Vamos a aprender

Matemáticas

Libro del estudiante

7

Libro de distribución gratuita

PRESIDENCIA DE LA REPÚBLICA

MINEDUCACIÓN

TODOS POR UN NUEVO PAÍS

PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

Vamos a aprender

Matemáticas

Libro del estudiante

7

El proyecto **Vamos a aprender** para la Educación Básica y Media es una propuesta pedagógica orientada a que los estudiantes adquieran un aprendizaje eficaz.

Cumple su función pedagógica y didáctica ofreciendo al docente la posibilidad de darle vida a los materiales, haciéndolos significativos para los estudiantes.

Esta propuesta entiende la escuela como un espacio de convivencia imprescindible para la formación integral de los alumnos.

Favorece una **formación integral** y desarrolla temáticas para la vida y la convivencia.

Ofrece una **ruta didáctica** clara y organizada que facilita el desarrollo de diversos procesos cognitivos.

Permite valorar y evaluar el **progreso del aprendizaje** por medio de diversos tipos de actividades.

Comprende los referentes básicos para el **diseño curricular** de cada área.

ISBN 978-958-780-227-6

9 789587 802276

Libro de distribución gratuita

PRESIDENCIA DE LA REPÚBLICA

MINEDUCACIÓN

sm

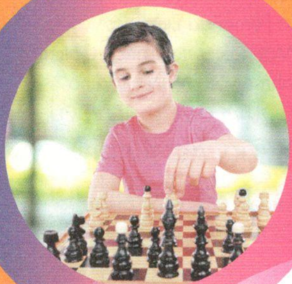
TODOS POR UN NUEVO PAÍS

PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

Vamos a aprender

Matemáticas

Libro del estudiante



7

Vamos a aprender

es el proyecto en el que los estudiantes se convierten en protagonistas de su proceso de formación. Por medio de materiales que motivan a estudiar y a participar de forma activa, se consigue un aprendizaje eficaz y significativo.

Los contenidos se relacionan con el entorno más inmediato y trabajan competencias esenciales para poder desarrollar las habilidades que la vida exija el día de mañana.

El proyecto es una apuesta por el desarrollo integral de los estudiantes. Junto con una sólida formación académica, proporciona herramientas de reflexión y análisis de la sociedad en la que vivimos por medio de sus temas de Educación ambiental, Estilos de vida saludable y Educación para la sexualidad y la ciudadanía.

Aprendiendo a convivir de manera armónica, lograremos todos juntos que el colegio llegue a ser un espacio de crecimiento que nos haga mejores y en el que todos queramos estar.

Así que es hora de comenzar y aceptar el reto:

¡Vamos a aprender!

Libro de distribución gratuita

PRESIDENCIA DE LA REPÚBLICA | MINEDUCACIÓN

TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

Vamos a aprender

Matemáticas

Libro del estudiante

7

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL

PRESIDENTE DE LA REPÚBLICA
Juan Manuel Santos Calderón

MINISTRA DE EDUCACIÓN NACIONAL
Yaneth Cristina Giha Tovar

VICEMINISTRO DE EDUCACIÓN PREESCOLAR, BÁSICA Y MEDIA
Víctor Javier Saavedra Mercado

DIRECTORA DE CALIDAD DE EDUCACIÓN PREESCOLAR, BÁSICA Y MEDIA
Paola Andrea Trujillo Pulido

SUBDIRECTOR DE FOMENTO DE COMPETENCIAS
Alfredo Olaya Toro (E)

SUBDIRECTORA DE REFERENTES Y EVALUACIÓN DE LA CALIDAD EDUCATIVA
María Claudia Sarta Herrera

EQUIPO DE MATERIALES PEDAGÓGICOS
COORDINADORA: Angélica Ortega Santacruz
PROFESIONALES: Deyanira Alfonso Sanabria, Edna Maritza Corredor Suárez, Diana Patricia Tobón Maldonado, Andrés Alberto Andrade Ceballos

EQUIPO TÉCNICO DE MATEMÁTICAS
ASESORA: Yadira Sanabria Mejía
PROFESIONALES: Jenny Andrea Blanco Guerrero, Guillermo Andrés Salas Rodríguez, Jairo Anibal Rey Monroy

EQUIPO TÉCNICO EVALUADOR DE MATERIALES MATEMÁTICAS
Ricardo Cañón Moreno, María Isabel Noreña, Diana Velásquez Rojas, Ana Celia Castiblanco Paiba, María Beatriz Rocha

EQUIPO PROGRAMAS TRANSVERSALES Y COMPETENCIAS CIUDADANAS
COORDINADORA: Olga Lucía Zárate Mantilla
PROFESIONALES: Francine Botero Garnica, Sandra Patricia Mora Varela, Juan Camilo Caro Daza

EQUIPO EDICIONES SM

DIRECTOR EDITORIAL
Jaime Marco Frontelo

GERENTE EDITORIAL
Jeannette Benavides Escobar

EDITORA JEFE DE ÁREA
Luz Stella Alfonso Orozco

EDITORES
Leidi Gil Fuentes, Deysi Roldán Hernández, Josué Malagón Montaña

COLABORADORES
Doris Esperanza Álvarez Quintero, Marlady Bogotá Torres, Tatiana Carvajal Martínez, María Fernanda Dueñas Álvarez, Andrés Camilo Carrillo Acosta, Mario Alberto Cañón Gutiérrez, Miguel Ángel Alfonso Orozco, John Álvaro Munar Ladino

COORDINADOR DE CORRECCIÓN
Rafael Humberto Castro Fernández

CORRECCIÓN DE ESTILO
Catalina Rozo Tovar, Adriana Marcela Casas Guzmán

GERENTE DE ARTE Y DISEÑO
Leonardo Rivas Agudelo

COORDINACIÓN DE DISEÑO
Elkin Vargas Bohórquez

DISEÑO DE LA SERIE
Elkin Vargas Bohórquez, Magaly Duque Santos, Liliana Bohórquez Algecira, Ana Lilly Pardo Beltrán

DISEÑO DE CUBIERTA
Juan Camilo López Rojas

DIAGRAMACIÓN
Alexandra León Ruíz, Rafael Niebles Montoya, Alejandro Bohórquez Rodríguez, Diego Camacho Arciniegas, Milena Buenaventura

FOTOGRAFÍA
Archivo SM/ KEYSTONE/ Montse Fontich/ Norbert Tomás/ SPAINSTOCK/Andres Fonseca/ Shutterstock/ AGIF/ Bokic Bojan/ Barone Firenze/ Andrey Khrolenok/ gary yim/ Jeff Banke/ Radu Razvan/ satephoto/ meunierd/ AGIF/ jan kranendonk/ Anton_Ivanov/ littlewormy/ Radu Bercan/ Radu Bercan

RETOQUE DIGITAL
Ángel Camacho Linares, Mario Alarcón Orozco, Kenny Bacares Fonseca, Fernando Amézquita Quintana

Carrera 85 K N° 46 A - 66
Bogotá, D. C., Colombia
ISBN 978-958-780-227-6

IMPRESIÓN
Impreso en Colombia / *Printed in Colombia*
Impreso en Quad/Graphics

PRESIDENCIA DE LA REPÚBLICA | MINEDUCACIÓN | sm

TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

Presentación

Aceptar el reto de hacer de Colombia la nación más educada de América Latina en el 2025 es una decisión que genera una gran responsabilidad. La necesidad de no perder ni un segundo en el camino hacia la calidad es un llamado urgente a rectores, docentes y padres de familia que se levantan cada mañana comprometidos con el futuro de miles de estudiantes.

