurre con el perímetro de cada polígono si se duplica cada uno de sus lados.

a.

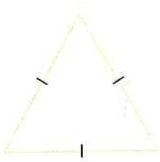


Figura 4.17

b.

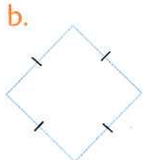


Figura 4.18

c.

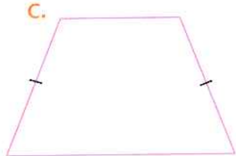


Figura 4.19

Razonamiento

3 Determina el perímetro de los polígonos regulares de las figuras 4.20 y 4.21. Explica qué ocurre con el perímetro de cada polígono si se reduce a su tercera parte cada uno de sus lados.

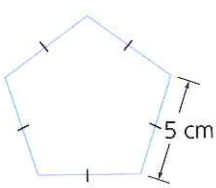


Figura 4.20

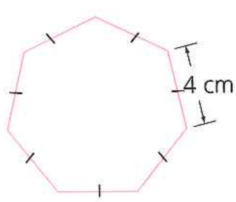


Figura 4.21

Resolución de problemas

4 Frente a la casa de Sebastián hay un parque de forma rectangular que mide 75 m de largo por 4 dam de ancho. ¿Cuál es el perímetro del parque en metros?

5 Sebastián trota todos los fines de semana alrededor del parque. ¿Cuál es la distancia que recorre en metros durante un mes si le da al parque 12 vueltas cada sábado y 12 cada domingo?

6 Pablo compró un apartaestudio, cuyas dimensiones se muestran en la Figura 4.22. Si quiere instalar guardaescoba por todo el borde del apartaestudio, ¿cuántos metros de material debe comprar?

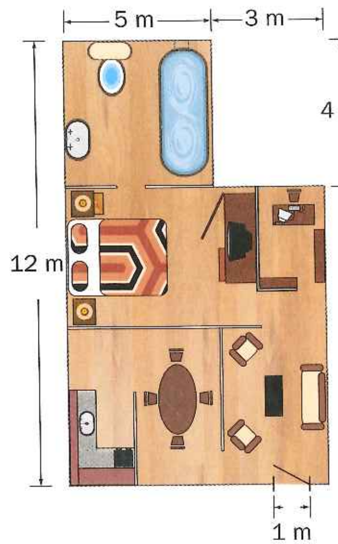


Figura 4.22

7 El largo de una cancha de fútbol mide 90 m y el ancho mide $\frac{3}{4}$ del largo.

Explica un procedimiento para determinar cuántos metros recorre una persona si da 5 vueltas completas a la cancha.

Evaluación del aprendizaje

i Averigua cuál perímetro es mayor, el de un hexágono regular de 5 dm de lado o el de un triángulo equilátero de 50 cm de lado.

ii Un hexágono regular tiene 120 cm de perímetro. ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado con ese mismo perímetro? ¿Cuánto mide el lado de un decágono regular con ese mismo perímetro?

5 Unidades de superficie. Conversiones

Saberes previos

De una hoja cuadriculada, corta una sección rectangular que tenga 30 cuadritos de ancho y 50 de largo. ¿Cuántos cuadritos tiene esta sección en total? Explica la estrategia que seguiste para contarlos.

Analiza

Un metro equivale a 10 dm.

- ¿Cuántos cuadrados de 1 dm de lado caben en un cuadrado de 1 m de lado?

Conoce

Como un metro tiene 10 dm, entonces cada lado del cuadrado grande se puede dividir en 10 partes de 1 dm de lado. Así, el cuadrado grande se puede dividir en 100 cuadrados de 1 dm de lado (Figura 4.23).

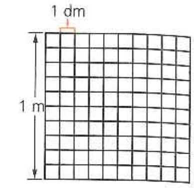


Figura 4.23

La **unidad de medida de superficie** es el **metro cuadrado** (m^2), que es la superficie de un cuadrado de 1 m de lado. El decímetro cuadrado, el centímetro cuadrado y el milímetro cuadrado son los submúltiplos del metro cuadrado, y el decámetro cuadrado, el hectómetro cuadrado y el kilómetro cuadrado son sus múltiplos.

El metro cuadrado se divide en 100 partes iguales; cada una de ellas es un **decímetro cuadrado** ($1\ dm^2 = 0{,}01\ m^2$).

Cada decímetro cuadrado se divide en 100 partes iguales; cada parte es un **centímetro cuadrado** ($1\ cm^2 = 0{,}0001\ m^2$).

A su vez, cada centímetro cuadrado también se divide en 100 partes iguales; cada una es un **milímetro cuadrado** ($1\ mm^2 = 0{,}000001\ m^2$).

Ejemplo 1

Si el cuadrado grande de la Figura 4.24 tiene una superficie de 1 m^2, cada uno de los 100 cuadrados que lo componen tiene una superficie de 1 dm^2. Si, a la vez, cada dm^2 se descompone en 100 cuadrados iguales, cada uno de estos tendrá una superficie de 1 cm^2. Así, en un cuadrado de 1 m^2 de superficie caben 10 000 cuadrados de 1 cm^2 de superficie.

De manera similar, puede deducirse que en un cuadrado de 1 m^2 de superficie caben 1 000 000 de cuadrados de 1 mm^2 de superficie.

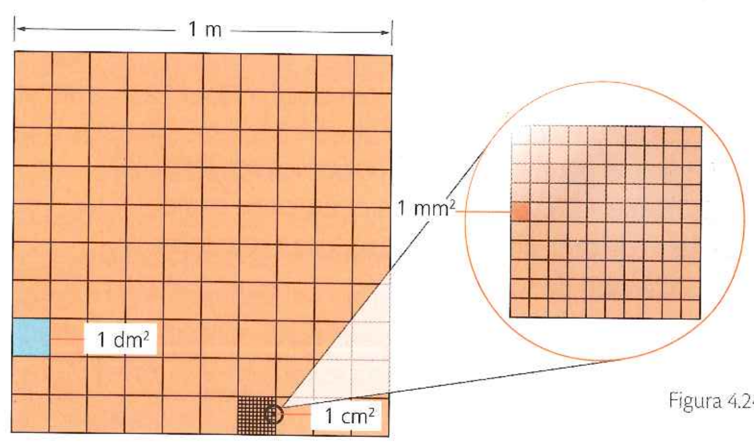


Figura 4.24

De otra parte, cada decámetro cuadrado se divide en 100 cuadrados de 1 m^2 de superficie ($1\ dam^2 = 100\ m^2$); cada hectómetro cuadrado se divide en 10 000 cuadrados de 1 m^2 de superficie ($1\ hm^2 = 10\,000\ m^2$), y cada kilómetro cuadrado se separa en 1 000 000 de cuadrados de 1 m^2 de superficie ($1\ km^2 = 1\,000\,000\ m^2$).

5.1 Unidades agrarias

Las medidas de superficie que no pertenecen al SI y que se usan para medir terrenos agrícolas se denominan **unidades agrarias**.

Las unidades agrarias son el área (a), la hectárea (ha) y la centiárea (ca). El **área** (a) es la superficie de un cuadrado de 10 m de lado. Un área se divide en 100 partes iguales; cada una de ellas es una **centiárea** (ca). Un múltiplo del área es la **hectárea** (ha), que equivale a 100 áreas (Figura 4.25).

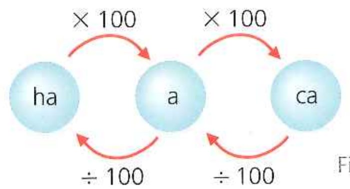


Figura 4.25

La hectárea también equivale a 1 hm^2, o sea, a 10 000 m^2, y corresponde a la superficie que ocupa un cuadrado de 100 metros de lado.

La hectárea se utiliza para medir grandes superficies (como bosques o plantaciones).

Ejemplo 2

Para saber cuántos decímetros cuadrados hay en 3 hectáreas, primero se calcula a cuántos metros cuadrados equivalen.

$$3 \cdot 10\,000\ m^2 = 30\,000\ m^2$$

Como en un cuadrado de 1 m^2 de superficie caben 100 cuadrados de 1 dm^2 de superficie, entonces en 30 000 m^2 hay 3 000 000 dm^2.

Así, 3 hectáreas equivalen a 3 000 000 dm^2.

Ejemplo 3

Jaime cultiva trigo. Él sabe que para obtener los mejores beneficios debe sembrar 300 semillas por metro cuadrado de terreno.

Como Jaime quiere saber cuántas semillas debe conseguir para cultivar una hectárea de terreno, él hace el siguiente análisis:

1 hectárea cubre una superficie de 10 000 m^2, y como por cada metro cuadrado se necesitan 300 semillas, entonces para la hectárea se requieren $300 \cdot 10\,000 = 3\,000\,000$ de semillas.

Para saber cuántos kilogramos de semilla debe comprar, Jaime debe multiplicar el número de semillas por 1,2 gramos, que es el peso de una semilla.

$3\,000\,000 \cdot 1{,}2 = 3\,600\,000$ gramos, es decir, 3 600 kilogramos.

Jaime necesita conseguir 3 600 kilogramos de semilla, esto es 3,6 toneladas.

5.2 Conversión de unidades de superficie

En las **unidades de superficie**, al ser de dos dimensiones (ancho y largo), el valor de cada unidad es 100 veces ($10 \cdot 10 = 100$) mayor que la unidad inmediatamente inferior y 100 veces menor que la inmediatamente superior.

El esquema de la Figura 4.26 muestra cómo convertir cualquier unidad métrica de superficie en otras.

$$
\begin{tikzcd}
\text{km}^2 \arrow[r, bend left, "\times 100"] & \text{hm}^2 \arrow[l, bend left, "\div 100"] \arrow[r, bend left, "\times 100"] & \text{dam}^2 \arrow[l, bend left, "\div 100"] \arrow[r, bend left, "\times 100"] & \text{m}^2 \arrow[l, bend left, "\div 100"] \arrow[r, bend left, "\times 100"] & \text{dm}^2 \arrow[l, bend left, "\div 100"] \arrow[r, bend left, "\times 100"] & \text{cm}^2 \arrow[l, bend left, "\div 100"] \arrow[r, bend left, "\times 100"] & \text{mm}^2 \arrow[l, bend left, "\div 100"]
\end{tikzcd}
$$

Figura 4.26

Ejemplo 4

Para convertir 5 000 000 cm^2 a mm^2, se multiplica por 100.

$$5\,000\,000 \text{ cm}^2 \cdot 100 = 500\,000\,000 \text{ mm}^2$$

Para convertir 5 000 000 cm^2 a m^2, se divide entre $100 \cdot 100 = 10\,000$.

$$5\,000\,000 \text{ cm}^2 \div 10\,000 = 500 \text{ m}^2$$

Para convertir 5 000 000 cm^2 a dam^2, se divide entre $100 \cdot 100 \cdot 100 = 1\,000\,000$.

$$5\,000\,000 \text{ cm}^2 \div 1\,000\,000 = 5 \text{ dam}^2$$

Una hectárea equivale a 1 hm^2, o sea, a 10 000 m^2. La Tabla 4.1 muestra otras relaciones entre las unidades agrícolas y las métricas.

× 100 ÷ 100

SI	km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
Unidades agrarias		ha	a	ca			

× 100 ÷ 100

Tabla 4.1

Ejemplo 5

Un área equivale a 100 m^2, es decir, a 1 dam^2.

$$1 \text{ a} = 100 \text{ m}^2 = 1 \text{ dam}^2$$

Ejemplo 6

Para expresar 6 hm^2 y 500 cm^2, se procede así:

$$6 \text{ hm}^2 \overset{\times 100}{=} 600 \text{ dam}^2 \overset{\times 100}{=} 60\,000 \text{ m}^2 \qquad 500 \text{ cm}^2 \overset{\div 100}{=} 5 \text{ dm}^2 \overset{\div 100}{=} 0{,}05 \text{ m}^2$$

Expresa en la unidad indicada.

a. 1 ha en m^2

b. 30 000 m^2 en hectáreas

a. $1 \text{ ha} = 1 \text{ hm}^2 = 10\,000 \text{ m}^2$ **b.** $30\,000 \text{ m}^2 = 30\,000 \text{ ca} = 3 \text{ ha}$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Expresa las cantidades en la unidad que se pide.

a. 10 000 m^2 en hm^2

b. 500 000 km^2 en m^2

2 Expresa las siguientes superficies en áreas.

a. 1 000 ca b. 5 ha

c. 2 ha 50 a d. 2 ca 3 a

3 Pasa estas medidas a hectáreas.

a. 100 000 m^2 b. 1 400 dam^2

c. 35 km^2 d. 8 278 m^2

4 Pasa a metros cuadrados estas medidas.

a. 2 cm^2 b. 2 a

c. 500 dm^2 d. 2,5 a

e. 42 ca f. 27 dm^2

g. 1,5 ha h. 0,5 ca

5 Expresa en áreas las superficies que se proponen.

a. 2 hm^2 b. 2 700 dm^2

c. 1 000 ca d. 5 ca

e. 5 dam^2 f. 2 ha

6 Expresa las superficies en metros cuadrados.

a. 5 dam^2 6 m^2

b. 2 hm^2 200 dm^2

c. 3 km^2 2 dam^2

d. 3 dam^2 8 hm^2

Comunicación

7 Indica cuál sería la unidad de medición más adecuada para calcular la superficie de los siguientes elementos.

a. Una hoja de tu cuaderno

b. La cabeza de un alfiler

c. El campo de fútbol de un estadio

d. Un cultivo de palma africana

e. El tablero del salón

f. Una huella digital

Resolución de problemas

8 El patio de una casa está cubierto de baldosas que tienen 60 cm^2 de superficie cada una. Si el patio tiene una superficie de 15 m^2, ¿cuántas baldosas cubren el piso?

9 Los hexágonos de la Figura 4.27 tienen cada uno una superficie de 8 cm^2. Observa y calcula las superficies que se piden en la unidad que se indica.

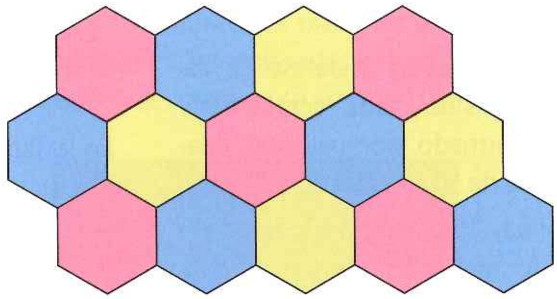


Figura 4.27

a. La de los hexágonos azules en m^2

b. La de los hexágonos rojos en dm^2

c. La de los hexágonos verdes en cm^2

d. La de todos los hexágonos en mm^2

10 Un conjunto residencial está formado por 135 apartamentos de tres tipos; los más grandes tienen una superficie de 62 m^2, los medianos tienen una superficie de 54 m^2 y los más pequeños o apartaestudios tienen 40 m^2. Si el metro cuadrado cuesta \$ 1 200 000, ¿cuánto se debe pagar por un apartamento de cada área?

Evaluación del aprendizaje

i Calcula en hectáreas las superficies.

a. Un conjunto residencial que tiene una superficie de 6 000 m^2.

b. Una cancha de fútbol que tiene una superficie de 7 200 m^2.

Razonamiento

ii Ordena las siguientes superficies de mayor a menor y expresa cada una de ellas en hectáreas.

a. 5 hm^2, 2 km^2, 30 dam^2, 5 000 000 mm^2

b. 450 000 cm^2, 345 000 cm^2, 345 000 dam^2

6 Área de figuras planas

Saberes previos

Si el piso de un salón de clases se cubre totalmente con 100 cuadrados iguales y cada uno de estos se corta por la diagonal, ¿qué figuras se obtienen y cuántas cubren el piso?

Analiza

El piso del salón de danzas de Valentina es de forma rectangular y está formado por baldosas cuadradas de 50 cm de lado cada una.

- Si hay 10 baldosas a lo largo y 5 a lo ancho del salón, ¿cuál es la superficie del piso del salón?

Conoce

La Figura 4.28 muestra el piso del salón de danzas de Valentina. Se observa que en total hay $10 \cdot 5 = 50$ baldosas.

Cada baldosa tiene un área de $50 \text{ cm} \cdot 50 \text{ cm} = 2\,500 \text{ cm}^2$

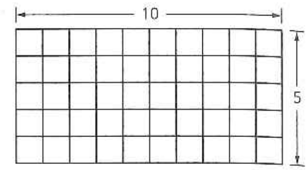


Figura 4.28

Por tanto, el piso del salón tiene una superficie de $50 \cdot 2\,500 \text{ cm}^2 = 125\,000 \text{ cm}^2$, que corresponden a $12{,}5 \text{ m}^2$ de superficie.

El **área** es la medida de la región o superficie encerrada por una figura geométrica plana. Para medir el área se utilizan **unidades cuadradas**.

En la Tabla 4.2 se muestra la expresión para calcular el área de algunas figuras planas.

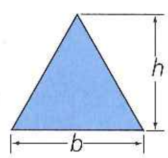
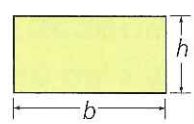
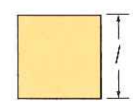
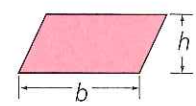
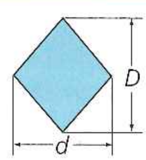
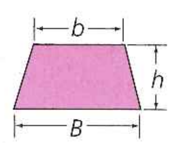
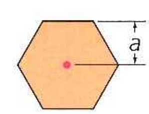
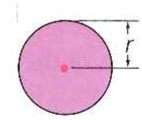
Triángulo	Rectángulo	Cuadrado	Paralelogramo
			
$A = \frac{b \cdot h}{2}$ b: Base h: Altura	$A = b \cdot h$ b: Base h: Altura	$A = l^2$ l: lado	$A = b \cdot h$ b: Base h: Altura
Rombo	**Trapecio**	**Polígono regular**	**Círculo**
			
$A = \frac{D \cdot d}{2}$ D: Diagonal mayor d: Diagonal menor	$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$ B: Base mayor b: Base menor h: Altura	$A = \frac{P \cdot a}{2}$ P: Perímetro a: Apotema	$A = \pi \cdot r^2$ r: Radio $\pi \approx 3{,}14$

Tabla 4.2

Ejemplo 1

Si cada uno de los lados de un cuadrado se duplica, su área queda multiplicada por 4.

Así, si un cuadrado tiene como lado 2 cm, su área es 4 cm^2 y al duplicar su lado, el cuadrado que se obtiene tiene como lado 4 cm y como área $16 \text{ cm}^2 = 4 \times (4 \text{ cm}^2)$.

En general, si el lado de un polígono se multiplica por un factor k, su área queda multiplicada por k^2.

Si se construye una cometa de $2{,}5 \text{ m}^2$ y un modelo tres veces mayor, el área de la nueva cometa será $9 \times 2{,}5 \text{ m}^2 = 22{,}5 \text{ m}^2$.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Dibuja en tu cuaderno cada figura que se propone y expresa el valor de su área en centímetros cuadrados.

a. Un cuadrado de lado 250 mm.

b. Un trapecio de base mayor 0,25 m, base menor 1,5 dm y altura 10 cm.

c. Un rectángulo de base 0,004 dam y altura 1,5 dm.

d. Un triángulo rectángulo de base 5 cm y altura 30 mm.

Comunicación

2 Explica qué ocurre con las áreas de cada una de las figuras del ejercicio anterior si cada una de sus dimensiones se triplican.

Razonamiento

3 Determina las medidas de los elementos de un rectángulo, un triángulo, un rombo y un trapecio para que el área de cada uno sea de 600 m^2.

4 Calcula la superficie de la alfombra rectangular de la Figura 4.29.

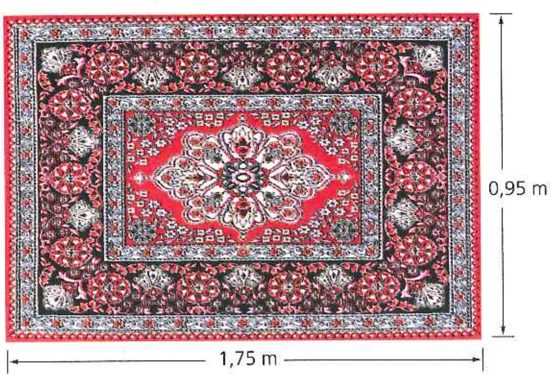


Figura 4.29

Resolución de problemas

5 El suelo de una cocina mide 4 m de largo y 2,5 m de ancho. Se desea cubrirlo con baldosas cuadradas de 25 cm de lado.

a. ¿Se necesita un número exacto de baldosas?

b. ¿Cuántas baldosas se deben comprar?

6 Un terreno de 5 ha está avaluado en $ 45 000 000 y se desea vender por metros cuadrados.

¿Cuál es el precio del metro cuadrado?

7 Se desea vender un terreno cuya superficie es media hectárea.

¿Cuánto cuesta el terreno si el valor del metro cuadrado es $ 275 000?

8 La Figura 4.30 muestra el plano de una habitación (sus medidas están expresadas en metros).
Halla el área del rectángulo ampliado seis veces.

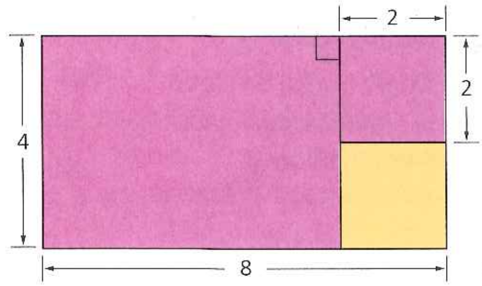


Figura 4.30

Si se va a cubrir el área morada con baldosas cuadradas de 30 cm de lado, ¿cuántas baldosas se necesitarán?

Evaluación del aprendizaje

i Se ubica un cuadrado pequeño de 3 cm de lado dentro de uno grande de 7 cm de lado. ¿Cuál es el área de la región fuera del cuadrado pequeño pero dentro del cuadrado grande?

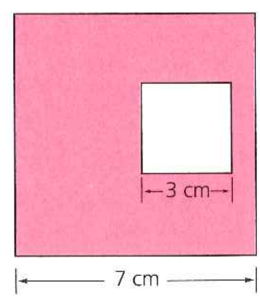


Figura 4.31

ii Se toman varios cubos de 4 cm de arista para construir la estructura de la Figura 4.32 ¿Cuál es la medida de la superficie lateral de la estructura incluyendo la base y la parte superior de esta?