Lograr una educación de calidad es el objetivo que nos hemos trazado para construir un país con igualdad de oportunidades para todos y en paz. Una igualdad que no sólo contempla el derecho que cada uno de los colombianos tiene a la educación, sino que se refuerza en la idea de equilibrar la cancha de juego y hacer que todos nuestros niños, niñas y adolescentes tengan las mejores condiciones en los colegios, incluyendo materiales pedagógicos de alta calidad que contribuyan al fortalecimiento de su proceso de aprendizaje.

Como Ministerio sabemos que la excelencia educativa se gesta en el aula, y es allí donde se deben concentrar todos los esfuerzos de transformación. Por esto, dotar de herramientas pedagógicas suficientes e idóneas que acompañen y refuercen la práctica en el salón de clase, es la forma en la que se hará visible el esfuerzo de un equipo de rectores y docentes pioneros comprometidos con el mejoramiento de la calidad en la educación.

Por esta razón, el Ministerio de Educación Nacional presenta el siguiente material de apoyo para el proceso pedagógico de enseñanza de lenguaje y matemáticas, de alta calidad. Este material ha sido seleccionado de manera juiciosa por expertos, para que docentes y estudiantes lo incorporen a la práctica de aula, los trabajen, los disfruten con su familia, aprendan con ellos y descubran un mundo de narraciones mágicas y problemas matemáticos que les dará paso a un nuevo universo de posibilidades.

Estos libros, cuadernos de trabajo y guías llegarán a los colegios y cobrarán vida en el aula gracias al compromiso y dedicación de cada uno de ustedes. Por esto es importante explorarlos, conocerlos y apropiarlos; con seguridad este será un paso más hacia nuestra meta de hacer de Colombia la más educada con ustedes como los protagonistas en este nuevo capítulo de su historia.

Sin lugar a duda, esta es una de las apuestas más importantes por el futuro del país.

Estructura de tu libro

Este libro está organizado en seis divisiones o unidades. Cada una de ellas se compone de subdivisiones o temas. Las unidades presentan la siguiente estructura:

Apertura de unidad

En esta doble página recordarás **aquello que ya sabes** y **conocerás lo que vas a aprender** y su aplicación en tu vida cotidiana.


Pensamiento numérico

2 Números racionales

Ya sabemos
- Reconocer, representar y clasificar fracciones.

Vamos a aprender
- A construir el conjunto de los números racionales y operar con estos.

Nos sirve para
- Resolver problemas en los que se involucran fracciones y/o decimales.

38

39

Ruta didáctica

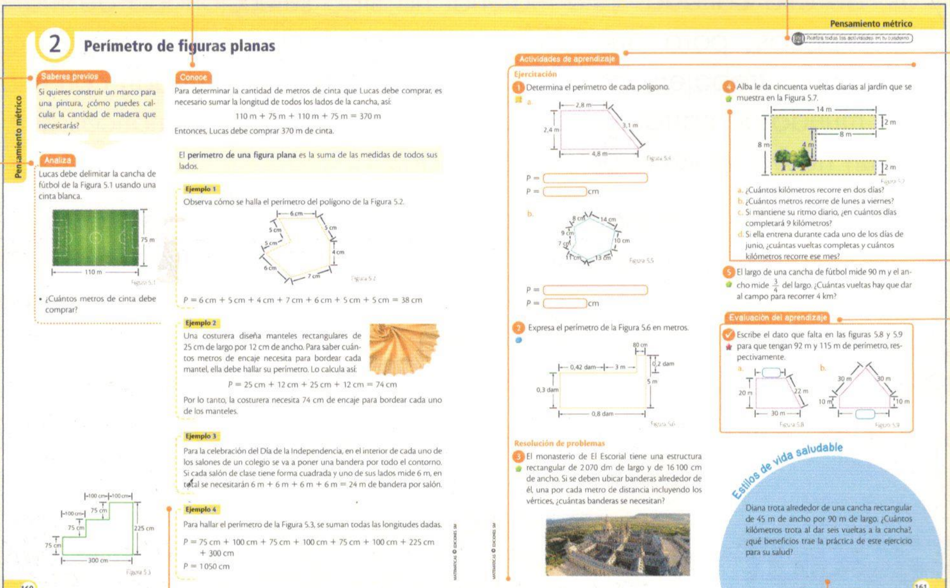
El desarrollo de todos los contenidos presenta la siguiente **ruta didáctica**.

Conoce
Desarrolla los contenidos del tema. Sintetiza los conceptos básicos que debes aprender.

Recuerda que estas actividades las debes realizar en tu cuaderno.

Saberes previos
Explora lo que ya sabes.

Analiza
Establece la conexión entre los conocimientos previos y los nuevos contenidos, mediante una situación problema.


Pensamiento métrico

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

2 Perímetro de figuras planas

Saberes previos
Si quieres construir un marco para una pintura, ¿cómo puedes calcular la cantidad de madera que necesitarás?

Analiza
Lucas debe delimitar la cancha de fútbol de la Figura 5.1 usando una cinta blanca.

75 m
110 m
Figura 5.1

- ¿Cuántos metros de cinta debe comprar?

Conoce
Para determinar la cantidad de metros de cinta que Lucas debe comprar, es necesario sumar la longitud de todos los lados de la cancha, así:

110 m + 75 m + 110 m + 75 m = 370 m

Entonces, Lucas debe comprar 370 m de cinta.

El **perímetro de una figura plana** es la suma de las medidas de todos sus lados.

Ejemplo 1
Observa cómo se halla el perímetro del polígono de la Figura 5.2.

Figura 5.2

$P = 6\text{ cm} + 5\text{ cm} + 4\text{ cm} + 7\text{ cm} + 6\text{ cm} + 5\text{ cm} + 5\text{ cm} = 38\text{ cm}$

Ejemplo 2
Una costurera diseña manteles rectangulares de 25 cm de largo por 12 cm de ancho. Para saber cuántos metros de encaje necesita para bordear cada mantel, ella debe hallar su perímetro. Lo calcula así:

$P = 25\text{ cm} + 12\text{ cm} + 25\text{ cm} + 12\text{ cm} = 74\text{ cm}$

Por lo tanto, la costurera necesita 74 cm de encaje para bordear cada uno de los manteles.

Ejemplo 3
Para la celebración del Día de la Independencia, en el interior de cada uno de los salones de un colegio se va a poner una bandera por todo el contorno. Si cada salón de clase tiene forma cuadrada y uno de sus lados mide 6 m, en total se necesitarán 6 m + 6 m + 6 m + 6 m = 24 m de bandera por salón.

Ejemplo 4
Para hallar el perímetro de la Figura 5.3, se suman todas las longitudes dadas.

$P = 75\text{ cm} + 100\text{ cm} + 75\text{ cm} + 100\text{ cm} + 75\text{ cm} + 100\text{ cm} + 225\text{ cm} + 300\text{ cm}$

$P = 1050\text{ cm}$

Figura 5.3

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1. Determina el perímetro de cada polígono.
   a. Figura 5.4
   P =
   P = cm
   b. Figura 5.5
   P =
   P = cm

2. Expresa el perímetro de la Figura 5.6 en metros.
   Figura 5.6

Resolución de problemas

3. El monasterio de El Escorial tiene una estructura rectangular de 2070 dm de largo y de 16 100 cm de ancho. Si se deben ubicar banderas alrededor de él, una por cada metro de distancia incluyendo los vértices, ¿cuántas banderas se necesitan?

4. Alba le da cincuenta vueltas diarias al jardín que se muestra en la Figura 5.7.
   Figura 5.7
   a. ¿Cuántos kilómetros recorre en dos días?
   b. ¿Cuántos metros recorre de lunes a viernes?
   c. Si mantiene su ritmo diario, ¿en cuántos días completará 9 kilómetros?
   d. Si ella entrena durante cada uno de los días de junio, ¿cuántas vueltas completas y cuántos kilómetros recorre ese mes?

5. El largo de una cancha de fútbol mide 90 m y el ancho mide $\frac{3}{4}$ del largo. ¿Cuántas vueltas hay que dar al campo para recorrer 4 km?

Evaluación del aprendizaje

Escribe el dato que falta en las figuras 5.8 y 5.9 para que tengan 92 m y 115 m de perímetro, respectivamente.
a. Figura 5.8
b. Figura 5.9

Estilos de vida saludable
Diana trota alrededor de una cancha rectangular de 45 m de ancho por 90 m de largo. ¿Cuántos kilómetros trota al dar seis vueltas a la cancha?, ¿qué beneficios trae la práctica de este ejercicio para su salud?

MATEMÁTICAS © EDICIONES SM

160

161

Actividades de aprendizaje
Desarrolla y refuerza lo que has aprendido.

Procesos cognitivos
- Memoria
- Comprensión
- Análisis
- Aplicación
- Síntesis
- Evaluación

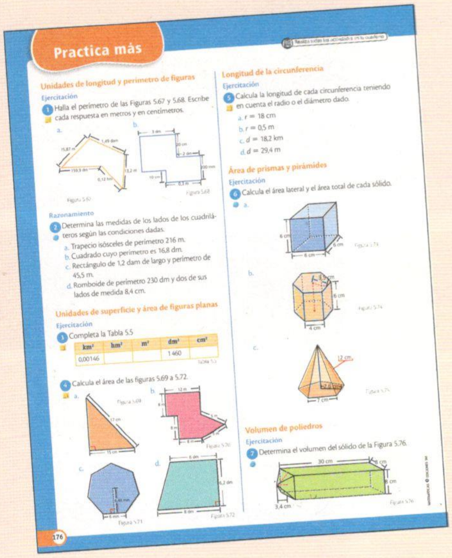
Evaluación del aprendizaje
Evalúa tus conocimientos.

Ejemplos
Aplicación inmediata de los conceptos explicados.

Temas transversales

Practica más

Resuelve **más actividades** relacionadas con los temas de la unidad y **desarrolla habilidades matemáticas**.


Practica más

Unidades de longitud y perímetro de figuras

Longitud de la circunferencia

Razonamiento

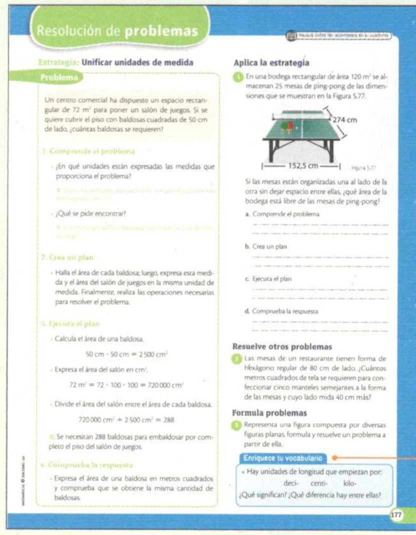
Unidades de superficie y área de figuras planas

Área de prismas y pirámides

Volumen de poliedros

Resolución de problemas

Resuelve problemas con el uso de diferentes estrategias. Sigue el **ejemplo resuelto** como guía y pon en práctica la estrategia estudiada.


Resolución de problemas

Estrategia: Unificar unidades de medida

Problema

Aplica la estrategia

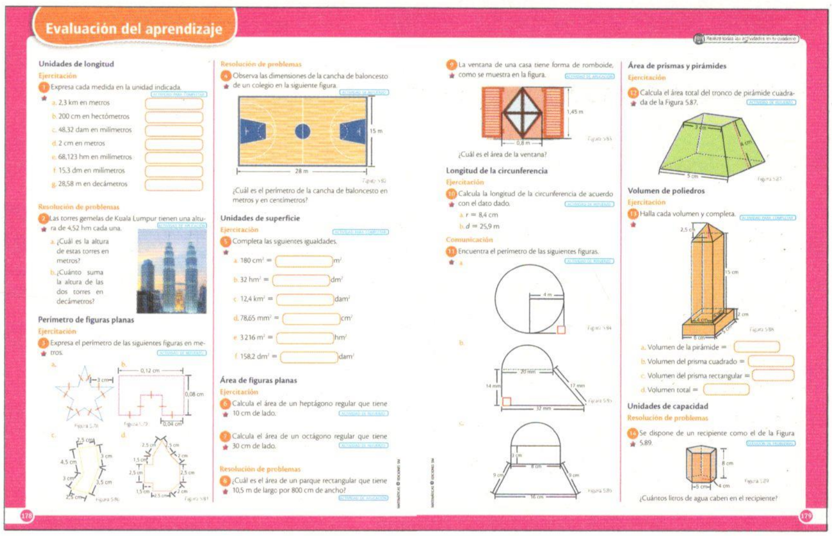
Resuelve otros problemas

Formula problemas

Enriquece tu vocabulario

Enriquece tu vocabulario

Amplía tu vocabulario matemático.


Evaluación del aprendizaje

Unidades de longitud

Perímetro de figuras planas

Unidades de superficie

Área de figuras planas

Longitud de la circunferencia

Área de prismas y pirámides

Volumen de poliedros

Unidades de capacidad

Evaluación del aprendizaje

En esta sección tendrás la oportunidad de aplicar los temas vistos y reforzar tus conocimientos.

Temas transversales

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Con este tema desarrollarás competencias para **ejercer, respetar y promover los derechos humanos**, los cuales están presentes en tus relaciones cotidianas.

Educación ambiental

Plantea actividades, ejemplos y situaciones en las que podrás reflexionar sobre las **relaciones entre el individuo y su entorno natural**, como proceso interactivo, y **la protección y el cuidado** de los recursos naturales y los seres vivos.