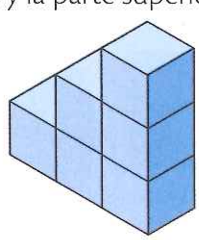


Figura 4.32

7 Longitud de la circunferencia y área de figuras circulares

Saberes previos

Martín debe medir el contorno de una circunferencia e intenta usar una regla sin lograrlo. ¿Qué le sugerirías para que consiga el objetivo?

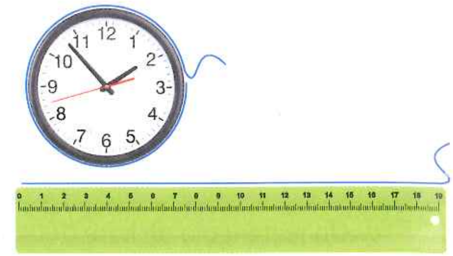
Analiza

Para la tarea de matemáticas, Juana debe hallar el perímetro de un objeto con forma circular.

- Si Juana escogió el reloj de pared de su casa, ¿qué podría hacer para tomar esa medida?

Conoce

Como el perímetro del reloj es equivalente a la medida de su contorno, Juana puede envolverlo con una cuerda, luego quitarla y medir la longitud de la cuerda desde su extremo hasta donde la estaba sujetando.



Una **circunferencia** está formada por los puntos que están a igual distancia de un punto llamado **centro**. El **círculo** o **región circular** es la unión de la circunferencia y su interior.

7.1 Longitud de la circunferencia

La **longitud de una circunferencia** se obtiene al multiplicar la longitud del diámetro (d) por el valor constante π (aproximadamente 3,14).

$$L = \pi \cdot d$$

Como la longitud del diámetro es el doble de la del radio (r), se tiene que:

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Ejemplo 1

El diámetro (d) ecuatorial de la Tierra es de 12 742 km. Para hallar la longitud de la circunferencia en el paralelo del ecuador, se debe tener en cuenta que $d = 2 \cdot r$; así que, $r = 6371$ km.

$$L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6371 \text{ km} = 40\,009{,}88 \text{ km}$$

Esta es la distancia que caminaríamos alrededor de la línea del ecuador.

7.2 Área de figuras circulares

El **área del círculo** es igual al producto del número π por el cuadrado del radio.

$$A = \pi \cdot r^2$$

Ejemplo 2

Matías está atado a una correa de 4 m de largo, como se observa en la Figura 4.33. Para determinar el área del espacio por el que se puede desplazar Matías, se debe hallar el área del círculo de radio 4 m, así:

$$A = \pi \cdot (4 \text{ m})^2 = 50{,}24 \text{ m}^2$$

Figura 4.33

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Calcula la longitud de cada circunferencia y el área del círculo correspondiente de acuerdo con el radio o el diámetro establecido.

a. $d = 56$ cm

b. $r = 0{,}5$ km

c. $r = 125$ m

d. $d = 1\,428$ mm

2 Halla el radio de cada círculo según su área.

a. $A = 50{,}2656$ cm^2

b. $A = 28{,}2744$ m^2

c. $A = 452{,}16$ mm^2

3 Determina el área de la Figura 4.34.

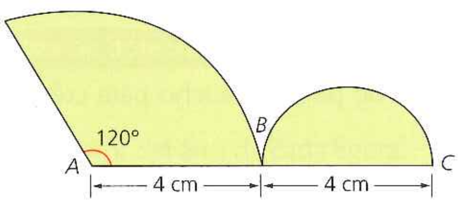


Figura 4.34

4 Halla el área de la región sombreada en cada caso. Explica tu estrategia.

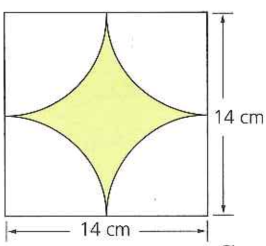


Figura 4.35

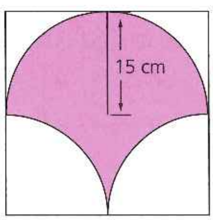


Figura 4.36

Resolución de problemas

5 De un trozo cuadrado de cartulina, Diana recortó un círculo de 20 cm de diámetro (Figura 4.37). ¿Qué cantidad de cartulina se desperdició?

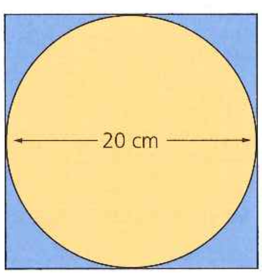


Figura 4.37

6 Calcula el área de la región sombreada.

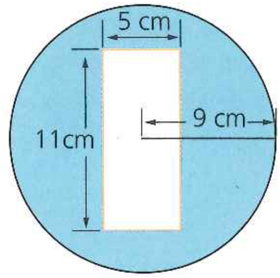


Figura 4.38

7 La plazoleta de un centro comercial es de forma circular y tiene 500 m de radio. Dentro de ella se instalará un escenario circular cuyo radio es de 25 m. Calcula el área de la plazoleta que no se cubrirá con el escenario.

8 Un artesano ubicó un espejo de forma circular dentro de un marco rectangular de madera (Figura 4.39). ¿Cuál es el área del marco que soporta el espejo?

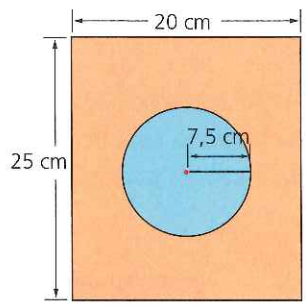


Figura 4.39

Evaluación del aprendizaje

i Una empresa diseña etiquetas para CD. Sabiendo que el radio del círculo mayor mide 6,2 cm y el del círculo menor, la abertura en el centro, mide 0,6 cm aproximadamente, ¿qué cantidad de papel se utiliza en cada CD?

ii Juan quiere hallar el área del círculo de la Figura 4.40. Para ello, separa el círculo en 13 regiones, que luego corta con el fin de formar la Figura 4.41. ¿Cómo podrías calcular el área de manera aproximada de esta figura? Inventa una estrategia para ello.

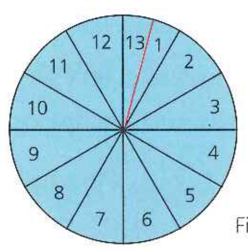


Figura 4.40

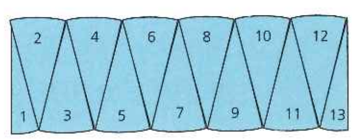


Figura 4.41

8 Área de figuras compuestas

Saberes previos

Gabriel dibujó un cuadrado y un círculo que encajaba perfectamente en su interior. ¿Cómo podría él saber el área de ese círculo?

Analiza

Un jardín infantil tiene una zona de descanso como el de la Figura 4.42 que se desea recubrir con un piso de caucho.

- ¿Cuánto medirá el área a cubrir?

Conoce

La Figura 4.42 está compuesta por dos semicírculos y un rectángulo. Los dos semicírculos completan un círculo. Por tanto, hay que calcular el área de un rectángulo y un círculo.

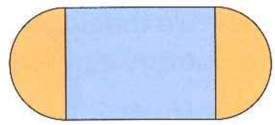


Figura 4.42

Área del círculo + Área del rectángulo = Área total

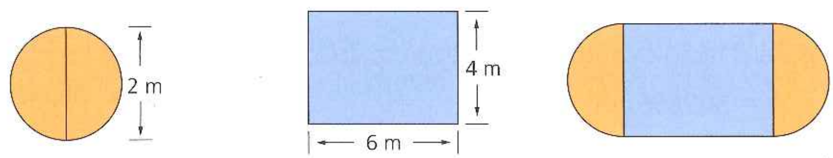


Figura 4.43

$r^2 \cdot \pi$ + $b \cdot h$ = Área total

El radio del círculo mide 2 m.

$$\pi\,(2\text{ m})^2 + 6\text{m} \cdot 4\text{ m} = \text{Área total}$$

$$12{,}56\text{ m}^2 + 24\text{ m}^2 = 36{,}56\text{ m}^2$$

Luego se van a necesitar 36,56 m^2 de piso de caucho para cubrir la zona de descanso.

Para encontrar el **área de una figura compuesta**, se divide la figura dada en figuras geométricas cuyas áreas sean conocidas, como triángulos, rectángulos y círculos o partes de un círculo.

Ejemplo 1

Se debe calcular el área de la siguiente figura.

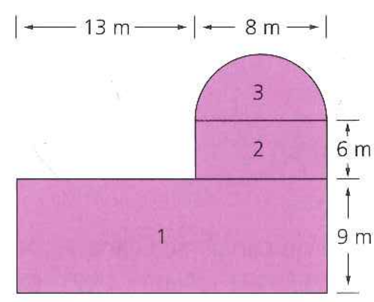


Figura 4.44

Para ello, se divide la figura en tres partes y se calcula el área de cada una.

1. Área del rectángulo $= 21 \cdot 9 = 189\text{ m}^2$
2. Área del rectángulo $= 8 \cdot 6 = 48\text{ m}^2$
3. Área del semicírculo $= \dfrac{3{,}14 \cdot 16\text{ m}^2}{2} = 25{,}12\text{ m}^2$

Para hallar el área total de la figura se suman las tres áreas:

$$189\text{ m}^2 + 48\text{ m}^2 + 25{,}12\text{ m}^2 = 262{,}12\text{ m}^2$$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 2

Para hallar el área de la Figura 4.45, se separa en otras cuya área sea pueda calcular con facilidad, tal como se muestra en la Figura 4.46.

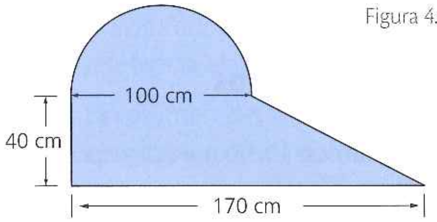


Figura 4.45

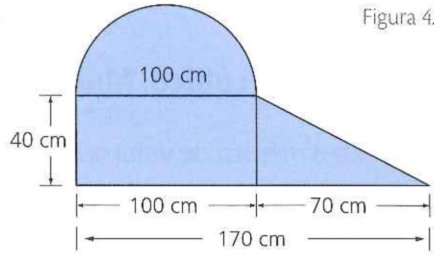


Figura 4.46

$$\text{Área del semicirculo} = \frac{\text{Área del circulo}}{2}\ \frac{3{,}14 \cdot (50\ \text{cm})^2}{2} = 3\,925\ \text{cm}^2$$

$$\text{Área del rectángulo} = b \cdot h = 100\ \text{cm} \cdot 40\ \text{cm} = 4\,000\ \text{cm}^2$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{70\ \text{cm} \cdot 40\text{cm}}{2} = 1\,400\ \text{cm}^2$$

$$\text{Área de la figura} = 3\,925\ \text{cm}^2 + 4\,000\ \text{cm}^2 + 1\,400\ \text{cm}^2 = 9\,325\ \text{cm}^2$$

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1. Calcula el valor del área de cada figura.

a.

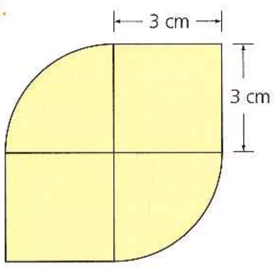


Figura 4.47

b.

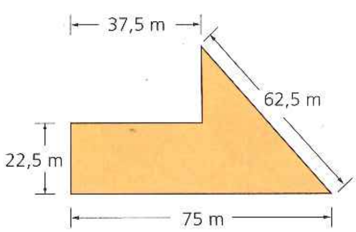


Figura 4.48

Razonamiento

2. ¿Cuál de los tres triángulos tiene mayor área (azul, naranja o verde)? Justifica tu respuesta.

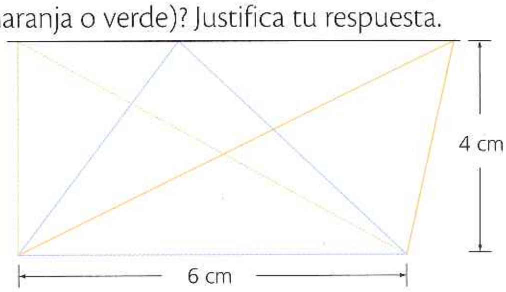


Figura 4.49

3. Dibuja y contesta. Traza una figura y descomponla en polígonos de área conocida de varias formas. ¿Puedes calcular el área de esa figura plana de diferentes maneras?

Evaluación del aprendizaje

i. Sabiendo que un galón de pintura alcanza para pintar 20 m², determina cuántos galones debe comprar Eduardo para pintar la fachada de su casa.

Figura 4.50

Datos de importancia:

Área de cada ventana (V): 300 cm · 120 cm

Área de la puerta (P): 120 cm · 180 cm

Área de la puerta (P1): 300 cm · 180 cm

ii. Halla el área de cada una de las cuatro parcelas de un jardín circular de 16 m de diámetro.

9 Unidades de volumen. Conversiones

Saberes previos

Para construir un cubo grande se ubican 16 cubos pequeños en la base que forman un cuadrado. ¿Cuántos cubos deben agregarse para completar el cubo grande?

Analiza

El operario de una bodega dispuso unas cajas en forma de cubo como muestra la Figura 4.51.

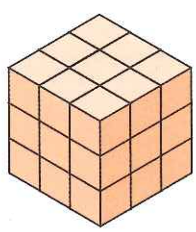


Figura 4.51

- ¿Cuántas cajas amontonó el operario?

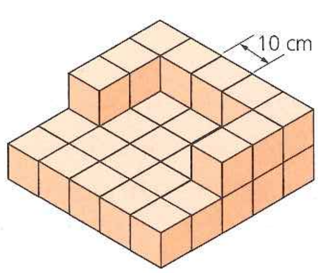


Figura 4.54

Conoce

En la primera capa hay nueve cajas, tres por cada lado, y como en total hay tres capas, el operario apiló $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ cajas.

9.1 El metro cúbico. Múltiplos y submúltiplos

La unidad métrica de volumen es el **metro cúbico** (m^3), que corresponde al volumen de un cubo de 1 m de arista.

El decímetro cúbico, el centímetro cúbico y el milímetro cúbico son los **submúltiplos** del metro cúbico, y el decámetro cúbico, el hectómetro cúbico y el kilómetro cúbico son sus **múltiplos**.

Ejemplo 1

Observa la Figura 4.52.

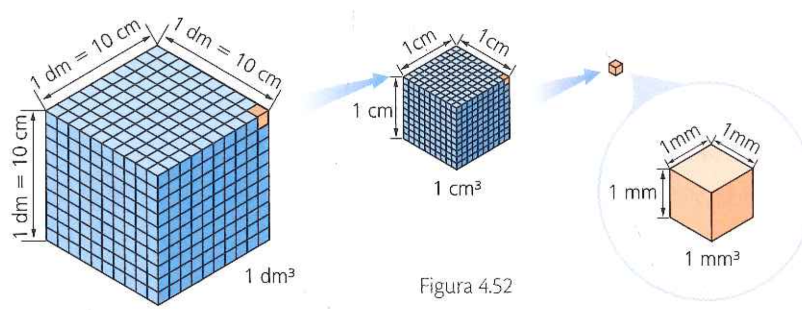


Figura 4.52

Como en la primera capa del cubo grande hay 100 cubos de 1 cm^3, en las diez capas de este se completan $10 \cdot 100 = 1\,000$ cm^3.

9.2 Conversión de unidades de volumen

La Figura 4.53 muestra la relación entre las unidades métricas de volumen.

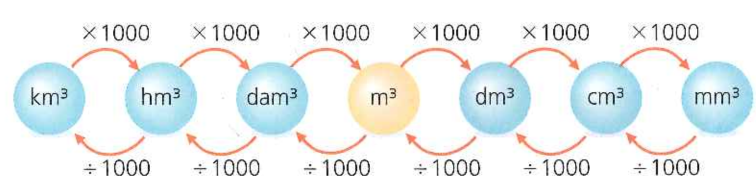


Figura 4.53

Ejemplo 2

Averigua el volumen de la estructura de la Figura 4.54 y exprésalo en mm^3.

Cada cubo tiene un volumen de $10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = 1\,000 \text{ cm}^3$.

El volumen de la estructura es: $34 \cdot 1\,000 \text{ cm}^3 = 34\,000 \text{ cm}^3$.

Para expresar ese volumen en mm^3, se multiplica por 1 000.

$$34\,000 \text{ cm}^3 \cdot 1\,000 = 34\,000\,000 \text{ mm}^3$$

La estructura tiene un volumen de 34 000 000 mm^3.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1. Estima los siguientes volúmenes utilizando la referencia indicada en cada caso.
   a. El volumen de tu salón de clase. Utiliza como referencia el volumen de un metro cúbico.
   b. El volumen del colegio. Utiliza como referencia el volumen de tu salón de clase.
   c. El volumen de un horno. Usa como unidad de referencia el decímetro cúbico.

Comunicación

2. Escribe V si la afirmación es verdadera y F en caso contrario.
   a. El decámetro cúbico es el volumen de un cubo de 1 dam de arista, lo que equivale al volumen de un cubo de 100 m de arista.
   b. El hectómetro cúbico es el volumen de un cubo de 1 hm de arista o, lo que es equivalente, es el volumen de un cubo de 100 m de arista.
   c. El kilómetro cúbico es el volumen de un cubo de 1 km de arista, lo que equivale al volumen de un cubo de 1 000 m de arista.

Ejercitación

3. Escribe las medidas propuestas en centímetros cúbicos.

a. 0,1 dm³	b. 0,5 m³	c. 0,7 dm³
d. 1 000 mm³	e. 0,0007 dam³	f. 20 m³

Razonamiento

4. Ordena de menor a mayor.

   0,02 m³ 500 cm³ 27 000 dm³ 0,005 km³

5. Indica qué medida hay que adicionar a las siguientes para obtener 1 dm³ en cada caso.

   a. 27 cm³ b. 300 cm³ c. 0,0001 m³

6. Completa las igualdades.
   a. 0,0098 m³ = 9 800 ☐
   b. ☐ dam³ = 0,007 hm³
   c. 0,0075 m³ = ☐ cm³
   d. 0,987 km³ = ☐ m³
   e. 567 820 dm³ = ☐ dam³
   f. 0,32 dam³ = ☐ m³

Resolución de problemas

7. Elabora quince cubos con base en el plano que se presenta en la Figura 4.55. Luego, construye las figuras solicitadas y responde.

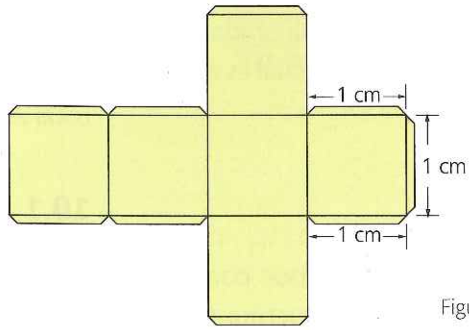


Figura 4.55

   a. Un sólido de 12 cm³
   b. Un sólido de 9 cm³
   c. Un prisma de 10 cm³

8. Una bodega mide 5 m de largo, 3 m de ancho y 2 m de alto. ¿Cuántas cajas caben en la bodega si cada una mide 10 cm de largo, 6 cm de ancho y 4 cm de altura?

Evaluación del aprendizaje

i. ¿Cuántas veces es menor el volumen de una caja de dimensiones 3 dm · 3 dm · 2 dm que el de una caja cúbica de 15 dm de lado?

ii. Una lata contiene 0,4 dm³ de líquido. ¿Cuántas latas se requieren para completar 1 m³ de ese líquido?

Estilos de vida saludable

Sofía toma al día dos latas de 0,4 dm³ de gaseosa para calmar la sed después de su clase de educación física, mientras que Santiago toma 3 000 mm³ de agua, ¿cuántos cm³ de líquido toma cada uno?, ¿cuál crees que tiene hábitos saludables y por qué?

10 Área y volumen de un prisma

Saberes previos

Cada uno de los 30 pisos de un edificio en forma de prisma se divide en 50 oficinas. Si cada oficina se considera como una unidad de medida de volumen, ¿cuál es el volumen del edificio?

Analiza

Cada uno de los cubos con los que se arma esta estructura tiene 8 cm^3 de volumen.

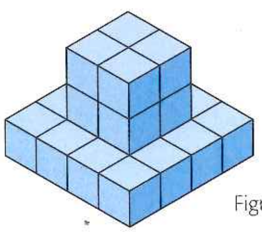


Figura 4.56

- ¿Cuál es el área de la base y el volumen de la estructura?

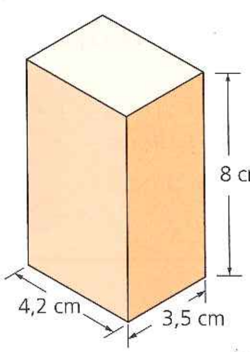


Figura 4.57

Conoce

La base de la estructura tiene forma cuadrada con 4 cubos en cada lado, cada uno de los cuales tiene como arista 2 cm. Así, el lado del cuadrado de la base mide $4 \cdot 2$ cm $= 8$ cm y su área es 8 cm $\cdot$ 8 cm $= 64$ cm^2.

Ahora bien, en la capa de la base hay $4 \cdot 4 = 16$ cubos y en cada una de la segunda y tercera capas hay 4 cubos. Así, como en la estructura se cuentan en total 24 cubos, su volumen es: $24 \cdot 2$ cm^3 $= 48$ cm^3.

10.1 Área lateral y área total de un prisma

Los **prismas** son poliedros que tienen dos caras paralelas e iguales llamadas **bases** y sus **caras laterales** son **paralelogramos**.

El **área lateral** A_L del prisma es la suma de las áreas de sus caras laterales y en general, es igual al producto del perímetro de la base por la altura.

El **área total** A_T del prisma se halla sumándole al área lateral el área de las dos bases.

Ejemplo 1

En el prisma rectangular de la Figura 4.57 el perímetro de la base es igual a: $2 \cdot 4{,}2$ cm $+ 2 \cdot 3{,}5$ cm $= 8{,}4$ cm $+ 7$ cm $= 15{,}4$ cm y su altura es 8 cm.

Así, su área lateral es: $A_L = 15{,}4$ cm $\cdot$ 8 cm $= 123{,}2$ cm^2.