Estilos de vida saludable

Presenta actividades, ejemplos y situaciones con las cuales aprenderás a **tomar decisiones sobre tu salud y tu bienestar** físico, emocional e intelectual, tanto individual como colectivo.

Contenido Matemáticas 7

1

Pensamiento numérico

Números enteros

2

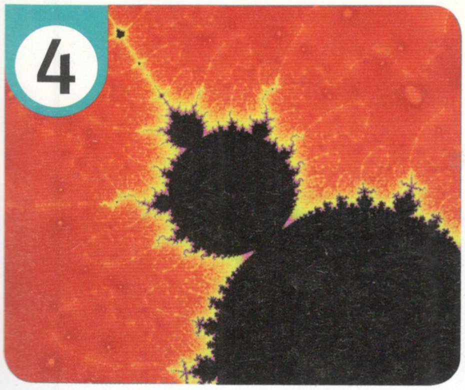
Pensamiento numérico

Números racionales

3

Pensamiento variacional

Proporcionalidad, ecuaciones y funciones


4


5


6

1 Números enteros

Ya sabemos

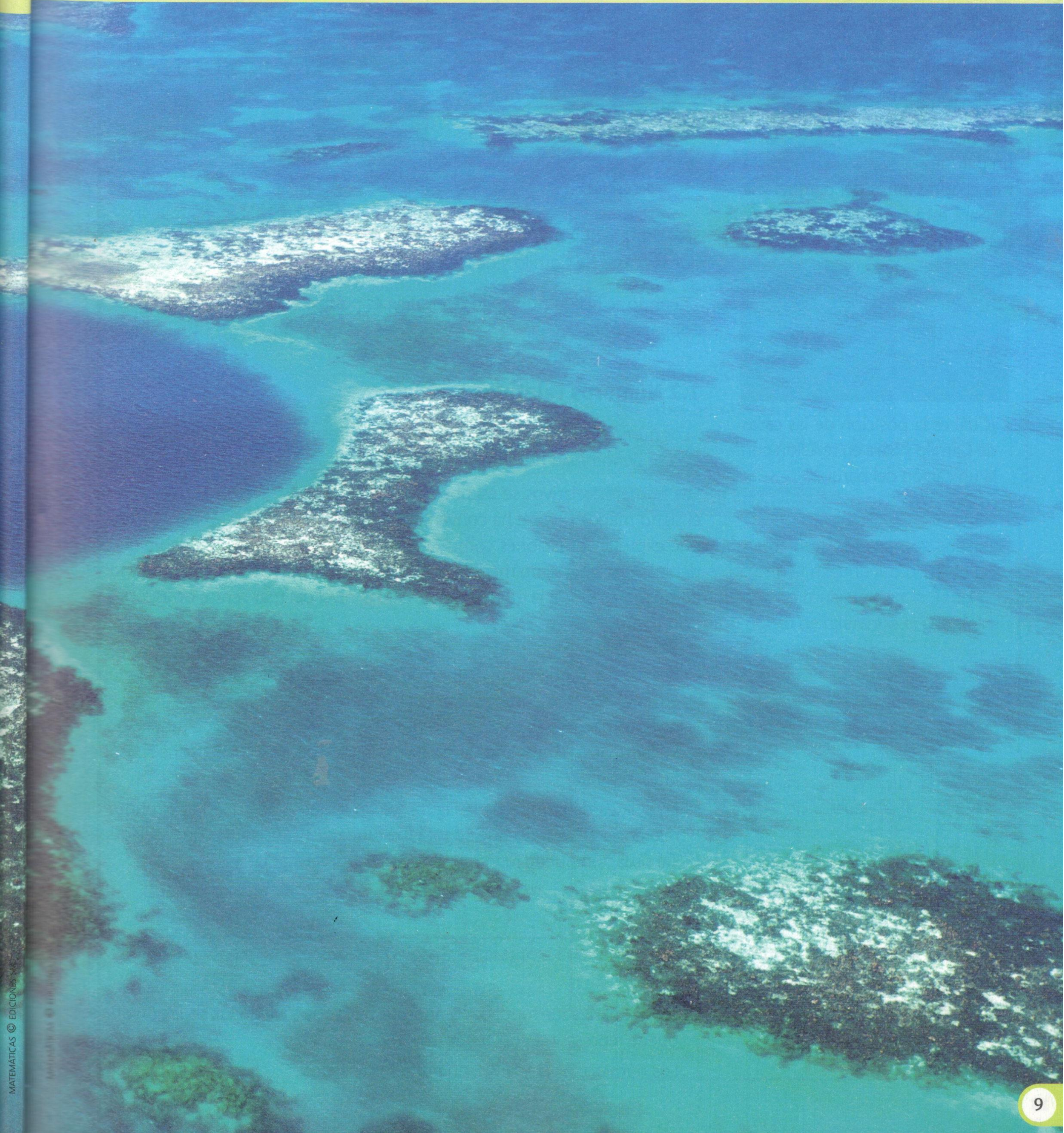
- Utilizar los números naturales y aplicar las propiedades de las operaciones básicas en diferentes contextos.

Vamos a aprender

- A identificar el conjunto de los números enteros.
- A resolver problemas en diferentes contextos.

Nos sirve para

- Identificar y resolver situaciones relacionadas con posiciones relativas.



1 Números relativos

Saberes previos

¿En dónde has visto las expresiones "a. m.", "p. m.", "a. C.", "d. C."? ¿Qué significado matemático tienen?

Analiza

Camilo y Sara viven sobre la misma calle en la que se encuentra un parque. La casa de Camilo está tres cuadras antes del parque, y la de Sara está tres cuadras después del parque.

- ¿Cuál es la posición de las casas de Camilo y Sara en relación con la ubicación del parque?

Conoce

1.1 Punto de referencia

La situación planteada se puede representar como en la Figura 1.1.

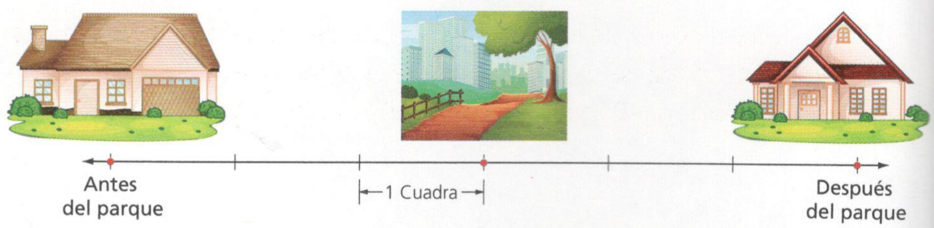


Figura 1.1

Si se toma la ubicación del parque como **punto de referencia**, se puede afirmar que las casas de Camilo y de Sara están en posiciones opuestas.

Cuando se fija un **punto de referencia** es posible determinar dos sentidos u orientaciones.

1.2 Números relativos

Los números que indican una cantidad con respecto a un punto de referencia se denominan **números relativos**.

Los números relativos se escriben acompañados por el signo más (+) o por el signo menos (−). Se ha convenido utilizar el signo más para las cantidades que expresan situaciones como "a la derecha de", "encima de", "sobre el nivel del mar", etc., y el signo menos para las cantidades que se refieren a situaciones como "antes de", "a la izquierda de", "bajo el nivel del mar", entre otras.

Ejemplo 1

Bogotá fue fundada en 1538 por Gonzalo Jiménez de Quesada, Valledupar en 1550 por Hernando de Santana y Bucaramanga en 1622 por Andrés Páez de Sotomayor. Si se toma como punto de referencia el año de fundación de Valledupar, ¿cuántos años antes fue fundada Bogotá y cuántos años después Bucaramanga?

En la línea de tiempo de la Figura 1.2, en la que el año 1550 es el punto de referencia, se observa que Bogotá fue fundada 12 años antes que Valledupar. Tal situación puede representarse con el número −12.

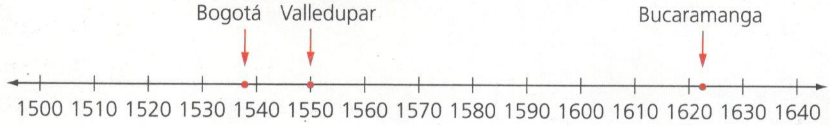


Figura 1.2

Bucaramanga fue fundada 72 años después que Valledupar, situación que se puede representar con el número +72.

Los números −12 y +72 son números relativos.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 2

La Figura 1.3 representa la ubicación de un helicóptero y de un submarino con respecto al nivel del mar. Si el helicóptero está a 30 m de altura y el submarino está a 40 m de profundidad, ¿cuáles son los números relativos que indican la cantidad de metros a los que se encuentra cada vehículo con respecto al nivel del mar?

En este caso, el punto de referencia es el nivel del mar; por lo tanto, la posición "30 m de altura" se expresa mediante el número relativo +30 m, mientras que la posición "40 m de profundidad" se escribe como −40 m.

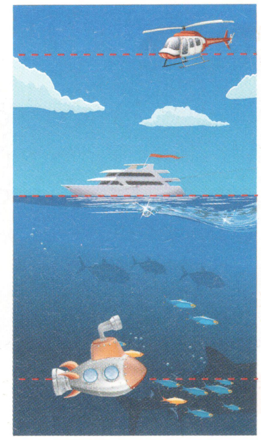


Figura 1.3

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Observa la Figura 1.4 y escribe los números relativos que expresan la altura de la montaña y la profundidad de la fosa marina.

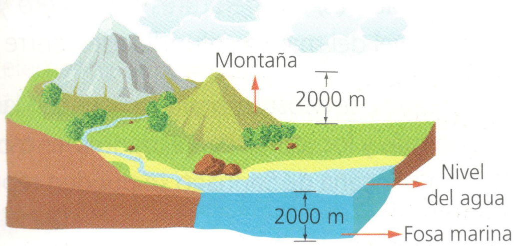


Figura 1.4

Ejercitación

2 Escribe en la Tabla 1.1 el punto de referencia y el número relativo correspondiente en cada caso.

Situación	Punto de referencia	Número relativo
Hace seis años Jorge estuvo en Grecia.		
Tres años después de casarme tuve mi primer hijo.		
El avión vuela a 600 m de altura.		

Tabla 1.1

3 Representa estas temperaturas con números relativos.

a. 11 °C sobre cero
b. 23 °C bajo cero
c. 6 °C sobre cero
d. 72 °C sobre cero
e. 42 °C bajo cero
f. 19 °C bajo cero

Razonamiento

4 Expresa con números relativos cuántos años antes o después del fin de la Segunda Guerra Mundial (1945) ocurrieron estos acontecimientos.

a. Fundación del Estado de Israel (1948)
b. Primer hombre en la Luna (1969)
c. Revolución de Octubre en Rusia (1917)

Evaluación del aprendizaje

i Escribe con números relativos cuántos años antes o después ocurrió el nacimiento de cada uno de los pintores que se muestran en la Tabla 1.2, tomando como punto de referencia el año de nacimiento de Paul Cézanne.

Pintor	Fecha de nacimiento
Leonardo da Vinci	1452
Pablo Picasso	1881
Giotto di Bondone	1267
Paul Cézanne	1839
Diego Velázquez	1599

Tabla 1.2

ii Marcela nació en el año 1994. Terminó la secundaria en el 2010 y su carrera universitaria en el 2015. Si se considera como punto de referencia el año en el que terminó la secundaria, ¿cuáles son los números relativos que indican cuántos años antes nació y cuántos años después terminó su carrera universitaria?

2 Números enteros

Saberes previos

Nombra algunas características del conjunto de los números naturales. Luego, en una semirrecta numérica ubica los números 3, 5, 0, 2 y 7.

Analiza

Santiago realizó los siguientes movimientos en su cuenta bancaria: el lunes consignó $ 300 000, el martes retiró $ 120 000, el miércoles retiró $ 95 000 y el jueves consignó $ 80 000.

- Representa matemáticamente estos movimientos bancarios.

Conoce

2.1 El conjunto de los números enteros

En ocasiones no es suficiente el conjunto de los números naturales para representar matemáticamente situaciones de la vida cotidiana. Por esta razón, los matemáticos de la antigüedad consideraron necesario ampliar este conjunto y comenzar a utilizar los números negativos.

Esta decisión dio origen al **conjunto de los números enteros** ($\mathbb{Z}$), el cual incluye los **enteros negativos** ($\mathbb{Z}^-$), los **enteros positivos** ($\mathbb{Z}^+$) y el **0**.

Los números enteros negativos van precedidos por el signo menos ($-$).

$$\mathbb{Z}^- = \{\ldots -4, -3, -2, -1\}$$

Los números enteros positivos van precedidos por el signo más ($+$). En algunos casos se escribirán sin este signo, pero aún así se entenderá que son números positivos.

$$\mathbb{Z}^+ = \{+1, +2, +3, +4 \ldots\} = \{1, 2, 3, 4 \ldots\}$$

Así, los números enteros permiten diferenciar la manera en que se registran algunas situaciones como: deudas y haberes, temperaturas sobre cero y temperaturas bajo cero, alturas sobre el nivel del mar y profundidades, entre otras.

En el caso de los movimientos bancarios, se acostumbra a representar las consignaciones precedidas con el signo más y los retiros con el signo menos. Por lo tanto, los movimientos en la cuenta bancaria de Santiago se pueden representar como se muestra en la Tabla 1.3.

Movimientos	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves
Consignación	+$ 300 000			+$ 80 000
Retiro		−$ 120 000	−$ 95 000	

Tabla 1.3

El **conjunto de los números enteros** está conformado por los enteros negativos, los enteros positivos y el 0.

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4 \ldots\}$$

Ejemplo 1

Para expresar la fecha de ocurrencia de diferentes acontecimientos, se ha convenido tomar como referencia o punto 0 el año de nacimiento de Cristo. Por esta razón, las fechas anteriores al nacimiento de Cristo se escriben precedidas por el signo menos ($-$), y las posteriores, con el signo más ($+$).