De otra parte, el área de una de las bases del prisma es:

$$AB = 4{,}2 \text{ cm} \cdot 3{,}5 \text{ cm} = 14{,}7 \text{ cm}^2$$

Por tanto, el área total del prisma es:

$$A_T = A_L + 2AB = 123{,}2 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 14{,}7 \text{ cm}^2 = 123{,}2 \text{ cm}^2 + 29{,}4 \text{ cm}^2 = 152{,}6 \text{ cm}^2.$$

10.2 Volumen de un prisma

El **volumen** (V) de un prisma es igual al producto del área de su base (A_B) por su altura (h).

Ejemplo 2

El volumen del prisma del ejemplo anterior es:

$$V = A_B \cdot h = 14{,}7 \text{ cm}^2 \cdot 8 \text{ cm} = 117{,}6 \text{ cm}^3$$

Ejemplo 3

Si un cubo tiene como arista 2 cm su volumen es 8 cm^3. Al triplicar su arista se obtiene un cubo de volumen $(6 \text{ cm})^3 = 216$ cm^3, es decir, su volumen queda multiplicado por 27, pues 27×8 cm^3 $= 216$ cm^3.

En general, si un sólido multiplica sus dimensiones por un factor k, su volumen se multiplica por k^3.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 4

Para hallar el volumen de un prisma cuya base es un hexágono regular de lado 6 cm y $3\sqrt{3}$ cm de apotema, y cuya altura es 12 cm, se debe hallar primero el área de una de sus bases.

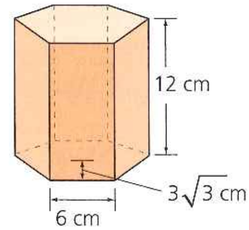


Figura 4.58

Es importante recordar que el área de un polígono regular es igual a su semiperímetro por la apotema (a).

El área de la base del prisma es entonces:

$$A_B = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{(6 \cdot 6\ \text{cm}) \cdot 3 \cdot \sqrt{3}\ \text{cm})}{2}$$
$$= 54 \cdot \sqrt{3}\ \text{cm}^2 = 54 \cdot \sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Por tanto, el volumen del prisma hexagonal es:

$$V = A_B \cdot h = 54 \cdot \sqrt{3}\ \text{cm}^2 \cdot 12\ \text{cm} = 648 \cdot \sqrt{3}\ \text{cm}^3$$

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1. Calcula el volumen de la estructura de la Figura 4.59 si la arista de cada cubo que lo conforma mide 3 cm.

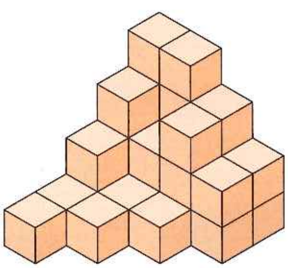


Figura 4.59

Modelación

2. Calcula el volumen de cada uno de los siguientes prismas rectangulares y de las partes que están ocupadas por cubos. (Cada cubo tiene una arista de medida de 1 cm).

a.

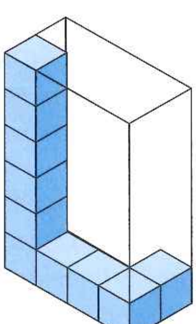


Figura 4.60

b.

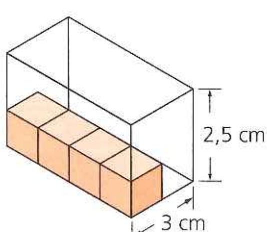


Figura 4.61

c.

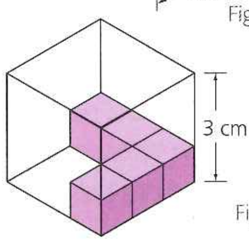


Figura 4.62

Evaluación del aprendizaje

Resuelve.

a. Calcula el volumen del prisma rectangular de la Figura 4.63.

b. Duplica la longitud de uno de los lados del prisma y calcula de nuevo su volumen.

c. Toma el prisma original y duplica otra de sus longitudes. Calcula el volumen del prisma.

d. Compara los resultados de los literales anteriores. ¿Qué relación hay entre los volúmenes calculados?

e. ¿Qué pasa si se duplica la longitud de todos los lados del prisma?

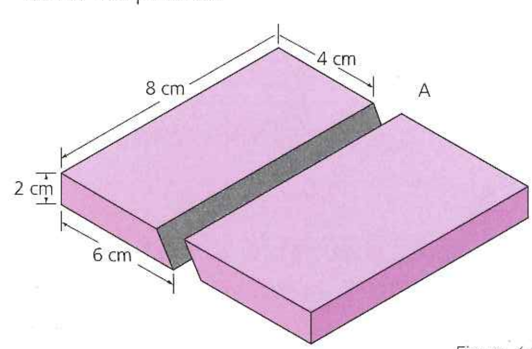


Figura 4.63

11 Unidades de capacidad. Conversiones

Saberes previos

Los médicos recomiendan tomar un litro de agua al día. ¿A cuántos vasos equivale en forma aproximada?

Analiza

Diana leyó que cada vez que alguien se cepilla los dientes y deja la llave abierta se desperdician 20 litros de agua.

- Si Diana hace lo mismo cada uno de los 30 días del mes, ¿cuánta agua desperdicia al mes cuando se lava los dientes?

Conoce

Para saber cuánta agua desperdicia Diana al mes cuando se cepilla los dientes, se multiplica el gasto diario por 30.

$$20 \text{ litros} \cdot 30 = 600 \text{ litros}$$

Si Diana llenara un vaso de agua y usara este para lavar sus dientes, gastaría menos de 30 litros de agua al mes.

11.1 El litro. Múltiplos y submúltiplos

La unidad de medida de capacidad es el **litro** (L).

En la Tabla 4.4 se muestran algunas equivalencias entre las unidades de capacidad.

Decilitro (dL)	Centilitro (cL)	Mililitro (mL)
Un litro es igual a diez decilitros.  1 dL	Un litro es igual a 100 centilitros.  1 cL	Un litro es igual a 1 000 mililitros.  1 mL
L = 10 dL	1 L = 100 cL	1 L = 1 000 mL

Decalitro (daL)	Hectolitro (hL)	Kilolitro (kL)
Un decalitro son diez litros.  10 L	Un hectolitro son 100 litros.  100 L	Un kilolitro son 1 000 litros.  1 000 L
1 daL = 10 L	1 hL = 100 L	1 kL = 1 000 L

Tabla 4.4

11.2 Conversión de unidades de capacidad

Para transformar unidades de capacidad se usa el esquema de la Figura 4.64.

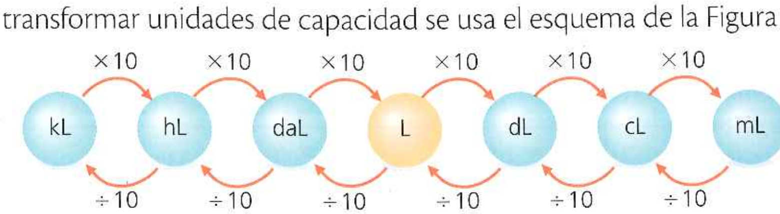


Figura 4.64

Ejemplo 1

Convierte 7 500 mL a L.

Para transformar 7 500 mL a litros, se divide entre 1 000: 7 500 ÷ 1 000 = 7,5 L

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Busca varios recipientes en tu entorno y estima su capacidad.

Ejercitación

2 Expresa estas medidas de capacidad en litros.

a. 8 daL
b. 6 hL
c. 33 cL
d. 250 mL

3 Pasa a centilitros las siguientes medidas.

a. 4,5 L
b. 0,6 daL
c. 25,5 mL
d. 0,0005 hL

4 Expresa cada medida en una unidad inmediatamente superior.

a. 250 hL b. 3 600 mL c. 500 dL d. 3,24 L

Razonamiento

5 Completa las igualdades.

a. 15 cL = ☐ L = ☐ mL

b. 0,025 kL = ☐ cL = ☐ L

c. ☐ daL = 50 L = ☐ kL

d. 0,5 kL = 500 ☐ = 5 ☐

6 Calcula cuántas onzas líquidas son necesarias para llenar un recipiente de 2 L de capacidad.

1 onza líquida = 29,6 mL

7 Calcula cuántas "cucharaditas" de 5 mL contiene un jarabe que tiene una capacidad de 230 cm^3.

Resolución de problemas

8 Catalina sabe que un litro de gaseosa tiene 1 000 cm^3 y que el contenido de una gaseosa personal es de 350 cm^3. ¿Cuántas gaseosas personales contiene un litro?

9 Frecuentemente se escucha que debemos mantener el cuerpo hidratado y que, para ello, es necesario beber ocho vasos de agua al día. Si se considera que un vaso de agua tiene una capacidad de aproximadamente 200 mL, calcula cuántos litros al día se nos recomienda beber.

10 Juan toma 12 tazas de café al día. Si se considera que una taza de café puede contener 250 mL, ¿cuántos litros de café toma Juan durante cinco días?

11 El tanque de almacenamiento de agua de un conjunto residencial tiene una capacidad de 2 800 litros. Cuando se le va a hacer mantenimiento, se suspende el suministro de agua al tanque y se espera a que los residentes consuman el contenido. Si en cada uno de los 120 apartamentos del conjunto se consumen en promedio 75 dL por día, ¿en cuánto tiempo quedará en el tanque un residuo de 100 litros de agua?

12 Un vehículo que se promociona en el mercado automotriz es capaz de recorrer 50 km con un galón de gasolina. Si el tanque de combustible de ese vehículo puede almacenar 19 800 cm^3, ¿cuántos kilómetros puede recorrer el vehículo antes de que el tanque quede vacío?

Evaluación del aprendizaje

i En un lavadero de autos se cuenta con un tanque para almacenar agua con capacidad para 125 galones. En promedio se gastan 10 litros para lavar un automóvil. Cuando en el tanque quedan solo 100 litros, se activa una válvula que permite que al tanque ingresen 250 dL cada tres minutos.

a. ¿Cuántos autos se alcanzan a lavar antes de que se active la válvula?
b. ¿En cuánto tiempo se llena el tanque nuevamente luego de que se active la válvula?
c. ¿Con cuántos mL de agua se lava un auto?
d. ¿Cuántos hL quedan en el tanque cuando se activa la válvula?
e. ¿Cada cuántos autos lavados se activa la válvula?

ii Un cubo de 1 dm de arista puede contener 1 litro de agua. Si se triplica la arista, ¿cuánta agua puede contener el nuevo cubo?

12 Unidades de masa. Conversiones

Saberes previos

¿Qué productos conoces que se vendan en kilogramos, en gramos o en libras? ¿Cómo se determina su peso?

Analiza

Todos los alimentos aportan un valor nutricional a nuestra dieta diaria.

- Cuál es el valor nutricional de una manzana?

Conoce

Una manzana fresca tiene la composición alimenticia que se muestra en la Tabla 4.5.

Calorías	81
Carbohidratos	21 gramos
Calcio	10 miligramos (mg)
Fósforo	10 mg
Hierro	0,25 mg
Vitamina C	8 mg
Vitamina A	73 IU

Tabla 4.5

12.1 El gramo. Múltiplos y submúltiplos

La unidad básica de medida de **masa** es el **gramo (g)**.

Ejemplo 1

La Tabla 4.6 muestra los múltiplos del gramo.

Decagramo (dag)	Hectogramo (hg)	Kilogramo (kg)
1 dag = 10 g 10 g 	1 hg = 100 g 100 g 	1 kg = 1 000 g  1 000 g

Tabla 4.6

12.2 Conversión de unidades de masa

Para **convertir unidades de masa** en otras se usa la Figura 4.65.

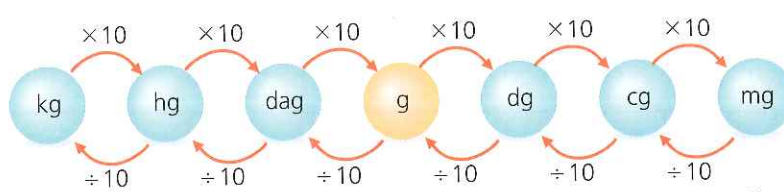


Figura 4.65

Ejemplo 2

38 gramos equivalen a 30 · 100 = 3 800 cg; mientras que 240 g corresponden a 240 : 10 = 24 dag.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Identifica la mayor masa en cada caso.

a. 495 g 5 hg 45,8 dag

b. 200 000 dag 8 000 hg 1 100 000 g

c. 300 g 7 hg 72,9 dag

d. 5 000 dag 800 hg 2 300 000 g

2 Indica si cada igualdad es verdadera (V) o falsa (F).

a. 7,23 dag = 72,3 g

b. 1 359 cg = 0,1359 cg

c. 4,5 mg = 0,0045 dg

d. 0,246 kg = 246 dg

Ejercitación

3 Expresa en gramos las siguientes medidas.

a. 7 g 34 cg

b. 92 dg 3 mg

b. 8 dag 21 g

d. 2 hg 6 dag

Razonamiento

4 Calcula la diferencia de los pesos de Libardo y Rosario si cada uno pesa 75 kg y 630 hg.

Comunicación

5 Busca la manera de medir o calcular tu peso en kilogramos y exprésalo en las demás unidades.

Razonamiento

6 Indica la unidad adecuada para medir la masa de cada objeto.

a. Un lápiz

b. Un bus

c. Una barra de jabón

d. Un bebé

e. Un balón de baloncesto

Ejercitación

7 Averigua la equivalencia en gramos que tienen otras unidades de medida usadas comúnmente en el comercio, como las siguientes.

a. Una libra

b. Una tonelada

c. Una onza

d. Un quintal

Razonamiento

8 Indica si las igualdades son verdaderas (V) o falsas (F).

a. 5,64 dag = 56,4 g ( )

b. 0,785 kg = 785 dg ( )

c. 2 459 cg = 0,2459 dag ( )

d. 718,3 dg = 0,7183 kg ( )

e. 3,8 mg = 0,0038 dg ( )

Resolución de problemas

9 Un antibiótico viene preparado en sobres de 500 mg. El médico indicó una dosis máxima diaria de 1,5 g.

¿Cuántos sobres hay que consumir para tomar la dosis diaria indicada?

Evaluación del aprendizaje

i En los supermercados se utilizan bolsas que resisten hasta 10 kg de peso antes de romperse. Calcula el peso que pueden resistir estas bolsas en las demás unidades de masa.

ii Una medida de masa muy utilizada en nuestro país es la arroba, que es aproximadamente 25 libras. Calcula cuántas arrobas transporta un camión que lleva:

a. 2,5 tonelada

b. 3 quintales

c. 25 000 hg

d. 2 000 kg

Estilos de vida saludable

Los niños entre los nueve y trece años de edad, deben consumir en promedio 0,315 g de vitamina C a la semana. Si una naranja tiene aproximadamente 53 mg de vitamina C, ¿cuántas naranjas deberías consumir a la semana para mantenerte saludable?

13 Unidades de tiempo. Conversiones

Saberes previos

El día solar marciano dura 24 horas 39 minutos. ¿Cuántas horas corresponden a 3 días en Marte?

Analiza

Un avión sale desde Bogotá hasta San Andrés. Al despegar de Bogotá eran las 8:45 a.m. y se prevé que el vuelo dure 2 horas y 10 minutos.

- ¿A qué hora aterrizará en San Andrés?

Conoce

Para responder la pregunta, se debe sumar a la hora de salida el tiempo de vuelo. Así, (8 h + 45 min) + (2 h + 10 min) = 10 h + 55 min. El avión llega a San Andrés a las 10: 55 a.m.

13.1 Unidades de tiempo

Las unidades de tiempo se usan en diferentes contextos: para referirse a hechos históricos, para indicar la edad de una persona, para organizar cronogramas y planeaciones, etc.

La unidad básica de tiempo es el **segundo**.

Algunas equivalencias entre las unidades de tiempo son:

1 minuto = 60 segundos (1 min = 60 s).

1 hora = 60 minutos (1 h = 60 min).

1 día = 24 horas.

1 año normal = 365 días.

1 año bisiesto = 366 días.

1 lustro = 5 años.

1 década = 10 años.

1 siglo = 100 años.

1 milenio = 1 000 años.

13.2 Problemas con unidades de tiempo

En muchas situaciones de la vida diaria se hace uso de la adición o la sustracción de unidades de tiempo. También es importante recordar que las medidas de tiempo (sistema sexagesimal) pueden expresarse de dos formas:

Forma incompleja: utilizando una sola unidad. Por ejemplo: 8 640 040 s.

Forma compleja: utilizando varias unidades a la vez. En una expresión compleja la cantidad de minutos y segundos siempre tiene que ser inferior a 60.

Ejemplo 1

El tiempo total del ganador de una carrera de karts fue de 1 h 53 min 58 s. El último clasificado entró a 365 s del primero. Para saber el tiempo total de la carrera, se debe sumar el tiempo del ganador con la del último clasificado.

Para poder hacerlo se expresa 365 s en forma compleja:

$$\begin{array}{r|l} 365 & 60 \\ \hline \underset{\text{s}}{5} & \underset{\text{min}}{6} \end{array}$$

365 s = 6 min 5 s.

Así, el tiempo de carrera es:

$$\begin{array}{rrrr} & 1\text{h} & 53\text{min} & 58\text{s} \\ + & & 6\text{min} & 5\text{s} \\ \hline & 1\text{h} & 59\text{min} & 63\text{s} \end{array}$$

que equivale a 2 h 0 min 23 s.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Expresa en segundos las siguientes unidades de tiempo.

a. Un minuto
b. Un día
c. Una hora
d. Una semana
e. Tres horas
f. Un mes
g. Doce horas
h. Un año

2 Expresa en minutos.

a. Un día
b. Un mes
c. Una semana
d. Un año

3 Expresa en días.

a. 86 400 s
b. Un año
c. 2 880 min
d. Un lustro
e. 48 horas
f. Una década
g. 72 horas
h. Un siglo

4 Expresa en meses.

a. Dos años
b. Un siglo
c. Cuatro años
d. 24 siglos
e. Un lustro
f. Un milenio
g. Una década
h. Dos milenios

5 Expresa en años.

a. 730 días
b. Tres lustros
c. 1 825 días
d. Cinco décadas
e. 24 meses
f. Dos siglos
g. 36 meses
h. 20 milenios

6 Encuentra la suma entre los tiempos.

a. (3 h 45 min 12 s) y (4 h 10 min 24 s)
b. (7 h 58 min 42 s) y (6 h 37 min 36 s)
c. (5 h 23 min 19 s) y (3 h 26 min 52 s)
d. (3 días 18 h 23 min) y (4 días 7 h 54 min)

Resolución de problemas

7 En la tabla aparecen los tiempos que emplearon los dos mejores ciclistas en una competencia de cuatro etapas. ¿Cuál es la diferencia entre los tiempos acumulados de los dos ciclistas?

Ciclista / Etapa	Rodríguez D.	Castellani F.
Primera	1 h 34 min 12 s	1 h 42 min 6 s
Segunda	2 h 59 min 4 s	3 h 0 min 35 s
Tercera	4 h 15 min 46 s	4 h 6 min 20 s
Cuarta	3 h 45 min 28 s	3 h 52 min 57 s

Tabla 4.7

Evaluación del aprendizaje

Teniendo en cuenta la equivalencia entre las diferentes unidades de tiempo, responde las preguntas.

a. Un bus sale de Bogotá, D. C. a las 8:10 a.m. y viaja 11 horas y 30 minutos hasta San Agustín, Huila. ¿A qué hora llega el bus a su destino?

b. La Piedra del Sol, el calendario de los aztecas, es un símbolo famoso de México.

Imagina que visitas Ciudad de México para ver la piedra. Si llegas el domingo a las 11:00 a.m. y te quedas 35 horas, ¿qué día y a qué hora saldrás de Ciudad de México?

Educación ambiental

La rana dardo dorada es la más venenosa del mundo, es endémica de Colombia y puede vivir hasta diez años. Expresa este tiempo en meses y días. ¿Por qué crees que es importante proteger la biodiversidad.

14 Unidades de temperatura. Conversiones

Saberes previos

Averigua la temperatura promedio en Leticia, Amazonas y compárala con la temperatura promedio de Valledupar, Cesar.

Analiza

La hipotermia es el descenso de la temperatura corporal por debajo de los 35 °C. En la primera fase, los vasos sanguíneos de las partes más alejadas, manos y pies, se contraen; esto sucede para que circule menos sangre por esas zonas, ya que la pérdida de calor es muy elevada y el objetivo del cuerpo es mantener calientes los órganos vitales.

- ¿En qué escalas se puede medir la temperatura?

Conoce

Para determinar el valor de la temperatura se han establecido escalas térmicas.

14.1 La escala de temperatura Celsius

En esta escala se asigna 0 a la temperatura de congelación del agua y 100 a la temperatura de ebullición a presión atmosférica normal. La distancia de separación entre estas dos marcas se divide en 100 partes iguales llamadas grados.

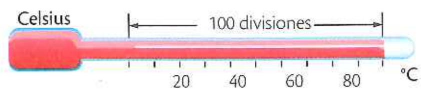


Figura 4.66

14.2 La escala de temperatura Fahrenheit

En esta escala se asigna 32 a la temperatura de congelación del agua y 212 a la temperatura de ebullición. La distancia de separación entre estas dos marcas se divide en 180 partes iguales llamadas grados.

Relación lineal para convertir de °*F* a °*C*.

$$°C = \frac{5}{9}(°F - 32) \Rightarrow °F = \frac{9}{5}°C + 32$$

14.3 La escala de temperatura Kelvin

El 0 se asigna a la mínima temperatura posible, el cero absoluto, en la cual una sustancia no tiene ninguna energía cinética que ceder; corresponde a −273 °C; la temperatura a la que se funde el hielo es 273 K. En la escala térmica Kelvin no existen números negativos y la graduación tiene el mismo tamaño que los grados de la escala Celsius.