Por ejemplo, el suceso "Euclides, geómetra griego, nació en el año 306 a. C. y murió en el año 283 a. C." se puede expresar así: "Euclides, geómetra griego, nació en el año -306 y murió en el año -283".

Ejemplo 2

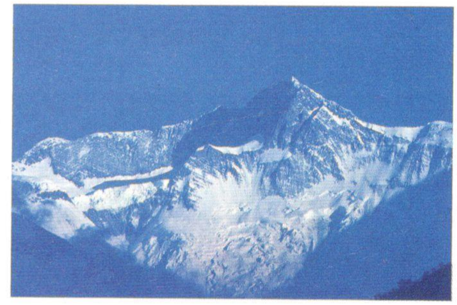
En las tablas 1.4 y 1.5 se registró la altura y la profundidad (respectivamente) de algunos lugares del mundo. En ambos casos se emplearon números enteros.

Picos más altos del mundo	Altura
Dhaulagiri (Nepal)	+8 167 m
Montaña Manaslu (Nepal)	+8 156 m
Nanga Parbat (Pakistán)	+8 125 m
Annapurna (Nepal)	+8 091 m

Tabla 1.4

Algunos lugares profundos del mundo	Profundidad
Pozo de Kola (Rusia)	−13 km
Perforación submarina (Nueva Zelanda)	−2 km
Mina del Cañón de Bingham (Estados Unidos)	−1,2 km
Cueva de Vrtoglavica (Eslovenia)	−603 m

Tabla 1.5



Pico Annapurna (Nepal): 8 091 m de altura

2.2 Opuesto de un número entero

Cada elemento del conjunto de los enteros positivos tiene un opuesto en el conjunto de los enteros negativos y viceversa. El **opuesto de un número entero** a se simboliza como $-a$.

Ejemplo 3

Las expresiones $-(-9)$ y $-[-(-7)]$ son respectivamente equivalentes a $+9$ y -7, porque el opuesto de -9 es $+9$ y el opuesto de $-(-7)$ es -7.

2.3 Números enteros en la recta numérica

Los números enteros se pueden representar en la recta numérica como sigue.

1. Sobre una recta horizontal se marca un punto que represente el 0.
2. Se fija la distancia del 0 al 1. Esta medida se toma como unidad y se traslada a la derecha y a la izquierda del 0 tantas veces como sea necesario (Figura 1.5).

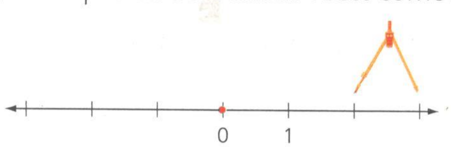


Figura 1.5

3. Se sitúan a la derecha del 0 los números enteros positivos y a la izquierda los números enteros negativos (Figura 1.6).

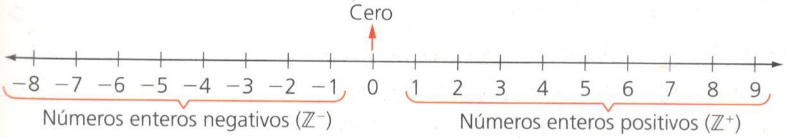


Figura 1.6

Ejemplo 4

En la Figura 1.7 se ubicaron los números enteros comprendidos entre -7 y 5.

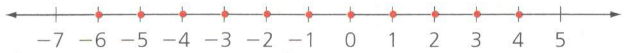


Figura 1.7

Ejemplo 5

En la representación de la recta numérica se observa que dos números enteros opuestos están a la misma distancia de 0, pero en lados contrarios. Por ejemplo, en la Figura 1.8 se representan los números opuestos -4 y 4.

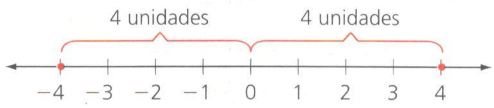


Figura 1.8

Se observa que la distancia entre -4 y 0 es la misma que entre 0 y 4; es decir, 4 unidades.

Ejemplo 6

Observa las siguientes afirmaciones.

a. El conjunto de los números naturales está contenido en el de los enteros.

b. El 0 es un número entero positivo.

c. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}^-$

d. $-[-(-10)] = -10$

El valor de verdad de cada afirmación es:

a. Verdadero. Todo número natural es entero positivo.

b. Falso. El 0 es el único número entero que no es positivo ni negativo.

c. Falso. El conjunto $\mathbb{Z}^-$ está contenido en el conjunto $\mathbb{Z}$.

d. Verdadero. El opuesto de $[-(-10)]$ es -10.

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Escribe un número entero que exprese la cantidad mencionada en cada caso.

a. La cima de la montaña está a 568 m de altura.

b. Pitágoras nació en el siglo VI a. C.

c. El submarino está a 120 m de profundidad.

d. La temperatura de una ciudad es de 5 °C bajo cero.

e. Pablo consignó \$ 500 000 en su cuenta.

f. Sofía debe \$ 350 000 al banco.

2 Explica el significado de los números enteros utilizados en las siguientes expresiones.

a. La temperatura mínima registrada hoy fue de -3 °C.

b. El buzo se encuentra a -50 m.

c. El alpinista está a $+600$ m.

d. El ascensor quedó detenido en el piso -2.

e. La Edad Media comenzó aproximadamente hacia el año 1476.

f. El estado de cuenta es de \$ 700 000.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Razonamiento

3 Escribe $\in$ o $\notin$, según corresponda.

a. -25 .... $\mathbb{Z}^-$ b. 34 .... $\mathbb{Z}^+$

c. -67 .... $\mathbb{Z}^+$ d. 58 .... $\mathbb{Z}^-$

e. -46 .... $\mathbb{Z}^+$ f. 31 .... $\mathbb{Z}^+$

g. -15 .... $\mathbb{Z}^-$ h. 72 .... $\mathbb{Z}^-$

4 Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. El opuesto de un entero negativo es negativo.

b. El opuesto del opuesto de un número positivo es negativo.

c. La distancia entre dos números opuestos es el doble de la distancia entre uno de los números y el 0.

d. El opuesto de un número entero positivo es negativo.

5 Determina y escribe el número entero que debe ir en cada casilla.

a.

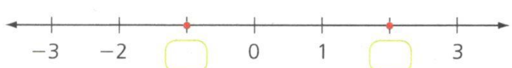


Figura 1.9

b.

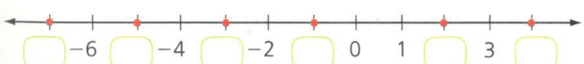


Figura 1.10

c.

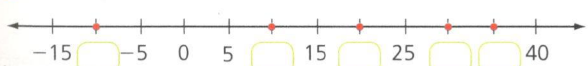


Figura 1.11

Comunicación

6 Ubica los números de cada grupo en la recta numérica.

a. $5, -6, -4, 3, -2, 6$

b. $-10, -6, 8, 4, -2, 12$

7 Escribe el número opuesto que se indica en cada caso.

a. $-(-8)$ b. $-(+7)$

c. $-[-(-1)]$ d. $-[-(-11)]$

Razonamiento

8 Observa la Figura 1.12 y resuelve.

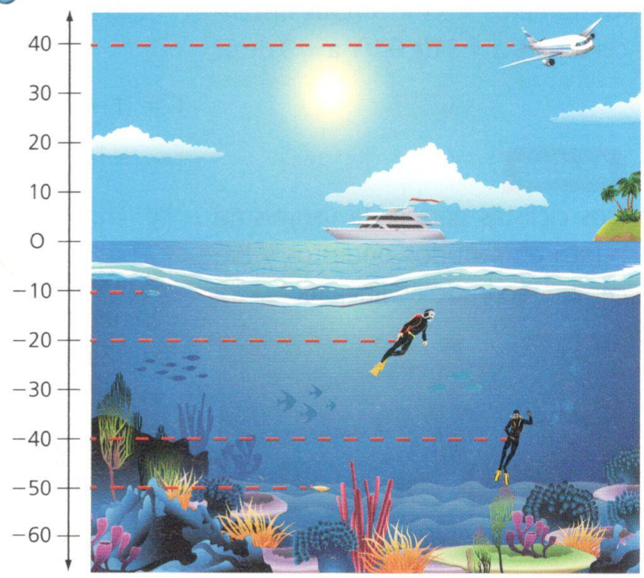


Figura 1.12

a. ¿A qué profundidad con respecto al nivel del mar se encuentra cada uno de los buzos?

b. ¿A qué altura con respecto al nivel del mar se encuentra el avión?

c. ¿A qué profundidad con respecto al nivel del mar se encuentra el pez amarillo?

d. ¿En qué punto con respecto al nivel del mar se encuentra el barco?

Evaluación del aprendizaje

Analiza cada situación y responde las preguntas.

a. ¿Qué número se encuentra 4 unidades a la izquierda de -1? ¿Cuál es su opuesto?

b. El entero m está 5 unidades a la izquierda de n. Si $n = -2$, ¿cuál es el valor de m?

c. Los enteros m y n están separados por 10 unidades. Si la distancia de m a 0 es de 3 unidades, ¿cuáles son las posibles distancias de n a 0?

d. Un número positivo está al doble de unidades de 0 que un número negativo, y los dos están separados por 27 unidades. ¿Cuáles son esos números?

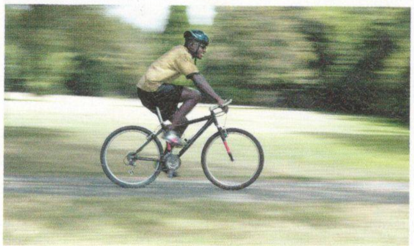
3 Valor absoluto de un número entero

Saberes previos

En una recta numérica representa los números $+3$ y -3. ¿Qué distancia separa a $+3$ de 0? ¿Y a -3 de 0?

Analiza

Dos ciclistas parten de un mismo punto en sentidos opuestos y hacen un recorrido en línea recta.



- Si los dos van a una velocidad de 50 km/h, ¿qué distancia separa a cada ciclista del punto de partida al cabo de una hora de recorrido?

Conoce

La ubicación de los ciclistas se puede representar en una recta numérica como la de la Figura 1.13.

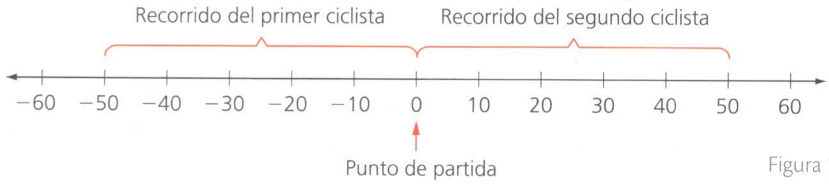


Figura 1.13

Se observa que, después de una hora de recorrido, el primer ciclista se encuentra a -50 km del punto de partida, mientras que el segundo está a $+50$ km. Sin embargo, los ciclistas están a la misma distancia del punto de partida, es decir, 50 km.

Se dice entonces que los números enteros -50 y $+50$ tienen el mismo **valor absoluto**, pues en la recta numérica están a igual distancia de 0.

El **valor absoluto de un número entero** es la distancia que separa al número del cero en la recta numérica. Esta medida siempre es una cantidad positiva. El valor absoluto de un número entero a se simboliza como $|a|$.

Ejemplo 1

El valor absoluto de $+14$ es 14 porque, en la recta numérica, la distancia de $+14$ a 0 es de 14 unidades. Se escribe $|+14| = 14$. Observa la Figura 1.14.

Figura 1.14

Ejemplo 2

Observa cómo se calcula el valor absoluto de algunos números enteros.

- $|-6| = 6$, ya que -6 está a 6 unidades de 0 en la recta numérica.
- $|+12| = 12$, porque entre $+12$ y 0 hay 12 unidades de distancia.
- $|-7| = 7$, puesto que hay 7 unidades entre -7 y 0.
- $|0| = 0$, porque entre 0 y el mismo hay 0 unidades.

Ejemplo 3

- Un número cuyo valor absoluto es 7 y está entre -10 y 3, es -7.
- Los números cuyo valor absoluto es 9, son 9 o -9.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Determina estos valores absolutos.

a. $|-3|$ b. $|54|$ c. $|-(-11)|$
d. $|-6|$ e. $|-a|$ f. $|-x|$

2 Calcula el resultado de cada operación.

a. $|-3| \cdot |8|$ b. $|-9| + |-13|$
c. $|-25| \div |5|$ d. $|-30| \div |-10|$
e. $|-8| \cdot |-4|$ f. $|-5| + |-10|$

Razonamiento

3 Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. El valor absoluto de un número siempre es un entero positivo. ( )
b. El valor absoluto de 0 es 1. ( )
c. El valor absoluto de un número entero a positivo siempre es $-a$. ( )

4 Halla el valor de x para que cada expresión sea verdadera. Explica en el caso en que la igualdad no pueda ser verdadera.

a. $|x| = 15$ b. $|-3| = x$
c. $|-x| = 7$ d. $|x| = 0$
e. $|8| = x$ f. $|-(-13)| = x$
g. $|x - 3| = 12$ h. $|x| = -11$

Comunicación

5 Encuentra, en cada caso, el número entero que cumple la condición dada.

a. Su valor absoluto es 8 y está a la izquierda de 0.
b. Su valor absoluto es 3 y está entre -4 y -2.
c. Su valor absoluto es igual al de su opuesto.
d. Su valor absoluto es 15 y está entre -10 y -20.
e. Su valor absoluto es 4 y se representa en la recta numérica a la derecha de -12.
f. Su valor absoluto es 12.
g. El valor absoluto de su opuesto es 7.

Razonamiento

6 Señala con una X si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

	V	F
a. $\|-1\| = 1$	( )	( )
b. $\|1\| = -1$	( )	( )
c. $\|8\| - \|6\| = \|6\| - \|8\|$	( )	( )
d. $\|0\| - \|3\| = \|3\| - \|0\|$	( )	( )
e. $\|-6\| + \|3\| = \|3\| - \|6\|$	( )	( )
f. $-\|5\| = -5$	( )	( )

Resolución de problemas

7 Buscando una dirección, Alejandro caminó inicialmente siete cuadras en un sentido. Luego, se desplazó tres cuadras en el sentido contrario. ¿Cuántas cuadras caminó en total?