Relación lineal para convertir de *K* a °*F*.

$$°F = \frac{9(K - 273)}{5} + 32 \Rightarrow K = \frac{(°F - 32)}{9} + 273$$

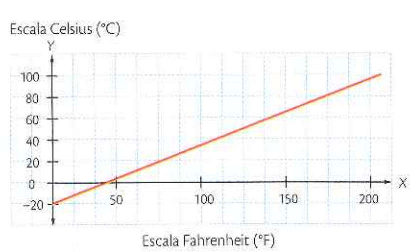


Figura 4.67

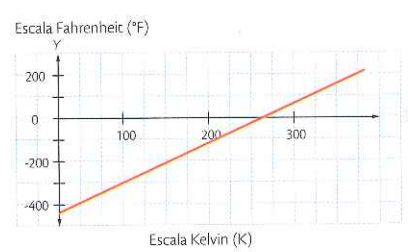


Figura 4.68

Ejemplo 1

Para convertir 68 °F a °C se evalúa la segunda expresión del recuadro anterior para 68, así:

$$°F = (68 - 32) \cdot \frac{5}{9} = 36 \cdot \frac{5}{9} = 20\ °C = 20\ K$$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1. Diseña tu propio termómetro y explica su funcionamiento.

2. Transforma 300 K a °C y °F.

Razonamiento

3. Dibuja la escala correspondiente en °F y K del termómetro de la figura 4.69.

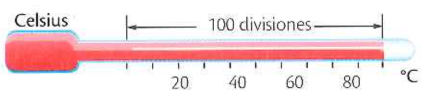


Figura 4.69

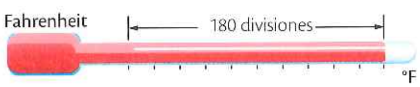


Figura 4.70

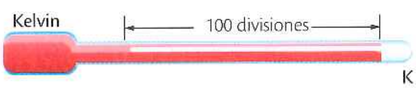


Figura 4.71

4. Convierte las siguientes temperaturas de Celsius a Kelvin.
   a. Temperatura del cuerpo humano: 37 °C.
   b. Temperatura de los canarios: 45 °C.
   c. Temperatura en una habitación: 25 °C.
   d. Temperatura de un baño caliente: 38 °C.

Resolución de problemas

5. Andrés debe medir la temperatura del agua cuando hierve y cuando se congela. Para ello, utiliza el termómetro del laboratorio. El termómetro marca 212 °F cuando el agua hierve y 32 °F cuando se congela. ¿Cuál es la medida de la temperatura en cada caso si se utiliza un termómetro en K?

6. El cero absoluto es la temperatura teórica más baja posible. A esta temperatura el nivel de energía interna del sistema es el más bajo posible, por lo que las partículas, según la mecánica clásica, carecen de movimiento. El cero absoluto es −460 °F.

   Expresa esa temperatura en °C.

7. La sensación térmica de tres ciudades se muestra enseguida:

   Madrid: 26° C
   Buenos Aires: 88° F
   Santiago: 68° F

   a. Ordena las ciudades desde la que presenta la mayor a la que presenta la menor sensación térmica.
   b. ¿En cuántos grados Celsius y Kelvin supera la ciudad de mayor sensación térmica a la de menor sensación térmica?
   c. Si la sensación térmica en Madrid baja 8° C, ¿cuántos grados Fahrenheit y Kelvin se registran luego de ello?

8. La mayor temperatura registrada en la Tierra fue de 57,8 °C en Libia, África en 1922.

   ¿A cuántos grados Fahrenheit corresponde esta temperatura?

9. La menor temperatura registrada en la Tierra fue de −89,2 °C en la Antártida en 1983.

   ¿A cuántos grados Fahrenheit corresponde esta temperatura?

10. La temperatura promedio en la superficie lunar aumenta cerca de 280° C un poco antes del mediodía lunar. Expresa ese cambio en grados Fahrenheit.

Evaluación del aprendizaje

✓ El termómetro de mercurio de un médico está mal calibrado ya que indica erróneamente un valor de 108 °C para el punto de ebullición del agua.

   a. ¿Cuál será la temperatura centígrada verdadera cuando este termómetro indica que un paciente tiene una fiebre de 40 °C?
   b. ¿Qué puedes concluir con respecto al resultado anterior?

Practica más

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Sistema métrico decimal

Comunicación

1 Aproxima cada una de las siguientes longitudes. Verifica tu respuesta midiéndolas.

a. Ancho del libro de matemáticas
b. Largo del lápiz
c. Ancho del tablero
d. Largo y ancho de la cancha de microfútbol
e. Largo y ancho del celular
f. Ancho de la ventana del salón

Unidades de longitud. Conversiones

2 Escribe >, < o = según corresponda.

a. 18 m ◯ 152 cm   b. 120 m ◯ 12 hm
c. 1 450 cm ◯ 2 dam   d. 3,25 km ◯ 3 250 m

Ejercitación

3 Completa la Tabla 4.8.

Unidad	dm	m	hm	km
Cantidad			1,03	

Tabla 4.8

Resolución de problemas

4 Resuelve cada situación.

a. El espesor de una moneda de $ 1 000 es de 3 mm. Si se apilan 12 monedas, ¿cuántos centímetros mide la hilera?

b. Una constructora pavimentó 1 789 metros de carretera. ¿Cuántos decámetros falta pavimentar para completar una carretera de dos kilómetros?

c. La Secretaría de Tránsito coloca una señal informativa cada cuarto de kilómetro. ¿Cuántas señales debe colocar en un tramo de 3 750 metros?

Perímetro de figuras planas

Resolución de problemas

5 Don Julio desea cercar un terreno de cultivo de arveja de forma rectangular con alambre. La medida del largo del terreno es de 15,5 m y su ancho es de 7,6 m. Si va a utilizar cuatro líneas de alambre, ¿cuánto alambre necesita?

Ejercitación

6 Halla los perímetros de las figuras.

a.

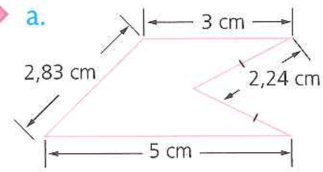


Figura 4.72

b.

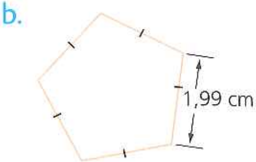


Figura 4.73

c.

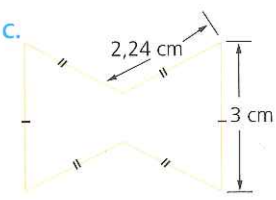


Figura 4.74

d.

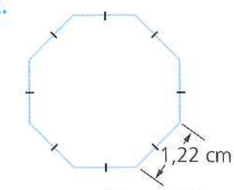


Figura 4.75

Unidades de superficie

Resolución de problemas

7 Soluciona cada situación.

a. Una baldosa de porcelanato recubre 26,77 dm². ¿Cuántos m² recubren 12 baldosas?

b. Un pintor pinta 12,5 m² de pared en una hora. ¿Cuánto tiempo se tardará en pintar 1,5 dam²?

c. La medida de la superficie de una cara de un cubo es 4,25 cm². ¿Cuántos decímetros cuadrados miden las seis caras del cubo?

Área de figuras planas

Razonamiento

8 Lee y responde.

Un terreno rectangular mide 48 m² de superficie.

a. ¿Cuáles pueden ser las longitudes de los lados en metros?

b. Si el ancho es de 12,5 m, ¿cuál es la medida del largo?

Ejercitación

9 Halla el área de las figuras.

a.

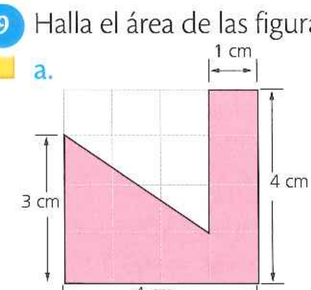


Figura 4.76

b.

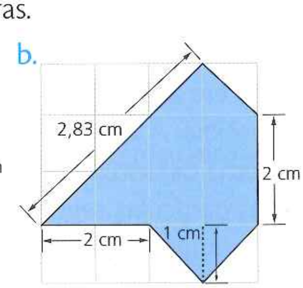


Figura 4.77

Resolución de **problemas**

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Estrategia: **Unificar unidades de medida**

Problema

Una constructora ofrece dos tipos de apartamento, A y B. La sala del apartamento tipo A tiene 3 m de ancho por 20 dm de largo, y la del B tiene 32 dm de ancho por 18 dm de largo. Si se quiere un apartamento con la sala más amplia, ¿de cuál tipo se debe comprar?

1. Comprende el problema

- ¿Cómo se calcula el área de un rectángulo?

  R: Multiplicando largo por ancho.

- ¿Las dimensiones están expresadas en la misma unidad de medida?

  R: No, las del tipo A en metros y en decímetros y las del tipo B en decímetros.

2. Crea un plan

- Expresa las dimensiones de cada sala en la misma unidad de medida. Luego, calcula el área de cada una y compáralas.

3. Ejecuta el plan

- En el apartamento A el ancho de la sala está expresado en metros, por tanto, es necesario expresarlo en decímetros.

$$3 \cdot 10 \text{ dm} = 30 \text{ dm}$$

  Entonces, el área de esta sala es:

$$30 \text{ dm} \cdot 20 \text{ dm} = 600 \text{ dm}^2$$

- La sala del apartamento B tiene sus dimensiones expresadas en una misma unidad. Como es de forma rectangular, su área es:

$$32 \text{ dm} \cdot 18 \text{ dm} = 576 \text{ dm}^2$$

R: Se debe comprar el apartamento tipo A.

4. Comprueba la respuesta

- Si tu respuesta es correcta, al calcular la diferencia entre el área de la sala del apartamento tipo A y la del tipo B debes obtener 24 dm^2.

Aplica la estrategia

1. En el colegio de Juan, el salón de danzas mide 60 dm de largo por 5 m de ancho y el salón de música tiene 4 m de ancho por 50 dm de largo. ¿Cuál de los dos salones tiene mayor área?

   a. Comprende el problema

   ....

   ....

   b. Crea un plan

   ....

   ....

   c. Ejecuta el plan

   ....

   ....

   d. Comprueba la respuesta

   ....

   ....

Resuelve otros problemas

2. Frente a la casa de Carolina hay un parque que tiene 45 m de largo y 38 000 mm de ancho. Si ella da dos vueltas alrededor de este, ¿qué distancia en metros recorre?

3. La cancha de béisbol en donde practica Sebastián tiene forma de rombo y sus diagonales miden 45 y 36 metros. ¿Qué área tiene la cancha de béisbol?

Formula problemas

4. Inventa y resuelve un problema que se solucione utilizando la información de la figura 4.78.

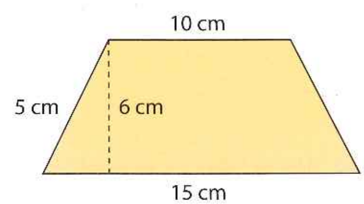


Figura 4.78

Enriquece tu vocabulario

- Busca el significado de *unidad astronómica* y escribe la distancia entre la Tierra y Jupiter en *ua*.

Evaluación del aprendizaje

Sistema métrico decimal

Razonamiento

1 Marca V si es posible realizar lo que se indica en cada caso o F si no lo es. VERDADERO/FALSO

a. Cargar 8 m de harina. ( )

b. Ocupar 30 m^3 de espacio. ( )

c. Medir 1,5 m^3 de alto. ( )

d. Vender 5 m^2 de tiempo. ( )

e. Tener 30 °C de temperatura. ( )

Unidades de longitud. Conversión

Ejercitación

2 Añade la medida necesaria para que sume 1 m en cada caso. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

a. 5 cm + ☐ cm

b. 225 mm + ☐

c. 7 dm + ☐

d 0,0006 km + ☐

e. 926 mm + ☐

Perímetro de figuras planas

Ejercitación

3 Halla el perímetro de la figura (toma como unidad de longitud "u"). ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

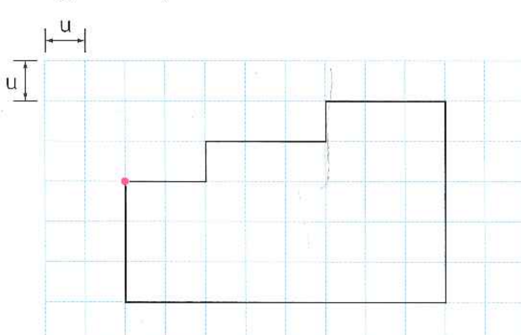


Figura 4.79

Unidades de superficie. Conversión

Resolución de problemas

4 Un mampostero necesita embaldosar un salón de 40 m^2 utilizando baldosas cuadradas de 20 cm de lado. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

¿Cuántas baldosas necesita?

Área de figuras planas

Comunicación

5 Dibuja en la cuadrícula dos figuras que tengan el mismo perímetro, pero diferente área. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

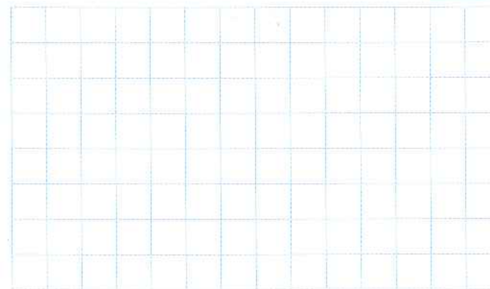


Figura 4.80

Longitud de la circunferencia y área de figuras circulares

Razonamiento

6 Calcula la superficie de la zona sombreada en la figura. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

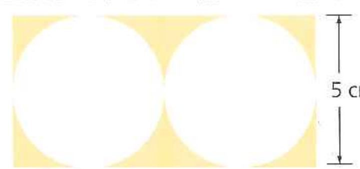


Figura 4.81

Área de figuras compuestas

Modelación

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

7 Calcula el área de una ventana como la de la figura que hay en la pared de una catedral en la ciudad de Popayán.

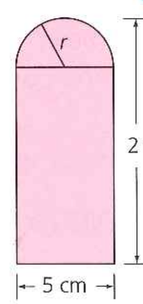


Figura 4.82

Unidades de volumen. Conversión

Razonamiento

8 Determina cuántos cubos tiene la estructura de la figura y cuántos hacen falta para completar el cubo mayor. Si cada cubo pequeño tiene una arista de 8 cm, ¿cuántos metros cúbicos ocupa el cubo mayor? ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

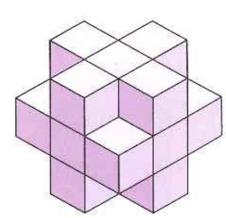


Figura 4.83

Área y volumen de un prisma

Resolución de problemas

9 Un metro cúbico de agua de mar suele contener 23 cm^3 de sal (cloruro sódico), además de otras sales distintas. Una laguna de salinización en Manaure (Guajira) tiene unas dimensiones de 200 m de larga por 50 de ancha, alcanzando el agua una altura de 30 cm. Halla el volumen de sal que es esperable obtener.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Unidades de capacidad. Conversiones

Resolución de problemas

10 El contenido de una caja de cereales es de 375 g. Si se diseña un nuevo envase con un 20% más de contenido, ¿cuántos mg de cereal contiene el nuevo envase?

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

11 Calcula la capacidad del contenedor (en mililitros) de la figura y el volumen que ocupa la parte material con que está fabricado.

ACTIVIDAD DE REFUERZO

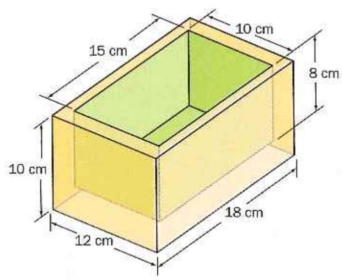


Figura 4.84

Unidades de masa. Conversión

12 A un rinoceronte de masa 768 kg se lo ha devuelto a su hábitat natural en el Congo para que viva en libertad pues su estado ha empeorado en cautiverio y su masa no es la normal. Si luego de tres meses de haber sido liberado, su masa ha aumentado 34 kg y 234 hg, ¿cuántos decagramos pesa ahora?

ACTIVIDAD DE REFUERZO

Ejercitación

13 Completa el esquema de la figura que relaciona los múltiplos y submúltiplos del gramo.

ORGANIZADORES GRÁFICOS

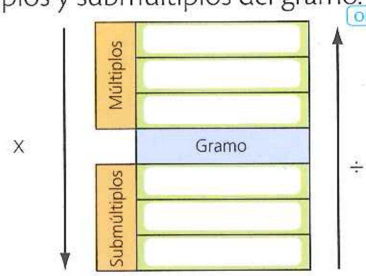


Figura 4.85

Unidades de tiempo. Conversiones

Ejercitación

14 Selecciona la cantidad correspondiente y completa cada igualdad.

ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

a. 12 h = ______ s
 42 300 | 43 200 | 34 200

b. 0,1 días = ______ min
 144 | 120 | 110

c. 86 400 s = ______ min
 4 410 | 4 140 | 1 440

d. 73 días = ______ años
 0,5 | 0,4 | 0,2

e. 0,5 días = ______ h
 4 | 12 | 24

f. 365 días = ______ lustros
 0,2 | 0,5 | 0,4

Resolución de problemas

15 Resuelve cada situación.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

a. Calcula la cantidad de meses siderales que hay en un año si un mes sideral dura aproximadamente 27 días y 8 h.

b. Las fases de la Luna se repiten cada 29 días, 12 h, 44 min y 3 s. Si la luna llena en el mes de marzo fue el día 28, a las 19 h, 27 min, calcula la luna llena del siguiente mes.

c. ¿Qué tanto tiempo en días tomará el trabajo de contar un millón de objetos cualesquiera, a razón de uno cada segundo?

Unidades de temperatura. Conversiones

Razonamiento

16 Para asar un pollo se necesita que el horno alcance una temperatura de 374 °F. ¿Si el horno tiene una marcación en grados Celsius y se pone a 200 °C, ¿qué le ocurrirá al pollo? Explica tu respuesta.

PREGUNTA ABIERTA

Sistema Sexagesimal

17 Marcela sumó 25° 35' 56" con 15° 25' 14" y obtuvo 41° 10' 10". ¿Fue correcto su cálculo?

PREGUNTA ABIERTA

5 Estadística y probabilidad

Ya sabemos

- Reconocer algunos gráficos estadísticos.
- Determinar si un evento es probable o no.

Vamos a aprender

- A inferir información de gráficas estadísticas.
- A determinar la probabilidad de un evento.

Nos sirve para

- Tomar decisiones argumentadas en datos estadísticos y la noción de probabilidad.

1 Población, muestra y variables

Saberes previos

¿Alguna vez te han hecho alguna encuesta? Si es así, ¿cuáles fueron las preguntas?

Analiza

Mateo quiere saber cuál es el deporte preferido por los 1 000 estudiantes de su colegio.

- ¿Qué podría hacer Mateo para resolver su inquietud?

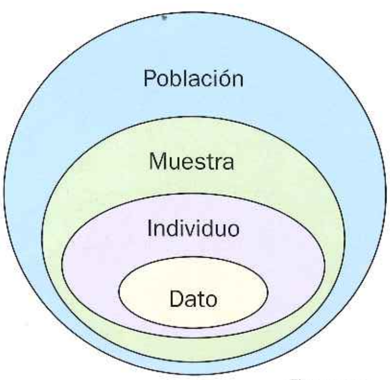


Figura 5.1

Conoce

Mateo podría preguntarle a cada uno de los estudiantes del colegio acerca de su deporte favorito, pero dado que se trata de un colegio con muchos estudiantes, esto no es práctico.

Entonces él podría, en su defecto, elegir al azar a diez estudiantes de cada curso y hacerles la pregunta. Con ello resolvería su inquietud.

La **estadística** es una ciencia casi tan antigua como la humanidad. Comprende el conjunto de métodos, estrategias y procedimientos para **recolectar**, **organizar** y **analizar** datos que se pueden observar en una **población** o en una **muestra**.

Algunos conceptos importantes de la estadística son:

- La **población**. Es el grupo de elementos o características con propiedades comunes sobre las cuales se dirige un estudio estadístico.
- La **muestra**. Es un grupo más pequeño tomado de la población, pero que permite obtener la misma información. A cada uno de los elementos de la población o la muestra se le denomina **individuo**.
- Un **dato**. Es el valor de la variable asociada a un elemento de la población o de la muestra.

  La Figura 5.1 muestra la relación que existe entre población, muestra, individuo y dato.
- Una **variable**. Es la característica de interés de cada individuo. Puede ser **cualitativa** (o de atributos), cuando se refiere a una cualidad de un elemento de la población, o **cuantitativa** (o numérica), cuando cuantifica un elemento de la población o de la muestra.

Ejemplo 1

Si a cada uno de los integrantes de un curso se le pregunta la edad, el peso o el número de hermanos, el estudio se refiere a variables cuantitativas, pero si a cada uno se le pregunta por su color preferido o por su lugar de nacimiento, se trata de variables cualitativas.

Ejemplo 2

En un centro médico se realizó una encuesta para establecer la edad, el peso y el género de los pacientes atendidos durante una semana.

Los elementos de este estudio se presentan en la Tabla 5.1.

Muestra	Individuo	Variables	Dato (Ejemplo)
Pacientes encuestados durante la semana	Cada uno de los pacientes encuestados	Edad (cuantitativa) Peso (cuantitativa) Género (cualitativa)	Edad: 23 años Peso: 62 kg Género: femenino

Tabla 5.1

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Identifica la población, la muestra y un individuo en cada uno de los siguientes estudios estadísticos.

a. Estudio sobre las materias preferidas por los estudiantes de un colegio. Se hace una encuesta a doce estudiantes de cada curso.

b. Estudio sobre la emisora radial preferida por las mujeres de una ciudad. Se entrevista a 200 mujeres de la ciudad.

c. Estudio sobre las condiciones en que se mantienen los animales del zoológico La Macarena. Se estudian dos animales de cada especie.

d. Estudio sobre la opinión de una comunidad respecto a sus gobernantes. Se preguntó a dos mil personas de la zona rural y a quinientas de la zona urbana.

2 Propón un título para cada uno de estos estudios. Ten en cuenta la población y la muestra.

a. **Población**: Niños y niñas colombianos menores de cinco años

Muestra: Niños y niñas de una ciudad

Título: ....

b. **Población**: Jugadores profesionales de fútbol

Muestra: Jugadores profesionales de tres equipos

Título: ....

Ejercitación

3 Indica a qué tipo de variable se refieren los estudios estadísticos que se presentan a continuación.

a. Equipo de fútbol preferido por los estudiantes de un curso.

b. Número de personas que realizan transacciones por hora en un cajero automático.

c. Estatura de los integrantes de los equipos de baloncesto de un campeonato regional.

d. Número de hijos por familia de los habitantes de un conjunto residencial.

Razonamiento

4 Indica cuál es la población de cada uno de los estudios estadísticos registrados en la Tabla 5.2 y explica si es conveniente tomar una muestra.

Estudio estadístico	Población	Muestra
Goles marcados por cada jugador de un equipo		
Comida preferida por los clientes de un restaurante		
Número de calzado de los miembros de una familia		
Número de hermanos de los habitantes de una ciudad		

Tabla 5.2

Resolución de problemas

5 Explica qué ventajas tiene realizar un estudio estadístico a toda la población de una comunidad. Comenta además qué desventaja tiene elegir una muestra.

Evaluación del aprendizaje

✓ Califica como verdadera (V) o falsa (F) cada afirmación.

a. La muestra tiene más elementos que la población.

b. El lugar de nacimiento de una persona es una variable cuantitativa.

c. El tiempo de duración de un viaje en avión es una variable cualitativa.

d. El número de retardos a clase de un estudiante es una variable cualitativa.

Estilos de vida saludable

Paula hace un estudio para saber si en su colegio hay niños que puedan estar sufriendo de desnutrición.

¿Cuál es la población de estudio de Paula y qué variables podría definir para su estudio? ¿Qué problemas trae la desnutrición?

2 Recolección y conteo de datos

Saberes previos

Supón que tienes un gran número de libros que debes contar. Explica una estrategia para hacerlo de forma ágil.

Analiza

Supón debes averiguar las edades de los estudiantes de tu curso y luego presentar un informe con los resultados.

- ¿Cuál puede ser una forma fácil y práctica de hacerlo?

Conoce

Una forma sencilla de presentar los resultados acerca de la edad de los estudiantes del curso es en una tabla como la 5.3, ya que esta permite visualizar de manera rápida y ágil la información.

Edad	Número de compañeros	Total
Menos de 11 años	///// ////	9
Entre 12 y 13 años	///// ///// ///	13
Más de 13 años	///// //	7

Tabla 5.3

Los **datos** de un estudio estadístico se recolectan mediante formularios, encuestas, entrevistas u observaciones directas, entre otros. Luego, se organizan en tablas que permiten clasificar y resumir la **información**.

El número de veces que se repite un dato se llama **frecuencia**.

Ejemplo 1

Al realizar una encuesta acerca del lugar de nacimiento de los 34 estudiantes de un curso, se obtuvieron los resultados que se muestran en la Tabla 5.4.

Lugar de nacimiento		
Ciudad de origen	Conteo	Número de personas
Bogotá	///// ///// ///// //	17
Cali	///// //	7
Cartagena	////	4
Medellín	///// /	6

Tabla 5.4

Cada raya (/) corresponde a un niño que procede de alguna ciudad. Observa que se han hecho grupos de cinco barras, pues eso facilita el conteo.

Ejemplo 2

La Tabla 5.5 recoge la información correspondiente a las horas de entrenamiento deportivo de un grupo de niños.

Horas de entrenamiento diarias	Conteo	Número de personas
2	////	4
3	////	4
4	///// /	6
5	///	3
6	///	3

Tabla 5.5

Cada raya (/) corresponde a un niño que entrena. Observa que se han hecho grupos de cinco barras, pues eso facilita el conteo.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1. Completa la Tabla 5.6 según la información dada.

Al preguntar acerca de cuántas horas diarias navegan por internet, 40 personas contestaron:

4	2	3	1	3	1	2	1	5	1
3	1	5	2	4	3	1	5	3	6
2	3	4	2	5	1	2	4	3	4
6	2	1	5	2	3	2	1	4	1

Horas al día dedicadas a navegar por internet

Número de horas	Conteo	Número de personas
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Tabla 5.6

2. Realiza el conteo de los siguientes datos con ayuda de la Tabla 5.7.

En una encuesta a un grupo de 30 personas acerca de su edad, se obtuvieron estos datos:

40	20	30	10	30	10	30	10
50	20	40	30	20	30	40	20
50	10	40	10	20	20	30	30
10	20	40	30	40	50		

Edad de 30 personas

Edad (años)	Conteo	Número de personas
10		
20		
30		
40		
50		

Tabla 5.7

Evaluación del aprendizaje

Haz el conteo de la encuesta y responde las preguntas.

¿Cuál es su color preferido?

verde	verde	blanco	azul	azul
negro	blanco	verde	azul	verde
blanco	azul	blanco	verde	azul
verde	blanco	negro	verde	azul
verde	negro	verde	azul	negro
verde	negro	verde	azul	azul
blanco	verde	blanco	verde	negro
verde	negro	verde	azul	negro
verde	negro	verde	azul	azul
blanco	verde	blanco	verde	negro

a. ¿Cuál es la variable que se analiza? ¿De qué tipo de variable se trata?

b. ¿Cuáles son los valores que toma la variable?

c. ¿Cuántas personas fueron consultadas?

d. Establece dos conclusiones sobre el estudio.

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

La mejor forma de solucionar los conflictos es por medio del diálogo. Averigua cuáles son las formas en las que tus compañeros solucionan sus desacuerdos con otras personas. Presenta tus resultados en una tabla de conteo. Luego, comenta por qué es importante el diálogo en la convivencia.

3 Gráficas circulares

Saberes previos

En un periódico, busca una noticia en la que aparezcan gráficas circulares. Interpreta la información que allí se representa. ¿En qué otras situaciones encuentras información representada en gráficas como estas?

Analiza

Algunos transportadores tienen forma de semicírculo y abarcan 180º. ¿Cuántos grados corresponden a un círculo?

Conoce

Un círculo barre un ángulo de 360º, es decir, se puede dividir en 360 partes iguales cada una de las cuales mide 1º.

En una **gráfica circular** la superficie del círculo se distribuye en sectores de amplitud proporcional al número de veces que aparece un determinado valor de una variable. A este número se le conoce como **frecuencia absoluta**.

Para calcular el número de grados que le corresponde a cada sector, se establece la relación:

$$\frac{360^\circ}{\text{Número total de datos}} = \frac{n^\circ}{\text{Frecuencia absoluta correspondiente}}$$

Ejemplo 1

Una empresa de reciclaje instaló 100 contenedores para el reciclaje de residuos. La gráfica circular de la Figura 5.2 y la Tabla 5.8 recogen la información.

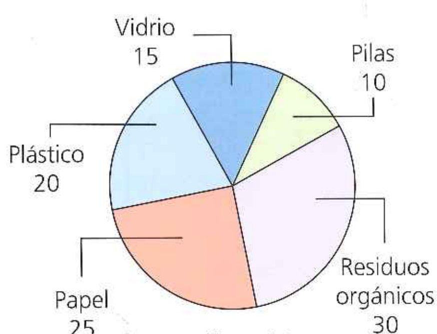


Figura 5.2

Tipo de residuos	Cantidad de contenedores
Orgánicos	30
Papel	25
Plástico	20
Vidrio	15
Pilas	10

Tabla 5.8

Para saber cuántos grados le corresponden al papel, se tiene en cuenta que su amplitud es proporcional a su frecuencia absoluta (25):

$$\frac{360^\circ}{100} = \frac{n^\circ}{25} \Rightarrow n^\circ = \frac{360^\circ \cdot 25}{100} = 90^\circ$$

Ejemplo 2

Para construir una gráfica circular con los datos de la Tabla 5.9, se halla la cantidad de grados que le corresponden a cada deporte. Después, se ubican las proporciones en un círculo.

Deporte preferido	Cantidad de personas
Natación	9
Tenis	3
Baloncesto	4
Patinaje	2
TOTAL	18

Tabla 5.9

Natación: $\frac{360^\circ}{18} = \frac{n^\circ}{9} \Rightarrow n^\circ = 180^\circ$ Baloncesto: $\frac{360^\circ}{18} = \frac{n^\circ}{4} \Rightarrow n^\circ = 80^\circ$

Tenis: $\frac{360^\circ}{18} = \frac{n^\circ}{3} \Rightarrow n^\circ = 60^\circ$ Patinaje: $\frac{360^\circ}{18} = \frac{n^\circ}{2} \Rightarrow n^\circ = 40^\circ$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Lee la información y resuelve.

A 30 jóvenes se les preguntó sobre sus revistas favoritas. El resultado se recoge en la Tabla 5.10.

Tipo	Número de jóvenes
Deportes	10
Científicas	2
Música	12
Animales	5
Históricas	1

Tabla 5.10

- Representa los datos mediante una gráfica circular.

Razonamiento

2 Obtén tres conclusiones de estas gráficas circulares que muestran el tiempo que tardan los estudiantes de cada grado sexto en resolver una evaluación.

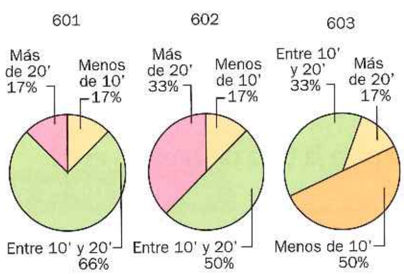


Figura 5.3

3 Observa la información que se muestra en el diagrama de la Figura 5.4, que corresponde al número de estudiantes asistentes a una práctica deportiva, y responde.

Figura 5.4

a. ¿Cuántos grados le corresponden a cada día en un diagrama circular?

b. ¿Qué porcentaje de estudiantes representa el día de mayor asistencia?

Resolución de problemas

4 Se promovió una campaña de ahorro de agua.

El diagrama de la Figura 5.5 representa el agua ahorrada por las familias que formaron parte de la muestra utilizada para estudiar la bondad de esta medida.

Figura 5.5

a. Pasa la información a un diagrama circular.

b. ¿Qué porcentaje de familias de la muestra ahorró entre 10 L y 30 L diarios?

Evaluación del aprendizaje

Observa la gráfica de la Figura 5.6, que muestra el resultado de un estudio sobre el sabor de gaseosa preferido por un grupo de estudiantes. Si solo cuatro personas prefieren el sabor a uva, ¿cuántas personas fueron encuestadas?

Figura 5.6

Educación ambiental

Se realizó un estudio sobre el número de especies de aves amenazadas en Colombia y se concluyó que de las 1885 especies que se cuentan en el país, 26 están en peligro, 6 en una situación crítica y 36 en estado vulnerable. Construye el diagrama circular que representa esta información.

4 Medidas de tendencia central

Saberes previos

¿Cuándo se dice que un cierto tipo de ropa está de moda?

Analiza

Los números de calzado de los estudiantes de un grado sexto son: 30, 33, 32, 31, 32, 29, 30, 34, 35, 29, 33, 34, 31, 35, 32, 33, 32 y 32.

- ¿Cuál es el número que más se repite?

Conoce

Al elaborar la tabla de frecuencias, se puede observar el dato que más se repite.

Número	Frecuencia
29	// = 2
30	// = 2
31	// = 2
32	///// = 5
33	/// = 3
34	// = 2
35	// = 2

Tabla 5.11

El número de calzado 32 es el que más se repite.

La **moda**, la **mediana** y la **media** son medidas que permiten realizar un análisis más detallado del comportamiento de un conjunto de datos.

4.1 Moda

La **moda** en un conjunto de datos es el dato que presenta mayor frecuencia.

Ejemplo 1

En la situación inicial la moda para la talla de zapatos es 32.

4.2 Mediana

La **mediana** (Me) de un grupo de **datos ordenados** de menor a mayor es el valor que ocupa la **posición central** en caso de tener un número impar de datos. Si el grupo de datos es par, la mediana se calcula sumando los dos valores centrales y dividiendo el total entre 2.

Ejemplo 2

Las siguientes son las edades de los doce amigos de Sofía que fueron a su fiesta de cumpleaños.

13 12 13 14 16 17 9 12 15 17 18 19

Se ordenan los datos de menor a mayor. Como el número de datos es un número par, la mediana será el promedio de los dos valores centrales.

9 12 12 13 13 $\underbrace{14 \quad 15}$ 16 17 17 18 19

Dos valores centrales

$$\frac{14+15}{2} = 14{,}5 \leftarrow \text{Me}$$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

4.3 Media

La **media** (x) o promedio de un grupo de datos se obtiene al calcular la suma de todos los valores y dividirla por el número de datos.

Ejemplo 3

Andrés obtuvo las siguientes notas en cuatro pruebas de matemáticas: 78, 92, 83, 99. Para hallar el promedio de sus notas, él efectúa la operación:

$$\frac{78 + 92 + 83 + 99}{4} = \frac{352}{4} = 88$$

El promedio de las notas de Andrés fue 88.

Ejemplo 4

Se preguntó a un grupo de 18 personas sobre el número de veces que comían fuera de casa en un año. La información obtenida se encuentra en el cuadro de la derecha. ¿Cuál es la media de los datos?

Suma de los datos

$$x = \frac{782}{18} = 43{,}44 \text{ veces}$$

Número total de datos

23	38	45	29	56	39
38	39	45	29	54	29
67	54	37	28	54	78

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1. Halla la media, la mediana y la moda de cada conjunto de datos.
   a. 15, 17, 13, 15, 17, 18, 19, 10, 24, 21, 22, 14, 17, 32
   b. 4, 1, 4, 8, 13, 1, 2, 16, 24, 11, 11, 21, 21
   c. 28, 24, 33, 24, 35, 27, 27, 25, 24, 23, 22, 25, 24, 20

Resolución de problemas

2. En las Tablas 5.12 y 5.13 se registraron los resultados de la prueba de salto alto de dos estudiantes que compiten para ingresar a un club de atletismo.

Prueba de salto alto Carlos Beltrán	
Primer intento	1,20 m
Segundo intento	1,19 m
Tercer intento	1,24 m
Cuarto intento	1,35 m

Tabla 5.12

Prueba de salto alto Jesús Pérez	
Primer intento	1,28 m
Segundo intento	1,21 m
Tercer intento	1,21 m
Cuarto intento	1,25 m

Tabla 5.13

Si el estudiante ganador es aquel que tenga mejor promedio de salto en los cuatro intentos, ¿cuál de los dos ingresó al club de atletismo?

Evaluación del aprendizaje

Lee cada enunciado y califica como verdadero (V) o falso (F).

a. El promedio solo se puede calcular para variables cuantitativas.
b. La media y la moda pueden ser iguales.
c. Un conjunto de datos puede tener más de una moda.

5 Experimentos aleatorios y no aleatorios

Saberes previos

En los campeonatos mundiales de fútbol Brasil siempre es uno de los favoritos para ganar. ¿A qué creas que se deba ese favoritismo?

Analiza

El Mundial de Fútbol es un campeonato en el cual participan 32 selecciones nacionales masculinas.

- ¿Se puede determinar con anticipación el nombre del equipo ganador de este campeonato?

Conoce

A pesar de que no es posible determinar cuál de los 32 equipos que participan en el Mundial de Fútbol será el campeón, sí existen favoritos que tienen buenas probabilidades de ganar.

5.1 Experimentos aleatorios

Cuando no se puede saber el resultado de un experimento aunque se repita muchas veces, se le llama **experimento aleatorio**. Por el contrario, cuando se sabe de antemano el resultado de un experimento, se le llama **determinista**.

Ejemplo 1

Observa algunos tipos de experimentos en la Tabla 5.15.

Experimentos	
Aleatorios	Deterministas
Obtener un número par al lanzar un dado.	Crear color verde mezclando amarillo con azul.
Ganar la lotería.	Sumar 2 con 3 y obtener 5.
Escoger un representante del curso de los 30 estudiantes de grado séptimo.	Congelar el agua a una temperatura bajo cero.

El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio se llama **espacio muestral** y se denota con la letra E.

Ejemplo 2

Enseguida se muestra el espacio muestral de varios eventos.

a. Lanzar una moneda: Hay dos posibles resultados: $E = \{\text{cara, sello}\}$.

b. Lanzar dos monedas: $E = \{(\text{cara, cara}), (\text{cara, sello}), (\text{sello, cara}), (\text{sello, sello})\}$

c. Lanzar un dado: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

5.2 Sucesos aleatorios

A los subconjuntos de un espacio muestral se les llama **sucesos** o **eventos**. Se representan con letras mayúsculas y se designan escribiendo entre llaves los posibles resultados que pueden darse.

Ejemplo 3

En el experimento que consiste en lanzar un dado con las caras numeradas del 1 al 6, el espacio muestral es:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Algunos sucesos aleatorios de E son:

Salir un número par: $E = \{2, 4, 6\}$

Salir un número impar: $E = \{1, 3, 5\}$

Salir un número múltiplo de 3: $E = \{3, 6\}$

5.3 Tipos de sucesos

- **Suceso elemental:** es el formado por un solo resultado.
- **Suceso compuesto:** es el formado por más de un resultado.
- **Suceso seguro:** es el que ocurre siempre en un determinado experimento.
- **Suceso imposible:** es el que nunca ocurre en un determinado experimento.

Ejemplo 3

En el Mundial de Fútbol del 2018 se pueden presentar diferentes tipos de sucesos, como se muestra en la siguiente tabla.

Tipo de suceso	El ganador del Mundial será...
Elemental	El que ha ganado más copas mundiales. A = {Brasil}
Compuesto	El que ya ha sido campeón mundial. B = {Brasil, Alemania, Italia, Argentina, España, Inglaterra, Francia, Uruguay}
Seguro	Uno de los equipos clasificados para el Mundial de Fútbol 2018.
Imposible	Un equipo no clasificado para el Mundial de Fútbol 2018.

Tabla 5.13

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1. En una rifa que se va a realizar en el colegio se tienen papeletas numeradas del 1 al 100.
   a. Forma el espacio muestral.
   b. Escribe los posibles resultados del suceso: {obtener un número que empieza por 7}.
   c. Indica los posibles resultados del suceso: {sacar número que se lea igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda}.

Razonamiento

2. Se tiene una caja con dos bolas rojas y tres verdes. Se sacan tres a la vez y se anotan los colores. Escribe el espacio muestral y los posibles resultados del suceso: {salir al menos dos bolas iguales}.

Razonamiento

3. Se realiza un experimento aleatorio que consiste en anotar el número de la balota sacada de una caja con siete balotas numeradas del 1 al 7.
   a. Escribe los elementos del suceso: {sacar un número par}.
   b. Escribe los elementos del suceso: {sacar un número menor o igual que 3}.

Ejercitación

4. Un estudiante responde al azar a dos preguntas de verdadero o falso. Escribe el espacio muestral de este experimento aleatorio.

Modelación

5. Otro estudiante responde al azar a 4 preguntas del mismo tipo anterior.
   a. Escribe el espacio muestral.
   b. Escribe el suceso responder "falso" a una sola pregunta.
   c. Escribe el suceso responder "verdadero" al menos a 3 preguntas.

Evaluación del aprendizaje

✓ Indica si estos experimentos son aleatorios y, en caso afirmativo, forma el espacio muestral.
   a. Se extrae, sin mirar, una carta de una baraja española.
   b. Se lanza un dado tetraédrico regular, cuyas caras están numeradas del 1 al 4, y se anota el resultado de la cara oculta.

6 Probabilidad de un evento

Saberes previos

¿Por qué crees que se use una moneda para tomar algunas decisiones, para sortear o para dirimir un empate?

Analiza

¿Qué es más probable que ocurra al lanzar un dado de seis caras, que caiga en un número par o en uno impar?

Conoce

El espacio muestral del suceso {lanzar un dado} es {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Así, al lanzar un dado es tan probable sacar un número par: 2, 4, 6 como sacar uno impar: 1, 3, 5.

6.1 Probabilidad de un suceso aleatorio

La **probabilidad** de un suceso es un número, comprendido entre 0 y 1, que indica las posibilidades que tiene de verificarse cuando se realiza un experimento aleatorio.

Ejemplo 1

En una rifa se vendieron 100 boletas numeradas del 1 al 100. Pedro compró dos boletas y Ana compró quince.

Las posibilidades que tiene cada uno de ganar se pueden indicar con los siguientes cocientes:

$$\text{Pedro } \frac{2}{100} = 0{,}02 = 2\% \qquad \text{Ana } \frac{15}{100} = 0{,}15 = 15\%$$

Cada cociente es un número entre 0 y 1 que indica la probabilidad que tienen Pedro y Ana de ganar. En este caso, Ana tiene mayor probabilidad de ganar la rifa.

Cuando en un experimento aleatorio todos los resultados tienen las mismas posibilidades de ocurrir, se puede calcular la probabilidad de un suceso utilizando la **regla de Laplace**.

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables del suceso A}}{\text{Número de casos posibles}}$$

Ejemplo 2

Para aplicar la regla de Laplace en el cálculo de la probabilidad de obtener cara al lanzar una moneda, se determina el número de casos posibles y el número de casos favorables. $P\,(\text{cara}) = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Ejemplo 3

En un salón hay 16 niñas y 14 niños. Se escribe el nombre de cada uno de ellos en una tarjeta y se introducen en una caja las 30 tarjetas. A continuación, se extrae una tarjeta.

a. La probabilidad de que la tarjeta extraída muestre el nombre de un niño es:

$$\frac{14}{30} = \frac{7}{15} = 0{,}466 \approx 47\%$$

b. La probabilidad de que la tarjeta extraída muestre el nombre de una niña es:

$$\frac{16}{30} = \frac{8}{15} = 0{,}533 \approx 53\%$$

Ejemplo 4

En una caja de dulces hay 10 de manzana, 6 de fresa y 5 de mora. Si se escoge un dulce al azar,

a. la probabilidad de que el caramelo sea de manzana es:

$$\frac{10}{21} \approx 0{,}477\% \approx 47{,}7\%$$

b. la probabilidad de que el caramelo sea de fresa es:

$$\frac{6}{21} = \frac{2}{7} \approx 0{,}286 \approx 28{,}6\%$$

c. la probabilidad de que el caramelo sea de mora es:

$$\frac{5}{21} \approx 0{,}238\% \approx 23{,}8\%$$

Ejemplo 5

Según el IDEAM, la probabilidad de que mañana llueva en Bogotá es de $\frac{2}{7}$.

Para calcular la probabilidad de que no llueva será entonces: $1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$.

Como $\frac{5}{7} > \frac{2}{7}$, entonces es menor la probabilidad de lluvia.

Normalmente, la probabilidad del estado del tiempo se presenta mediante porcentajes.

Así, según el IDEAM, la probabilidad de que llueva mañana en Bogotá es de $\frac{2}{7} \approx 0{,}29 = 29\%$ y de que no llueva, 71 %.

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Realiza lo que se indica.

Se lanzan dos monedas de $ 500 y se anotan los resultados obtenidos.

a. Escribe el espacio muestral.

b. Indica el suceso {sacar dos caras o dos sellos}.

Razonamiento

2 Califica como verdadera (V) o falsa (F) cada afirmación.

a. La probabilidad de obtener un número par de puntos al lanzar un dado es $\frac{1}{3}$.

b. La probabilidad de sacar una bola roja de una bolsa que contiene dos bolas azules, tres rojas y dos blancas es $\frac{3}{10}$.

Resolución de problemas

3 En una bolsa hay tres bolas rojas y dos azules. Si se saca una bola roja, ¿cuál es la probabilidad de que la siguiente bola que se saque también sea roja?

Evaluación del aprendizaje

Determina cuál es la probabilidad de que Mario reserve una habitación con vista al mar, si el hotel donde se va a hospedar tiene dos habitaciones disponibles con vista al mar y cuatro que dan a la calle.

Educación ambiental

Ana recorre una reserva natural en donde hay 45 venados cola blanca, 25 osos de anteojos, una pareja de cóndor de los andes y 12 tigrillos. ¿Cuál es la probabilidad que durante su recorrido Ana encuentre un oso de anteojos?, ¿qué importancia crees que tienen las reservas naturales?

Practica más

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Población, muestra y variables

Comunicación

1 Determina la población, muestra y variable de cada situación estadística.

a. El colegio desea saber la estatura de las niñas de 6.º. Se eligieron cinco niñas de cada curso.

b. Un canal de televisión desea saber la telenovela favorita de los bogotanos. Se realiza una encuesta a 150 personas de Bogotá.

c. Una empresa de aplicaciones para dispositivos móviles entrevista a 250 usuarios para saber la cantidad de aplicaciones gratuitas que han descargado.

d. El colegio realiza una encuesta a 250 estudiantes sobre su *hobby* favorito.

Recolección y conteo de datos

2 Realiza el conteo y completa la tabla de frecuencias.

Medio de transporte	Conteo	Total
Carro	//////////	
Moto	///////////	
Bicicleta	////	
Bus	///////////////	
Taxi	/////	
Patines, patineta	///////	

Tabla 5.16

Diagramas circulares

Ejercitación

3 Utiliza la información de la Tabla 5.16 para responder las preguntas que se presentan a continuación.

a. ¿Cuál es el medio de transporte más utilizado?

b. ¿Cuántas personas fueron encuestadas?

c. ¿Cuántas personas utilizan un medio alternativo de transporte?

d. Construye el diagrama circular correspondiente a la información de la tabla.

Medidas de tendencia central

Resolución de problemas

4 El gerente de una droguería desea saber el comportamiento de las ventas durante una semana. Para esto, registró los datos en una tabla.

Día	Venta ($)
Lunes	350 000
Martes	720 000
Miércoles	650 000
Jueves	568 000
Viernes	980 000

Tabla 5.17

a. ¿Cuál fue la venta total de la semana?

b. ¿Qué día se registró la mayor venta?

c. ¿Cuál fue el promedio de ventas esa semana?

d. ¿Existe moda y mediana en esta situación? Explica.

Probabilidad

Resolución de problemas

5 En una urna hay 30 bolas numeradas del 1 al 30. Se extrae una bola al azar. Calcula la probabilidad de que la bola extraída:

a. sea un número par.

b. sea un número que termina en 0.

c. sea un múltiplo de 5.

d. no sea un múltiplo de 3.

e. sea el número 0.

f. sea un número primo.

Exprésala como razón, decimal y porcentaje.

6 En una caja hay 2 bolas negras, 4 bolas azules y 3 verdes. Calcula la probabilidad de que al extraer una bola al azar:

a. sea negra.

b. no sea roja.

c. sea roja

d. no sea azul.

e. sea azul y negra.

Exprésala como razón, decimal y porcentaje.

Resolución de **problemas**

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Estrategia: Organizar la información en una tabla

Problema

Se realizó una encuesta a los 36 estudiantes de grado sexto sobre su comida preferida. Se encontró que ocho estudiantes prefieren hamburguesa, diez pizza, quince perro caliente y los demás, burritos. ¿Cuántos estudiantes prefieren los burritos?

1. Comprende el problema

- ¿Qué información se obtuvo en la encuesta?
  R: La comida preferida de los estudiantes de grado sexto.
- ¿Qué cantidad hace falta para completar los datos?
  R: El número de estudiantes que prefieren los burritos.

2. Crea un plan

- Construye una tabla de frecuencias y encuentra la frecuencia de los burritos.

3. Ejecuta el plan

- Organiza los datos que da el problema en una tabla de frecuencias.

Comida preferida	Frecuencia
Hamburguesa	8
Pizza	10
Perro caliente	15
Burritos	
Total	36

Tabla 5.18

- Al total de estudiantes, réstale la suma de los datos conocidos; esta diferencia será la frecuencia que falta.

$$36 - (8 + 10 + 15) = 36 - 33 = 3$$

R: El número de estudiantes de grado sexto que prefieren burritos es 3.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que la suma de las frecuencias, incluida la de los burritos, sea 36.

Aplica la estrategia

1 Se les preguntó a 50 asistentes a un parque de diversiones sobre la atracción que más les gusta. Se obtuvo que quince prefieren la montaña rusa, doce la rueda panorámica, nueve la casa del terror y los demás el simulador espacial. ¿Cuántos asistentes prefieren el simulador espacial?

a. Comprende el problema

....

....

b. Crea un plan

....

....

c. Ejecuta el plan

....

....

d. Comprueba la respuesta

....

....

Resuelve otros problemas

2 En una encuesta realizada a 400 personas sobre el tipo de transporte que utilizan para viajar se determinó que el 25% viaja en avión. Si el porcentaje de personas que viajan en carro corresponde a la mitad del porcentaje de las que viajan en avión, ¿cuántas personas viajan en carro?

Formula problemas

3 Inventa y resuelve un problema que incluya esta información.

12	13	12	14	12	10	11	12	13	14
13	12	14	12	13	10	11	11	12	13
12	13	14	13	12	12	11	10	12	11

Enriquece tu vocabulario

- Construye una oración con estas palabras:
  frecuencia moda población

Evaluación del aprendizaje

Población, muestra y variables

Razonamiento

1 Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas: VERDADERO / FALSO

a. Para realizar un estudio estadístico se debe investigar a toda la población objeto de estudio. ☐

b. La propiedad o característica de la población que queremos estudiar se denomina variable estadística. ☐

c. Una muestra es una parte de la población que se desea estudiar. ☐

d. Las variables que toman valores no numéricos son variables cualitativas. ☐

e. La variable número de letras de las palabras de un texto es una variable cuantitativa continua. ☐

2 Identifica si cada una de las siguientes variables son cualitativas o cuantitativas. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. Número de pupitres de un salón de clase.

b. Candidato más votado en unas elecciones.

c. Longitud de las calles de una ciudad.

d. Color de ojos de los estudiantes de sexto grado.

e. Altura de los jugadores de un equipo de baloncesto.

Modelación

3 Indica en cada una de las situaciones presentadas:

- Cuál es la población.
- Cuál es la variable.
- Tipo de variable: cualitativa o cuantitativa.

ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. Peso al nacer de los bebés que nacieron en Cali en 2015.

b. Profesiones que quieren estudiar los estudiantes de un colegio.

c. Partidos políticos que serán candidatos en las próximas elecciones.

d. Tiempo semanal que dedican a la lectura los estudiantes de sexto grado.

e. Número de tarjetas amarillas mostradas en los partidos de fútbol del campeonato mundial Brasil 2014.

Recolección y conteo de datos

Ejercitación

4 Se realizó una encuesta acerca de los buscadores más usados en internet y se obtuvo la siguiente información: ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

Google	Yahoo	Terra	Altavista	MSN	Google
Google	Google	Terra	MSN	MSN	Google
Altavista	MSN	Google	Google	Yahoo	Terra
Altavista	Google	Yahoo	Terra	MSN	Google

Completa la tabla de frecuencia para este estudio.

Buscador	Conteo	Total
Google		
Yahoo		
Terra		
Altavista		
MSN		

Tabla 5.19

a. ¿Cuál es el buscador más usado?

b. ¿En qué porcentaje se usa el buscador más usado?

c. Construye un diagrama circular para los datos de la tabla.

Comunicación

5 Menciona algunas maneras de obtener datos o información para realizar un estudio estadístico. PREGUNTA ABIERTA

6 Lee y construye el esquema de acuerdo con la siguiente información. ORGANIZADORES GRÁFICOS

> Las técnicas y recolección de datos se definen como el conjunto de procedimientos y herramientas para recoger, validar y analizar la información necesaria que permita lograr los objetivos de una investigación o estudio.

Pasos en una investigación o estudio estadístico

Diagramas circulares

Razonamiento

7 Observa y completa la tabla. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

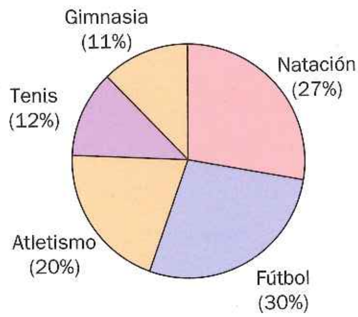


Figura 5.8

Deporte preferido por 100 personas	
Deporte	**Frecuencia absoluta**
Gimnasia	
Natación	
Fútbol	
Atletismo	
Tenis	

Tabla 5.20

Resolución de problemas

8 Se preguntó a un grupo de estudiantes acerca de su materia preferida y se obtuvieron los siguientes resultados. ACTIVIDAD DE REFUERZO

Materia preferida	Frecuencia absoluta
Matemáticas	30
Lenguaje	25
Sociales	20
Naturales	15
Inglés	10

Tabla 5.21

Escribe al frente de la clave de color el nombre de la asignatura correspondiente. Ten en cuenta los datos de la tabla anterior.

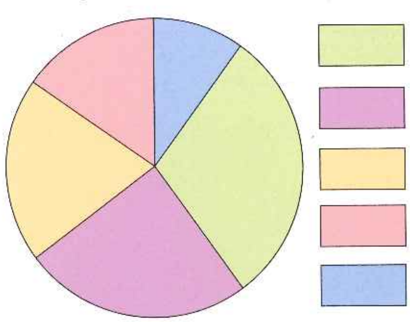


Figura 5.9

Medidas de tendencia central

Ejercitación

9 Calcula la media, la mediana y la moda de los siguientes conjuntos de datos: ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

a. Edades de un grupo de personas: 8 años, 20 años, 10 años, 6 años, 13 años, 20 años, 12 años.

b. Estaturas de un grupo de estudiantes: 174 cm, 174 cm, 182 cm, 183 cm, 156 cm, 182 cm, 185 cm, 192 cm.

c. La cotización de un mueble hecha en cinco almacenes diferentes: $ 32 000, $ 35 000, $ 50 000, $ 43 500, $ 38 000.

Experimentos aleatorios, no aleatorios y probabilidad.

Razonamiento

10 Completa cada afirmación para que resulte una proposición cierta. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

a. Extraer, sin mirar, una canica roja de una bolsa que contiene canicas solo de ese color, es un experimento: ....

b. Seleccionar una vocal de una bolsa que contiene papelitos con cada una de las letras del alfabeto es: ....

c. Un bolsa contiene pelotas azules y rojas. Si se extrae una pelota sin mirar, la probabilidad de sacar una de color azul es: ....

d. Lanzar un dado y que caiga mostrando una cara con una cantidad de puntos menor que 7 es un experimento ....

Resolución de problemas

11 Resuelve cada una de las siguientes situaciones. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En la última evaluación, en mi clase aprobaron matemáticas el 67%, inglés el 63% y el 38% aprobaron las dos asignaturas. Elegido un estudiante de la clase al azar, calcula la probabilidad de que:

a. Haya aprobado alguna de las dos.
b. No haya aprobado ninguna de las dos.
c. Haya aprobado sólo matemáticas.
d. Haya aprobado sólo una de las dos.
e. Haya aprobado inglés.

6 Proporcionalidad. Ecuaciones e inecuaciones

Ya sabemos

- Identificar la razón entre dos magnitudes.
- Determinar si dos razones forman una proporción.

Vamos a aprender

- A utilizar la propiedad fundamental de las proporciones.
- A solucionar ecuaciones e inecuaciones.

Nos sirve para

- Solucionar situaciones utilizando la proporcionalidad.
- Solucionar situaciones utilizando ecuaciones.

1 Razones y proporciones

Pensamiento variacional

Saberes previos

En la preparación de una torta para 5 personas se deben agregar 8 huevos a una un kilo de harina. ¿Qué ingredientes deben usarse para preparar una torta para 10 personas?

Analiza

Miguel encontró una receta para preparar una cobertura de chocolate para decorar una torta.

Cobertura de chocolate

- 70 g de azúcar *glass*
- 60 g de mantequilla
- Dos cucharadas de agua
- Tres cucharadas de cocoa

- ¿Cómo puede expresarse una relación entre la cantidad de azúcar y la cantidad de mantequilla que se necesita?

Conoce

1.1 Razones

Para comparar la cantidad de azúcar con la cantidad de mantequilla que se necesita para la receta, se puede utilizar una **razón**.

$$\frac{70}{60} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{gramos de azúcar} \\ \leftarrow \text{gramos de mantequilla} \end{matrix}$$

En la anterior relación se establece que la razón entre la cantidad de gramos de azúcar y la cantidad de gramos de mantequilla es: 70 a 60, respectivamente.

Una **razón** es la expresión numérica de comparación entre las medidas de dos magnitudes. La razón entre a y b se escribe a/b, $a : b$ o $a \div b$, y se lee: "a es a b". El primer término de la razón (a) se denomina **antecedente**, y el segundo (b), **consecuente**.

Para conseguir **razones equivalentes** a una razón dada, se amplifica o se simplifica.

Ejemplo 1

Para encontrar una razón equivalente a la razón $\frac{2}{3}$, se puede amplificar por 3.

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{6}{9}$$

Las razones $\frac{2}{3}$ y $\frac{6}{9}$ son equivalentes; por tanto, $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$.

1.2 Proporciones

Dos razones equivalentes forman una proporción. La proporción entre las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se escribe $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, y se lee: "$a$ es a b como c es a d". Los términos a y d se denominan *extremos*, y los términos b y c, *medios*.

Ejemplo 2

La proporción $\frac{5}{2} = \frac{10}{4}$ se lee: "5 es a 2 como 10 es a 4". Los extremos de la proporción son 5 y 4, y los medios, 2 y 10.

1.3 Propiedad fundamental de las proporciones

En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

La propiedad fundamental de las proporciones permite comprobar si dos razones forman una proporción.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Modelación

1 Encuentra la razón que expresa la comparación entre las cantidades de cada conjunto.

a.

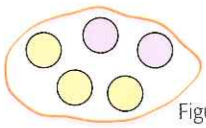


Figura 6.1

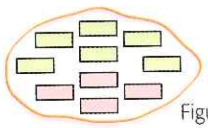


Figura 6.2

$\frac{\text{círculos morados}}{\text{círculos amarillos}} = \frac{\square}{\square}$ $\qquad$ $\frac{\text{rectángulos verdes}}{\text{rectángulos rojos}} = \frac{\square}{\square}$

b.

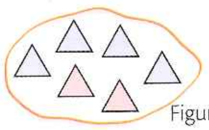


Figura 6.3

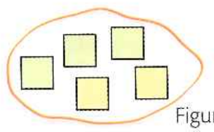


Figura 6.4

$\frac{\text{triángulos azules}}{\text{triángulos rojos}} = \frac{\square}{\square}$ $\qquad$ $\frac{\text{cuadrados verdes}}{\text{cuadrados amarillos}} = \frac{\square}{\square}$

2 Encuentra cuatro razones equivalentes a cada una de las razones dadas.

a. $\frac{3}{5}$ $\quad$ b. $\frac{7}{4}$ $\quad$ c. $\frac{4}{3}$ $\quad$ d. $\frac{8}{55}$

e. $\frac{1}{6}$ $\quad$ f. $\frac{1}{5}$ $\quad$ g. $\frac{2}{9}$ $\quad$ h. $\frac{2}{5}$

Comunicación

3 Interpreta cada enunciado mediante una razón matemática.

a. Tres estudiantes por cada profesor.

b. Cuatro jugos de mora por cada jugo de fresa.

c. Cuatro mujeres por cada 20 concursantes.

d. Treinta lápices rojos por cada quince lápices negros.

Razonamiento

4 Señala la expresión que no es una proporción, en cada caso.

a. $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ $\qquad$ $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ $\qquad$ $\frac{13}{15} = \frac{4}{5}$

b. $\frac{2}{9} = \frac{6}{18}$ $\qquad$ $\frac{4}{7} = \frac{8}{14}$ $\qquad$ $\frac{20}{24} = \frac{5}{6}$

c. $\frac{3}{2} = \frac{30}{20}$ $\qquad$ $\frac{6}{10} = \frac{15}{25}$ $\qquad$ $\frac{40}{50} = \frac{8}{10}$

5 Determina si las medidas de los lados correspondientes de las figuras forman una proporción.

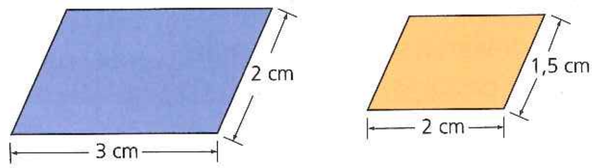


Figura 6.5

Resolución de problemas

6 Sandra utilizó ocho pocillos de agua y cuatro de arroz para preparar el almuerzo. ¿Cuántos pocillos de agua se deben emplear por cada pocillo de arroz?

Evaluación del aprendizaje

i Explica el significado de cada frase.

a. La razón entre la cantidad de hombres y la de mujeres es de 5 a 2.

b. La razón entre la cantidad de desempleados y la de empleados es de 6 a 10.

ii Indica si los datos presentados en la tabla forman una proporción o no. Explica tu respuesta.

Venta de cuadernos	
Número de cuadernos	Precio ($)
2	6 000
3	9 000

Tabla 6.1

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Los objetivos que tiene cada persona se pueden planificar a futuro en búsqueda tanto del bienestar propio como del colectivo. Construye una lista de tus objetivos donde los clasifiques en corto, mediano o largo plazo. Luego, expresa tus objetivos como una razón; por ejemplo, por cada diez objetivos, tres son de largo plazo, es decir, 10 a 3.

2 Proporcionalidad directa

Pensamiento variacional

Saberes previos

Para preparar una receta para tres personas se requiere cierta cantidad de huevos. ¿Cuántos huevos se necesitan si se duplica la cantidad de personas?

Analiza

Laura utilizó tres huevos en la preparación de un postre.

- ¿Cuántos postres puede preparar con doce huevos? ¿Cuántos huevos necesita para preparar siete postres?

Conoce

Para responder las preguntas es necesario conocer cómo varía la cantidad de huevos al variar la cantidad de postres.

En la Tabla 6.2 se registra la cantidad de huevos necesarios al variar la cantidad de postres.

Número de postres	Número de huevos
1	3
2	6
4	12
7	21

Tabla 6.2

Laura puede preparar cuatro postres con doce huevos y necesita 21 huevos para preparar siete postres.

En la Tabla 6.2 se observa que a medida que aumenta la cantidad de huevos, también aumenta la cantidad de postres. Se dice que estas magnitudes están **directamente correlacionadas**.

Dos magnitudes están **directamente correlacionadas** si al aumentar una, la otra también aumenta, o si al disminuir una, la otra también disminuye.

Además, si se calculan los cocientes que se obtienen al dividir el número de huevos entre la cantidad de postres (Tabla 6.2), se encuentra que todos son iguales a 3.

$$\frac{3}{1} = 3 \qquad \frac{6}{2} = 3 \qquad \frac{12}{4} = 3 \qquad \frac{21}{7} = 3$$

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si están directamente correlacionadas y el cociente entre los valores que se relacionan siempre es el mismo.

Ejemplo 1

Para responder las preguntas de la sección Analiza, se puede plantear una proporción, para cada pregunta, en la que aparezca el término desconocido, y se resuelve aplicando la propiedad fundamental de las proporciones.

$$\frac{3}{1} = \frac{12}{m}$$
$$3 \cdot m = 1 \cdot 12$$
$$m = \frac{12}{3}$$
$$m = 4$$

$$\frac{3}{1} = \frac{b}{7}$$
$$1 \cdot b = 3 \cdot 7$$
$$1 \cdot b = 21$$
$$b = 21$$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Indica si las magnitudes son directamente proporcionales o no. Justifica.

a. El número de camisas compradas y el precio de una camisa.

b. Las horas que trabaja una persona y el dinero que recibe por su trabajo.

c. El peso de una botella y el diámetro de su boquilla.

Ejercitación

2 Completa los recuadros, si se sabe que las magnitudes son directamente proporcionales.

a.

3 m	$ 4 500
4 m	

b.

30 km	6 horas
	3 horas

c.

15 botellas	120 L
5 botellas	

d.

6 giros	480 m
	800 m

3 Selecciona la proporción que permite hallar el valor de *n*, de acuerdo con la información de la tabla.

Tiempo (h)	4	8
Recorrido (km)	240	*n*

Tabla 6.3

$\frac{4}{240} = \frac{n}{8}$ $\frac{n}{8} = \frac{8}{240}$ $\frac{4}{240} = \frac{8}{n}$

Comunicación

4 Identifica la relación entre las magnitudes y completa la lista de precios.

Cantidad de cereal (kg)	4	5	7	10
Precio ($)	7 200	9 000		

Tabla 6.4

Resolución de problemas

5 En un curso, por cada siete niñas hay cinco niños. Si en total hay 21 niñas, ¿cuántos estudiantes tiene el curso?

Evaluación del aprendizaje

Completa la Tabla 6,5, si se sabe que para preparar duraznos en almíbar se mezclan 2 L de miel con 9 L de agua. Luego, contesta las preguntas.

Cantidad de miel (L)	**Cantidad de agua (L)**
1	
2	
	18
5	
	31,5

Tabla 6.5

a. Al conocer solo la cantidad de litros de miel, ¿qué hiciste para saber cuántos litros de agua se necesitan para que el almíbar quede igual de dulce?

b. ¿Qué hiciste para saber cuántos litros de miel se necesitan en cada caso?

c. ¿Cuántos litros de miel se necesitan si se van a utilizar 60 litros de agua para preparar duraznos en almíbar?

Educación ambiental

Durante un recorrido por el bosque, Julián notó que por cada cinco árboles que observaba encontraba dos nidos de aves. Si al final de su recorrido Julián observó 630 árboles, ¿cuántos nidos encontró? ¿Por qué crees que es importante evitar la deforestación?

3 Proporcionalidad inversa

Saberes previos

Para recolectar el arroz de una finca en Ambalema, Tolima, se necesitan 20 personas. ¿Qué debe hacerse para que la recolección se reduzca a la mitad del tiempo?

Analiza

Catalina tiene 24 fotografías y las quiere pegar en un álbum que tiene como mínimo 24 páginas.

- Si Catalina quiere pegar la misma cantidad de fotografías en cada página, ¿cuántas posibilidades tiene?

Conoce

Para responder la pregunta es necesario conocer cómo varía la cantidad de fotografías en cada página y la cantidad de páginas que necesita.

En la Tabla 6.6 se registra la cantidad de páginas del álbum al variar la cantidad de fotografías por página.

Número de fotografías por página	Número de páginas del álbum
1	24
2	12
3	8
4	6
6	4
8	3
12	2
24	1

Tabla 6.6

Allí se presentan todas las posibilidades que tiene Catalina para pegar las 24 fotografías en el álbum.

También se observa que a medida que aumenta la cantidad de fotografías por página, disminuye la cantidad de páginas que se necesitan.

Dos magnitudes están **inversamente correlacionadas** si al aumentar una, la otra disminuye, o si al disminuir una, la otra aumenta.

Además, si se calculan los productos de los valores correspondientes a la Tabla 6.6, se encuentra que todos son iguales a 24.

$1 \cdot 24 = 24 \qquad 2 \cdot 12 = 24 \qquad 3 \cdot 8 = 24 \qquad 4 \cdot 6 = 24$

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** si están inversamente correlacionadas y el producto entre los valores que se relacionan siempre es el mismo.

Ejemplo 1

Para completar la Tabla 6.7, sabiendo que las magnitudes son inversamente proporcionales, se plantea una ecuación teniendo en cuenta que el producto entre las magnitudes es el mismo.

Número de cajas	Número de dulces
12	8
6	n

Tabla 6.7

$$\begin{aligned} 12 \cdot 8 &= 6 \cdot n \\ 96 &= 6 \cdot n \\ \frac{96}{6} &= n \\ 16 &= n \end{aligned}$$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Responde las preguntas según la información de la Tabla 6.8.

Tiempo de fabricación de 1 000 tornillos	
Número de máquinas	Tiempo (h)
5	12
15	4

Tabla 6.8

a. ¿Las magnitudes que se relacionan están directa o inversamente correlacionadas?

b. ¿Las magnitudes son directa o inversamente proporcionales? ¿Por qué?

2 Encuentra el dato que falta en cada tabla, si se sabe que las magnitudes son inversamente proporcionales.

a.

Grupos	9	6
Personas	36	n

Tabla 6.9

b.

N.º de equipos	4	n
N.º de jugadores	12	8

Tabla 6.10

3 Colorea la expresión que representa la relación entre las magnitudes de la tabla.

Número de trabajadores que construyen un muro	12	15
Tiempo empleado (h)	5	r

Tabla 6.11

$12 \cdot 5 = 15 \cdot r$

$\frac{12}{5} = \frac{15}{r}$

Comunicación

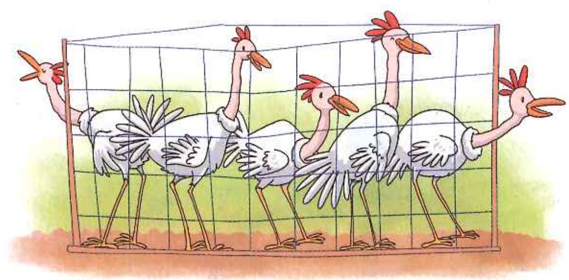
4 Completa la siguiente tabla. Para ello, identifica la relación entre las magnitudes.

Monto de las cuotas de un crédito de $ 120 000	
Plazo (meses)	Valor de cada cuota ($)
3	40 000
6	20 000
8	
12	

Tabla 6.12

Resolución de problemas

5 El concentrado que compra un zoológico se utiliza para alimentar 300 aves en doce días. Al zoológico llegarán nuevas aves, de tal manera que el concentrado alcanzará solo para ocho días. Si cada ave recibe la misma porción, ¿cuántas aves llegarán al zoológico?



Evaluación del aprendizaje

Lee la información y completa los pasos para resolver la situación.

- Para decidir la distribución de un grupo de niños exploradores en una excursión, el líder elaboró la siguiente tabla. ¿Cómo será la distribución si hay seis carpas?

Número de carpas	Número de niños por carpa
2	12
3	8
6	a

a. ¿A qué es igual el producto de cada par de datos relacionados?

b. Revisa las tablas de multiplicar y encuentra el número que multiplicado por 6 da el mismo producto que determinaste en el paso a.

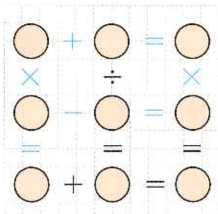
4 Igualdades, ecuaciones e inecuaciones

Saberes previos

Si el triple de un número es 18, ¿cuál es el número?

Analiza

Observa el siguiente esquema.



- Escribe en cada círculo un número entre 1 y 5 (todos salvo uno se usan dos veces), de forma que se cumplan todas las igualdades.

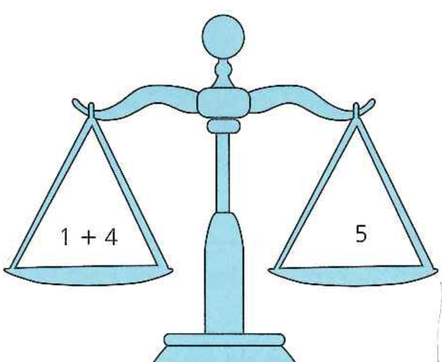


Figura 6.6

Conoce

4.1 Igualdades

Para solucionar el reto se utilizan igualdades.

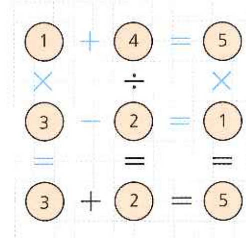
En forma horizontal se verifica que:

$$1 + 4 = 5$$
$$3 - 2 = 1$$
$$3 + 2 = 5$$

En forma vertical se tiene que:

$$1 \cdot 3 = 3$$
$$4 \div 2 = 2$$
$$5 \cdot 1 = 5$$

Por tanto, el problema se resuelve de esta forma:



Una **igualdad** es una relación entre dos expresiones matemáticas que representan el mismo valor. Las igualdades tienen dos miembros separados por el signo igual (=).

Una igualdad actúa como una balanza en equilibrio, como se sugiere en la Figura 6.6.

Ejemplo 1

Los siguientes son ejemplos de igualdades matemáticas. En todos se obtiene 16 utilizando diferentes operaciones.

$8 \cdot 2 = 16$ $\quad$ $5 + 5 + 6 = 16$ $\quad$ $32 \div 2 = 16$

4.2 Propiedades de las igualdades

- Al adicionar o sustraer la misma cantidad en ambos miembros de una igualdad, la igualdad se conserva.
- Al multiplicar o dividir ambos miembros de una igualdad por la misma cantidad (diferente de cero), la igualdad se conserva.

Ejemplo 2

Dada la igualdad $15 + 3 = 18$, al adicionar 6 en ambos miembros de la igualdad las expresiones obtenidas siguen siendo iguales.

$$15 + 3 + \mathbf{6} = 18 + \mathbf{6}$$
$$24 = 24$$

Al multiplicar por 2 ambos miembros de la igualdad, esta se conserva.

$$\mathbf{2} \cdot (15 + 3) = \mathbf{2} \cdot 18$$
$$2 \cdot 15 + 2 \cdot 3 = 36$$
$$30 + 6 = 36$$
$$36 = 36$$

4.3 Ecuaciones

Una **ecuación** es una igualdad en la cual hay términos conocidos y términos desconocidos. El término desconocido se llama **incógnita** y se representa generalmente por letras minúsculas del abecedario.

La ecuación se resuelve cuando se encuentra el valor o los valores de la o las incógnitas que hacen verdadera la igualdad. Este valor recibe el nombre de **solución**.

Ejemplo 3

La igualdad $x + 25 = 36$ es una ecuación porque uno de sus términos es desconocido. La incógnita en este caso está representada por la letra x.

Al reemplazar la incógnita por 11 se verifica la igualdad $11 + 25 = 36$, lo que significa que $x = 11$ es la solución de la ecuación.

4.4 Ecuaciones aditivas y ecuaciones multiplicativas

Existen dos tipos de ecuaciones: aditivas y multiplicativas.

- Las ecuaciones aditivas tienen alguna de las siguientes formas:

$\boxed{a + x = b}$ $\boxed{x - a = b}$ $\boxed{a - x = b}$

- Las ecuaciones multiplicativas tienen alguna de las siguientes formas:

$\boxed{a \cdot x = b}$ $\boxed{x \div a = b}$ $\boxed{a \div x = b}$

Ejemplo 4

La ecuación $x + 15 = 30$ es aditiva, mientras que la ecuación $3 \cdot y = 21$ es una ecuación multiplicativa.

Ejemplo 5

Para solucionar la ecuación $3 \cdot y = 21$, se divide por 3 en ambos miembros de la igualdad y se obtiene que $y = 7$.

Ejemplo 6

A continuación se muestra la solución de algunas ecuaciones.

a.

$$
\begin{aligned}
38 - m &= 25 \\
38 - m + m &= 25 + m \\
38 + 0 &= 25 + m \\
38 - \mathbf{25} &= 25 + m - \mathbf{25} \\
38 - 25 &= m + 0 \\
13 &= m
\end{aligned}
$$

b.

$$
\begin{aligned}
3 \cdot b + 7 &= 28 \\
b \cdot 3 + 7 - \mathbf{7} &= 28 - \mathbf{7} \\
(b \cdot 3) \div \mathbf{3} &= 21 \div \mathbf{3} \\
b &= 7
\end{aligned}
$$

4.5 Inecuaciones

Una **desigualdad** es una relación entre dos expresiones matemáticas que no representan el mismo valor. Las desigualdades tienen dos miembros separados por alguno de estos símbolos: $<$, $>$, $\geq$ o $\leq$.

Una desigualdad que contiene al menos una variable se denomina **inecuación**.

Ejemplo 7

Expresiones como $4 > 3$; $6 < 10$, y $6 + 9 > 8$ son desigualdades, mientras que otras como $x + 7 > 12$; $7 < y$, y $5 + m > 13$ son inecuaciones.

Las **soluciones de una inecuación** son los valores que puede tomar la incógnita, de manera que al sustituirlos en la inecuación hacen que la desigualdad sea cierta.

Ejemplo 8

La inecuación $x + 7 > 12$ es cierta para todos los valores mayores que 5. Si se toma $x = 6$ por ejemplo, se tiene que $6 + 7 > 12$; pero si se toma un valor menor que 5, como por ejemplo 4, la desigualdad es falsa porque $4 + 7 < 12$.

La solución de esta inecuación se puede representar en una semirrecta numérica repasando con un color todos los valores mayores que 5, como se muestra en la Figura 6.7.

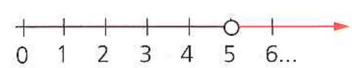


Figura 6.7

El círculo blanco sobre el 5 indica que este número no está incluido dentro de la solución.

Para resolver una inecuación se tienen en cuenta un par de reglas básicas:
Regla de la suma. Si a los dos miembros de una inecuación se les suma o se les resta un mismo número, se obtiene una inecuación equivalente.
Regla del producto. Si los dos miembros de una inecuación se multiplican o se dividen por un mismo número natural diferente de 0, se obtiene otra inecuación equivalente.

Ejemplo 9

Para solucionar la inecuación $5 + m > 13$, se resta 5 a lado y lado de esta, de manera que: $5 + m - 5 > 13 - 5$, de donde $m > 8$.

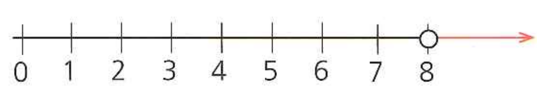


Figura 6.8

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Determina si cada igualdad es correcta.

a. $45 + 27 = 31 + 36$

b. $(3 \cdot 12) = (72 \div 2)$

c. $4^3 = 8^2$

d. $(256 \div 16) + 14 = 30 \cdot 10$

2 Resuelve cada ecuación y verifica su solución.

a. $23 + x = 52$

b. $3 \cdot n = 51$

c. $8 + y - 12 = 1$

d. $5 \cdot p = 30$

e. $50 = t - 1$

f. $64 \div 8 + u = 30$

g. $543 + 762 + h = 2\,653$

h. $144 \div s = 12$

Comunicación

3 Resuelve cada inecuación y dibuja su solución sobre una semirrecta numérica.

a. $y + 8 > 11$

b. $n - 12 > 20$

c. $u + 8 \geqslant 16$

d. $p + 5 \leqslant 10$

e. $4 \cdot r + 5 \leqslant 9$

f. $7 \cdot g - 4 > 10$

4 Escribe dos inecuaciones cuya solución sea la que se representa en cada semirrecta numérica.

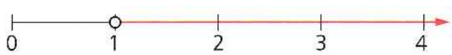


Figura 6.9

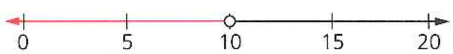


Figura 6.10

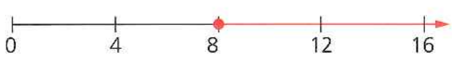


Figura 6.11

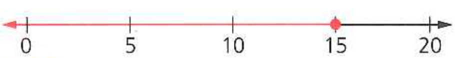


Figura 6.12

Modelación

5 Escribe una ecuación que cumpla las condiciones dadas en cada caso.

a. Su solución es $y = 24$.

b. Es aditiva y su solución es 9.

c. Su solución es $f = 14$ y su lado izquierdo es $5 + f$.

Razonamiento

6 Califica como verdadera (V) o falsa (F) cada afirmación.

a. Las ecuaciones equivalentes tienen la misma solución.

b. Las ecuaciones $g + 4 = 5$ y $g - 2 = 1$ tienen la misma solución.

Comunicación

7 Escribe y resuelve la ecuación que se deduce de cada gráfica.

a.

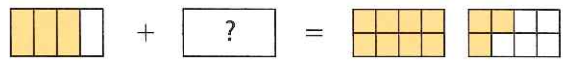


Figura 6.13

b.

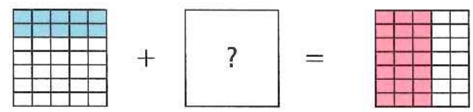


Figura 6.14

Resolución de problemas

8 Luis quiere correr por lo menos 20 kilómetros cada semana. Representa gráficamente su recorrido semanal.

9 En una calle de la ciudad se permite manejar a 35 kilómetros por hora o menos. Usa la variable s para representar la velocidad en kilómetros por hora. Luego, escribe una inecuación que describa las velocidades permitidas. Finalmente, representa la solución de la inecuación.

Evaluación del aprendizaje

i Andrés interpretó el enunciado "cinco veces un número más dos es igual a 17" mediante la ecuación $5 \cdot (p + 2) = 17$. Por su parte, Adriana lo interpretó mediante la expresión $5 \cdot p + 2 = 17$.

a. ¿Cuál de ellos hizo la interpretación correcta?

b. ¿Cuál es la solución de la ecuación?

ii ¿En qué es diferente la representación gráfica de la solución de $y + 5 < 12$ con respecto a la de $y + 5 \leqslant 12$?

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Supón que cierta familia tiene ingresos mensuales por \$ 1 800 000 de lo cual ahorra el 10% para sus vacaciones. Modela esta situación con una ecuación y determina cuánto dinero ahorra la familia durante un año. ¿Cómo organiza tu familia su presupuesto para invertir en bienestar? ¿Por qué es importante hacer este tipo de inversiones?

5 Problemas con ecuaciones

Saberes previos

A un hotel de San Andrés con capacidad para 125 personas llegaron 40 turistas y el hotel quedó lleno. ¿Cuántas personas había antes de la llegada de ese grupo de personas?

Analiza

Marcos sacó del galpón entre el lunes y el jueves 78, 72, 87 y 90 huevos, respectivamente.

- ¿Cuántos huevos debe sacar el viernes para completar 400 huevos?

Conoce

Para solucionar el problema se puede plantear y solucionar una ecuación. Para ello, se pueden seguir estos pasos:

Paso 1. Leer y comprender el enunciado.

- ¿Qué se debe encontrar?

  El número de huevos necesarios para completar 400.

Paso 2. Designar la incógnita.

- p: cantidad de huevos que se necesitan para completar 400.

Paso 3. Plantear la ecuación.

- De acuerdo con el enunciado:

$$78 + 72 + 87 + 90 + p = 400$$

Paso 4. Resolver la ecuación.

- $327 + p = 400$, y se obtiene que $p = 73$.

Paso 5. Comprobar la solución.

- Se verifica que $78 + 72 + 87 + 90 + 73 = 400$.

Paso 6. Contestar la pregunta.

- Marcos debe sacar del galpón 73 huevos el viernes.

El **lenguaje matemático** se utiliza para plantear y resolver problemas matemáticos a partir de expresiones cotidianas.

Ejemplo 1

Un terreno se ha cultivado con tres variedades de flores: la sexta parte está sembrada con geranios, la octava parte con claveles y el resto con azucenas. Se quiere saber qué parte está sembrada con azucenas.

Como ya se sabe cuál es la incógnita del problema, se puede hacer un bosquejo de la situación como el de la Figura 6.15.

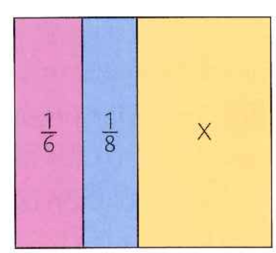


Figura 6.15

La ecuación correspondiente es: $\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + x = 1$.

Como el mínimo común de los denominadores es 24, se amplifica cada fracción:

$\frac{1}{6} = \frac{4}{24}$ $\qquad$ $\frac{1}{8} = \frac{3}{24}$ $\qquad$ $\frac{1}{1} = \frac{24}{24}$

Así, la ecuación equivalente a $\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + x = 1$ es:

$$\frac{4}{24} + \frac{3}{24} + x = \frac{24}{24}$$

Se resuelve la suma de los dos primeros sumandos: $\frac{7}{24} + x = \frac{24}{24}$.

Se resta a ambos lados de la igualdad $\frac{7}{24}$: $\frac{7}{24} - \frac{7}{24} + x = \frac{24}{24} - \frac{7}{24}$.

Por tanto, $x = \frac{17}{24}$ es la fracción del área sembrada con azucenas.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Relaciona las expresiones de la columna de la izquierda con sus correspondientes interpretaciones en el lenguaje matemático de la columna de la derecha.

El doble de un número.	m^3
El triple de un número.	$\frac{1}{3} \cdot m$
El cuádruplo de un número.	$\frac{1}{2} \cdot m$
La mitad de un número.	$\frac{m}{4}$
Un tercio de un número.	$2 \cdot m$
Un cuarto de un número.	m^2
Un número al cuadrado.	$3 \cdot m$
Un número al cubo.	$4 \cdot m$

2 Determina si la ecuación dada interpreta cada enunciado. Si es así, resuélvela.

a. Cuando dupliqué mi dinero d quedé con \$ 400. Ecuación: $2 \cdot d = 400$

b. La tercera parte de la edad de Juan, que es t, es 57. Ecuación: $t \cdot 3 = 57$

c. Si al número natural que le sigue a g se le suma 34 se obtiene 45.
Ecuación: $g + 1 + 34 = 45$

d. La diferencia de un número k y 45 es 78.
Ecuación: $k - 45 = 78$

3 Escribe la ecuación que corresponde a cada pregunta y resuélvela.

a. ¿Qué fracción se le debe agregar a $\frac{3}{5}$ para que sea igual a $\frac{7}{10}$?

b. ¿Cuánto se debe añadir a $\frac{7}{15}$ para obtener $\frac{1}{2}$?

Resolución de problemas

4 Viviana compró algunas cajas de donas. Hay 16 donas en cada caja, y ella compró 80 donas en total. Escribe una ecuación que le permita saber a Viviana cuántas cajas de donas compró.

5 En cierto tiempo, Jaime condujo el doble de distancia que Helena. Si entre los dos condujeron 90 kilómetros, encuentra la distancia que condujo cada uno.

6 ¿Qué edad tiene Amanda si su hijo tiene 12 años y ella le lleva 24 años?

7 ¿Qué número tiene que multiplicarse por 17, y al producto sumarle 34, para obtener 68?

Modelación

8 Miguel tiene una chocolatina dividida en doce trozos iguales. Si le regala a Ana la mitad de los $\frac{2}{3}$ de la chocolatina, ¿cuántos trozos recibe Ana?

9 Martha y Javier están pintando su casa. Martha ha pintado $\frac{5}{12}$ y Javier $\frac{6}{15}$.

a. ¿Qué fracción de la casa han pintado entre ambos?

b. ¿Qué fracción de la casa les queda por pintar?

10 Martín y Gabriela han comido entre los dos los $\frac{3}{10}$ de un paquete de galletas. Si Martín comió $\frac{1}{15}$, ¿qué parte comió Gabriela?

Evaluación del aprendizaje

i Andrés tiene tres juguetes más que Santiago. Si Santiago tiene 16 juguetes, ¿cuántos juguetes tienen entre los dos?

ii Cuenta una historia que a una reina se le rompió un collar de perlas mientras paseaba por el castillo. La mitad de las perlas cayó al suelo; la cuarta parte rodó debajo de una silla; la sexta parte cayó en el jardín, y tres perlas permanecieron en el collar. ¿Cuántas perlas tenía el collar?

Estilos de vida saludable

Jesús y María han comido entre los dos $\frac{4}{5}$ de un combo de hamburguesa con papas fritas y gaseosa. Si Jesús comió $\frac{7}{10}$ del combo, ¿cuánto comió María? ¿Cuál de los dos crees que tuvo un almuerzo menos saludable?

Practica más

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Razones y proporciones

Modelación

1 Colorea las manzanas de cada canasta teniendo en cuenta la razón dada.

a. Por dos manzanas verdes hay tres rojas.

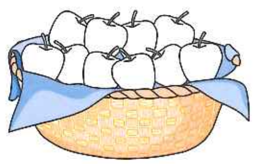


Figura 6.16

b. Por tres verdes hay una roja.

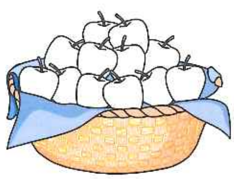


Figura 6.17

Ejercitación

2 Calcula el término que falta en cada proporción

a. $\frac{3}{6} = \frac{11}{a}$

b. $\frac{2}{40} = \frac{b}{60}$

c. $\frac{5}{35} = \frac{c}{420}$

d. $\frac{6}{8} = \frac{42}{d}$

Magnitudes directa e inversamente proporcionales

Resolución de problemas

3 Luisa y Julián quieren completar su colección de láminas. Si cada sobre les cuesta \$ 375, ¿cuánto pagarán por doce sobres?, ¿cuántos sobres podrán comprar con \$ 7 500?

4 Para una excursión se destinan 160 kg de alimento. Si durante 20 días se consumen 8 kg diarios ¿cuántos kilogramos consumirán diariamente si tardan 25 días?, ¿y si tardan 32?

5 En la elaboración de doce anchetas se tiene presupuestado incluir seis frascos en cada una. Si en lugar de doce anchetas se elaboran 24, ¿cuántos frascos deberían incluirse en cada una?

Ecuaciones e inecuaciones

Ejercitación

6 Resuelve.

a. $x - 18 = 50$

b. $7x - 18 = 95$

c. $24 - x > 7$

d. $12 + 3x \geqslant 108$

e. $\frac{1}{10} = \frac{c}{420}$

f. $x + \frac{2}{3} = \frac{8}{7}$

7 Encuentra el error que se cometió al solucionar la siguiente ecuación.

$$\frac{2}{3} + x = \frac{5}{4}$$

$$x = \frac{5}{4} + \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{15}{12} + \frac{8}{12} = \frac{23}{12}$$

8 Halla el valor de la incógnita en cada caso.

a.

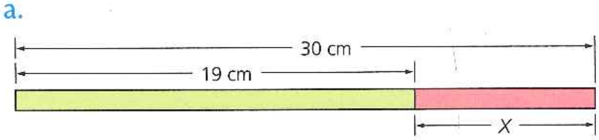


Figura 6.18

b.

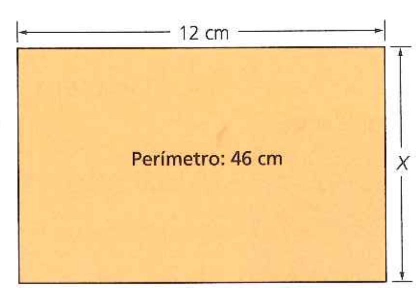


Figura 6.19

c.

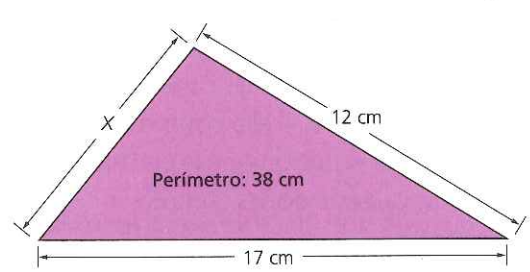


Figura 6.20

Resolución de **problemas**

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Estrategia: Hacer cálculos parciales

Problema

Un arquitecto hizo el plano de una casa en escala 1 : 75, es decir que cada centímetro del plano equivale a 75 cm de la realidad. Si el ancho y el largo de la cocina en el plano miden 5 cm y 8 cm, respectivamente, ¿cuál es el área real de la superficie de la cocina en metros cuadrados?

1. Comprende el problema

- ¿Cuál es la escala en la que se dibujó el plano?
  R: La escala del plano es 1 : 75.
- ¿Cuáles son las dimensiones de la cocina en el plano?
  R: Ancho 5 cm y largo 8 cm.
- ¿Qué se debe calcular?
  R: El área real de la cocina.

2. Crea un plan

- Escribe una proporción por cada dato desconocido y resuélvela.
- Expresa las medidas reales en metros.
- Calcula el área real de la superficie de la cocina.

3. Ejecuta el plan

- Plantea las proporciones para hallar el ancho y el largo real de la cocina.

Ancho: $\frac{1}{\boxed{75}} = \frac{\boxed{5}}{x}$ Largo: $\frac{1}{\boxed{75}} = \frac{\boxed{8}}{y}$

- Resuelve cada proporción y expresa las medidas en metros.

$x = 375 \text{ cm} = 3{,}75 \text{ m}$ $y = 600 \text{ cm} = 6 \text{ m}$

- Calcula el área de la cocina.

$3{,}75 \text{ m} \cdot 6 \text{ m} = 22{,}5 \text{ m}^2$

R: El área real de la cocina es de 22,5 m^2.

4. Comprueba la respuesta

- ¿En cuántos cuadrados de 1 cm de lado se puede dividir el plano de la cocina? ¿Cuál es la medida real del lado de cada uno de esos cuadrados? ¿Qué área cubren?

Aplica la estrategia

1. Un diseñador industrial dibujó la pieza rectangular de una máquina en escala de ampliación de 9 a 2, lo que indica que cada 9 centímetros en el plano representan 2 cm en realidad. Si el ancho y el largo real de la pieza son 1,2 cm y 2,6 cm, ¿cuál es el área de la superficie de la pieza en el dibujo del diseñador?

   a. Comprende el problema

   ....

   ....

   b. Crea un plan

   ....

   ....

   c. Ejecuta el plan

   ....

   ....

   d. Comprueba la respuesta

   ....

   ....

Resuelve otros problemas

2. En un campamento juvenil, la cantidad de alimentos disponibles se mide por raciones. Si la excursión dura una semana y asisten 38 jóvenes que consumen exactamente 798 raciones, ¿cuántas raciones se necesitarían si a la misma excursión asistieran 76 jóvenes más?

Formula problemas

3. Plantea y soluciona un problema en el que se utilice la siguiente información.

   En un restaurante, por cada cinco combos de hamburguesa que se compren, obsequian dos malteadas. Para celebrar el cumpleaños de Iván, su mamá hizo un pedido de 20 hamburguesas.

Enriquece tu vocabulario

- Completa.

  La .... es la relación matemática o razón que se establece entre las dimensiones reales de un objeto y su representación en el plano.

Evaluación del aprendizaje

Razones y proporciones

Ejercitación

1 Observa la Tabla 6.13, escribe las razones e indica si estas forman una proporción o no. Explica tu respuesta. ACTIVIDAD DE REFUERZO

Desarrollo del bebé	
Edad (meses)	Peso (kg)
2	5
3	7

Tabla 6.13

Razonamiento

2 Determina si las medidas de los lados correspondientes de las figuras forman una proporción. PREGUNTA ABIERTA

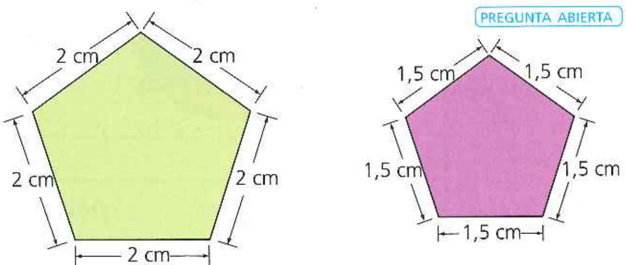


Figura 6.21

Magnitudes directa e inversamente proporcionales

Razonamiento

3 Observa la gráfica. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

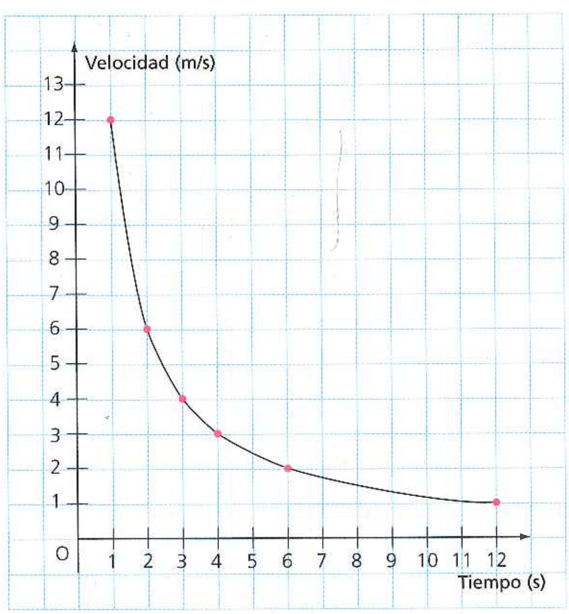


Figura 6.22

- Escribe las dos magnitudes relacionadas en la gráfica y describe cómo se relacionan.

4 Observa la siguiente tabla, identifica las magnitudes y responde. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

Viajes desde el paraíso			
Destino	Punta Verde	La Colina	San José
Distancia (km)	280	350	410
1 persona	$ 12 000	$ 18 000	$ 22 000
2 personas	$ 20 000	$ 30 000	$ 40 000

Tabla 6.14

a. Una familia de seis personas desea viajar a San José. ¿Cuánto debe pagar por los pasajes?

b. El viaje desde La Colina hasta Punta Verde dura cuatro horas cuando se transita a 80 km/h. Si se excede el límite de velocidad en 10 km/h, ¿cuánto tardaría el viaje?

c. Utiliza los datos de la tabla y plantea una situación de proporcionalidad directa y otra de proporcionalidad inversa.

Resolución de problemas

5 Juan Pablo lee treinta páginas de un libro en tres horas. El número de páginas que lee en una hora si mantiene su ritmo de lectura es: SELECCIÓN MÚLTIPLE

a. 60
b. 10
c. 30
d. 50

6 Un automóvil recorre 75 km con 5 L de gasolina. ¿Cuánta gasolina se requiere para un recorrido de 225 km? SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

7 Seis obreros pavimentan una calle en cuatro días. Con esta información, ¿cuál es la afirmación correcta? SELECCIÓN MÚLTIPLE

a. Tres obreros pavimentan una calle igual en nueve días.

b. Cinco obreros pavimentan una calle igual en cinco días.

c. Ocho obreros pavimentan una calle igual en tres días.

d. Cuatro obreros pavimentan una calle igual en ocho días.

Comunicación

8 Por cada cinco naranjas que se exprimen se obtienen dos vasos de jugo. Para obtener ocho vasos de jugo, ¿cuántas naranjas deben exprimirse?

SELECCIÓN MÚLTIPLE

a. 10 naranjas

b. 15 naranjas

c. 20 naranjas

d. 40 naranjas

Igualdades, ecuaciones e inecuaciones

Comunicación

9 Resuelve.

ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $x + 12 = 21$

b. $y - 4 > 16$

c. $\frac{x}{2} = 140$

d. $5y < 65$

e. $x - \frac{7}{11} = \frac{5}{4}$

f. $y - \frac{7}{4} = \frac{11}{2}$

g. $\frac{1}{2} + x = \frac{6}{9}$

h. $\frac{8}{13} + x = \frac{7}{2}$

Razonamiento

10 Escribe verdadero (V) o falso (F), según corresponda.

VERDADERO / FALSO

a. Si se adiciona o se sustrae un mismo número a ambos lados de una igualdad, la igualdad se mantiene. ( )

b. Hay ecuaciones aditivas que no tienen solución. ( )

c. Una ecuación aditiva puede tener más de una solución. ( )

d. Todas las ecuaciones equivalentes tienen la misma solución. ( )

Comunicación

11 Plantea una ecuación o una inecuación, según corresponda en cada caso, resuélvela y dibuja su solución sobre una semirrecta numérica.

PREGUNTA ABIERTA

a. El doble de un número es mayor que 18.

b. Un número sumado a 4 es igual a 11.

c. El producto de 9 con cierto número es al menos 18.

Resolución de problemas

12 Plantea y soluciona una ecuación para cada problema.

a. ¿Qué edad tiene Camilo si se sabe que dentro de 12 años tendrá 64 años?

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

b. El perímetro de un lote triangular mide 72 metros. Un lado mide 16 metros y el otro mide el doble que el primero. Encuentra la longitud del tercer lado.

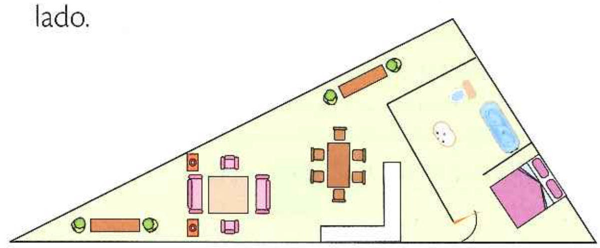


Figura 6.23

13 La suma de dos números es 3 650. Si uno de los sumandos es 2 145, selecciona dentro de los siguientes el otro sumando.

SELECCIÓN MÚLTIPLE

a. 1 505 b. 1 205

c. 1 405 d. 1 705

14 A un número se le resta 128 y a su diferencia se le suma 546. Al final, se obtiene 2 304 como resultado. Elige el número inicial.

SELECCIÓN MÚLTIPLE

a. 1 786 b. 1 886

c. 1 986 d. 2 016

15 Una taza de azúcar pesa 1 763 g. Si la taza vacía pesa 459 g, ¿cuánto pesa el azúcar?

ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

16 Francisco utilizó $\frac{3}{5}$ de la capacidad de un tanque de agua para lavar el carro, mientras que Mariela utilizó otra parte para regar el jardín. Si entre los dos gastaron $\frac{7}{10}$, ¿cuánta agua gastó Mariela?

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Glosario

A

Aleatorio. Experimento cuyos resultados no se pueden predecir.

Algoritmo. Descripción paso a paso del procedimiento para efectuar una operación.

Altura. Perpendicular trazada desde la base de una figura al vértice opuesto.

Ángulo. Unión de dos semirrectas con un origen común.

Ángulo agudo. Ángulo cuya medida es menor que 90°.

Ángulo llano. Ángulo que mide 180°.

Ángulo obtuso. Ángulo cuya medida es mayor que 90°.

Ángulo recto. Ángulo cuya medida es 90°.

Ángulos congruentes. Ángulos que tienen la misma medida.

Aproximar. Obtener un resultado tan cercano al exacto como sea necesario para un propósito determinado.

Área. Medida de la superficie de una figura plana.

Aritmética. Rama de las matemáticas que se dedica al estudio de los números, sus operaciones y sus propiedades.

B

Binario. Sistema de numeración que únicamente utiliza los dígitos 1 y 0.

Bisectriz. Semirrecta que divide un ángulo en dos ángulos congruentes.

C

Cifras decimales. Cifras que se encuentran a la derecha de la coma en un número decimal.

Circunferencia. Conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.

Criterio de divisibilidad. Regla mediante la cual se determina si un número es divisible por otro, sin hacer la división.

Cuadrado. Polígono regular de cuatro lados.

Cuadrilátero. Polígono de cuatro lados.

D

Dato. Cantidad o medida obtenida de la observación, comparación y aplicación de encuestas.

Decimal. Sistema de numeración que únicamente utiliza los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Descomposición factorial. Expresión de un número como el producto de sus factores primos.

Diagonal de un polígono. Segmento de recta que une dos vértices no consecutivos.

Diagrama de barras. Representación gráfica en forma de barras rectangulares o columnas que facilita el análisis de un conjunto de datos.

E

Ecuación. Igualdad entre dos expresiones que contienen uno o varios términos desconocidos.

Eje. Línea recta que sirve de referencia para construir un sistema de coordenadas.

Eje de simetría. Recta que divide una figura en dos partes iguales.

Estadística. Rama de las matemáticas que se encarga de la recolección, representación, análisis, interpretación y aplicaciones de datos numéricos a través de un conjunto de técnicas con rigor científico.

Evento (o suceso). Resultado posible en un experimento aleatorio.

F

Factor primo. Un número primo es factor de un número natural si el número natural es divisible por dicho número primo.

Fracción impropia. Fracción en la que el numerador es mayor que el denominador.

Fracción propia. Fracción en la que el numerador es menor que el denominador.

Fracciones equivalentes. Fracciones que representan la misma parte de la unidad.

Frecuencia absoluta. Número de veces que se repite determinado valor en la variable estadística que se estudia.

G

Gráfica circular (diagrama de sectores). Gráfica que ilustra proporciones como sectores de un círculo cuyas áreas relativas representan las distintas proporciones.

Gramo. Unidad de masa del Sistema Internacional de Unidades.

H

Heptágono. Polígono de siete lados.

Hexágono. Polígono de seis lados.

I

Igualdad. Relación entre dos expresiones idénticas.

L

Lado de un polígono. Segmento que une dos vértices consecutivos.

Longitud. Magnitud de las líneas.

M

Máximo común divisor. Mayor de los divisores comunes de dos o más números.

Media aritmética. Promedio de un grupo de datos que se obtiene al calcular la suma de todos los valores y dividirla por el número de datos.

Medida de tendencia central. Valor alrededor del cual se concentran los valores de un conjunto de datos.

Mínimo común múltiplo. Menor de los múltiplos comunes de dos o más números.

Moda. Valor que aparece con mayor frecuencia en un conjunto de datos.

Muestra. Parte de una población que la representa en un estudio estadístico.

Múltiplo. Número que se obtiene al multiplicar un número natural dado por 1, 2, 3, 4…

N

Numerador. Es el número superior en una fracción. Indica las partes que se toman de la unidad.

Número compuesto. Número que puede expresarse como el producto de números primos.

Número decimal. Expresión numérica formada por una parte entera y una parte decimal separadas por una coma.

Número decimal exacto. Decimal con un número finito de cifras.

Números primos. Números que tienen solo dos divisores: la unidad y el mismo número.

O

Octágono. Polígono de ocho lados y ocho ángulos.

Orden de las operaciones. Conjunto de reglas que indican el orden en que se deben realizar operaciones en una expresión con operaciones combinadas.

Origen de coordenadas. Punto de intersección de los ejes de coordenadas.

P

Pareja ordenada. Dupla formada por dos elementos en la que el orden es determinante. Las coordenadas de un punto se representan mediante una pareja ordenada.

Perímetro. Medida del contorno de una figura poligonal cerrada.

Población. Conjunto de individuos, objetos o fenómenos de los cuales se desea estudiar una o varias características.

Polígono. Línea poligonal cerrada.

Polígono regular. Polígono en el cual son iguales las longitudes de sus lados y la medida de sus ángulos interiores.

R

Radio. Distancia del centro de un círculo a un punto de su circunferencia o del centro de una esfera a un punto de su superficie.

Rectas paralelas. Líneas rectas que no se cortan en ningún punto.

Rectas perpendiculares. Líneas rectas que, al cortarse, forman cuatro ángulos rectos.

Rectas secantes. Líneas rectas que se cortan en un punto único.

S

Segmento. Es la parte de la recta que está delimitada por dos puntos (los cuales son los extremos del segmento).

Sistema de numeración. Conjunto de símbolos, con reglas bien definidas de combinación, usados para representar cantidades y realizar operaciones con ellas.

Bibliografía

- Abdón Montenegro, Ignacio. *Evaluemos competencias matemáticas.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio, 1999.
- Alem, Jean-Pierre. *Nuevos juegos de ingenio y entretenimiento matemático.* Barcelona: Gedisa, 1990.
- Alsina Catalá, Claudi; Burgués F., Carme; Fortuny A. Josep María. *Materiales para construir la geometría.* Madrid: Síntesis, 1995.
- Andonegui, Martín. *El sistema numérico decimal.* Caracas: Federación Internacional Fe y Alegría, 2004.
- Boyer, Carl B. *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza, 2007.
- Castro, Encarnación; Rico, Luis, y Castro, Enrique. *Números y operaciones.* Madrid: Síntesis, 1996.
- Centeno Pérez, Julia. *Matemáticas: cultura y aprendizaje* 5. Madrid: Síntesis, 1997.
- Clemens *et al. Geometría* Serie Awli. México: Pearson, 1998.
- De Prada V., María Dolores. *Cómo enseñar las magnitudes, la medida y la proporcionalidad.* Málaga: Ágora, 1990.
- Dickson, Linda; Brown Margaret; Gibson Olwen. *El aprendizaje de las matemáticas.* Madrid: Labor, 1991.
- Doran, Jody L.; Hernández, Eugenio. *Las matemáticas en la vida cotidiana.* Madrid: Pearson-Addison Wesley V. A. M, 1994.
- Fournier, Jean-Louis. *Aritmética aplicada e impertinente.* Barcelona: Gedisa, 1995.
- Jouette, André. *El secreto de los números.* Bogotá: Intermedio, 2002.
- Küchemann, D. "The meaning children give to the letters in generalised arithmetic." En: Cognitive Development Research in Sci. and Math. 1980. The University of Leeds (2002): 28-33.
- Leithold, Louis. *El cálculo con geometría analítica.* México: Harla, S. A. de C.V., 1972.
- Mason, J.; Burton, L., y Stacey, K. *Pensar matemáticamente.* Barcelona/Madrid: Labor/MEC, 1992.
- Ministerio de Educación Nacional. *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Bogotá, 2006.
- Ministerio de Educación Nacional. *Lineamientos curriculares de matemáticas.* Bogotá, 1998.
- Moise, Edwin, y Downs, Floyd. *Geometría moderna.* Addison Wesley, 1966.
- Perelman, Yakov. *Aritmética recreativa.* Moscú: Mir, 1986.
- Polya, George. *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas, 1989.
- Resnick, Robert. *Física volúmenes I y II.* México: Compañía Editorial Continental S. A., 1996.
- Rich, Barnett. *Geometría.* México: McGraw-Hill, 1991.
- Socas, Martín M.; Camacho, Matías; Palarea, Mercedes, y Hernández, Josefa. *Iniciación al álgebra.* México: Síntesis, 1991.
- Spiegel, Murray R. *Probabilidad y estadística.* México: McGraw-Hill, 1975.
- Suppes, Patrick, y Hill, Shirley. *Introducción a la lógica matemática.* Bogotá: Reverté, 1976.
- Swokowski, Earl; Cole, Jeffery. *Álgebra y Trigonometría con geometría analítica.* México: Thomson Editores, 1998.
- Tahan, Malba. *El hombre que calculaba.* México: Limusa, 1988.
- Zill, Dennis, y Dewar, Jacqueline. *Álgebra y trigonometría.* México: McGraw-Hill, 2000.