Evaluación del aprendizaje

i Un vehículo sale del estacionamiento y se desplaza 40 m al norte. Luego, se devuelve sobre la misma calle y se traslada 70 m hacia el sur y, finalmente, se mueve 20 m hacia el sur. ¿Cuántos metros recorrió en total el vehículo?

ii Un pájaro elevándose en el aire y un buzo sumergido en el mar se encuentran a la misma distancia del nivel del mar. ¿A qué altura se encuentra el pájaro y a qué profundidad el buzo, si los separan 86 m?

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Según el Instituto Colombiano de Bienestar Familiar (ICBF) el embarazo en adolescentes es un problema de salud pública, que puede tener efectos negativos en el bienestar físico y mental de la madre y de su hijo. Averigua en página del DANE indicadores relativos y absolutos sobre este tema. ¿Cómo crees que se podrían prevenir los embarazos en adolescentes?

4 Orden en los números enteros

Saberes previos

Completa las siguientes expresiones con los signos $>$ o $<$, según corresponda.

- 7 10
- 12 5
- 0 4

Analiza

Sebastián registró en la Tabla 1.6 la temperatura de tres cuartos fríos de un laboratorio.

Cuarto	Temperatura
A	-2 °C
B	-8 °C
C	-5 °C

Tabla 1.6

- Según esta información, ¿en cuál de los tres cuartos hace más frío?

Conoce

Para determinar en cuál de los tres hace más frío, se pueden representar las temperaturas en una recta numérica y luego comparar su ubicación (Figura 1.15).

Figura 1.15

Cuando se comparan dos números enteros en la recta numérica, se deduce que es mayor el número que se encuentra ubicado a la derecha del otro. A su vez, es menor el que se encuentra ubicado a la izquierda. De acuerdo con lo anterior, se pueden establecer las siguientes relaciones de orden:

- Como -2 está a la derecha de -5, entonces $-5 < -2$.
- Como -5 está a la derecha de -8, entonces $-8 < -5$.
- Como -2 está a la derecha de -8, entonces $-8 < -2$.

Esto quiere decir que el orden de las temperaturas es:

Temperatura del cuarto *B*		Temperatura del cuarto *C*		Temperatura del cuarto *A*
-8 °C	$<$	-5 °C	$<$	-2 °C

Por lo tanto, en el cuarto *B* es en el que hace más frío.

Si dos números enteros *a* y *b* están representados en la recta numérica, entonces $a > b$, siempre que *a* esté ubicado a la derecha de *b*.

Otros criterios que permiten determinar la relación de orden existente entre dos números enteros son:

- Dados dos números enteros positivos, es mayor el que tiene mayor valor absoluto.
- Dados dos números enteros negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto.
- Un número positivo siempre es mayor que cualquier número negativo.

Ejemplo 1

Observa los números enteros representados en la recta numérica de la Figura 1.16 y lee algunas conclusiones:

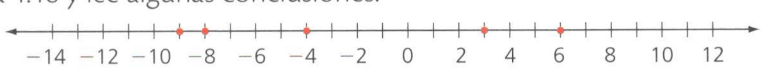


Figura 1.16

- $-8 < -4$, ya que -4 está a la derecha de -8.
- 6 es el mayor de los números representados, puesto que está ubicado a la derecha de todos los demás.
- El orden de los números de menor a mayor es:

$-9 < -8 < -4 < 3 < 6$

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Representa cada pareja de números enteros en la recta numérica. Luego, escribe $>$ o $<$, según sea el caso.

a. -3 ▢ 1

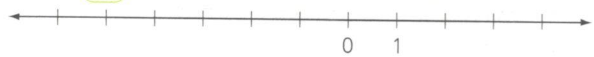


Figura 1.17

b. 4 ▢ -6

Figura 1.18

c. -5 ▢ -8

Figura 1.19

d. 6 ▢ -3

Figura 1.20

2 Escribe el signo $>$ o $<$, según corresponda.

a. $+4$ ▢ $+1$ b. -1 ▢ -6

c. 0 ▢ $+3$ d. -8 ▢ $+2$

e. -2 ▢ 0 f. $+5$ ▢ -9

g. -78 ▢ 26 h. -27 ▢ -49

i. 47 ▢ 38 j. 19 ▢ -29

Comunicación

3 Completa la Tabla 1.7.

Anterior	Número	Siguiente
	−210	
	+245	
	−62	
	+299	
	−157	
	−302	

Tabla 1.7

4 Ordena de menor a mayor los números de cada grupo.

a. 25, −32, 24, −1, 0, −12

b. 12, 7, −20, 16, −13

c. −54, 678, −249, 14, −24, 0, 190

d. 32, 56, 17, −8, −41

Razonamiento

5 Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. 3 está entre 1 y −1. ( )

b. −1 está entre −3 y 0. ( )

c. −2 está entre 0 y 5. ( )

d. 2 está entre −1 y 1. ( )

e. 3 está entre −5 y 5. ( )

6 Representa en la recta numérica los números enteros que cumplan cada una de las condiciones dadas.

a. Son mayores que −12 y menores que +6.

b. Son menores que +16 y mayores que −3.

c. Son menores que +8 y mayores que −7.

d. Son menores que −7 y mayores que −24.

Resolución de problemas

7 Tres fosas marinas tienen una profundidad de −5 534 m, −6 524 m y −4 321 m, respectivamente. ¿Cuál de las tres fosas marinas tiene mayor profundidad? ¿Cuál de las fosas es la menos profunda?

Evaluación del aprendizaje

En la Tabla 1.8 se presentan los puntos de ebullición aproximados de algunos elementos de la tabla periódica.

Elemento químico	Punto de ebullición (ºC)
Flúor	−188
Hidrógeno	−253
Argón	−186
Helio	−269
Nitrógeno	−196
Neón	−246

Tabla 1.8

a. ¿Cuál es el elemento químico con el mayor punto de ebullición? ¿Y con el menor?

b. Ordena, de menor a mayor, los elementos periódicos de la tabla según sus puntos de ebullición.

5 Adición de números enteros

Saberes previos

En el mes de abril se matricularon 25 418 vehículos; en mayo, 18 054 y en junio, el doble de los matriculados en mayo. ¿Cuántos vehículos se matricularon durante los tres meses?

Analiza

En una exploración del fondo marino, un buzo se sumerge en un primer momento a 45 m de profundidad, y al cabo de una hora desciende otros 27 m.

- En total, ¿cuántos metros descendió el buzo durante la exploración?

Conoce

5.1 Adición de números enteros del mismo signo

Para resolver la situación, se pueden sumar las distancias recorridas por el buzo en su descenso; es decir, se efectúa una **adición de números enteros**.

$$\underset{\text{descenso (m)}}{\overset{\text{Primer}}{\downarrow}} \qquad \underset{\text{descenso (m)}}{\overset{\text{Segundo}}{\downarrow}}$$

$$\overset{\text{Primer descenso (m)}}{-45} \quad + \quad \overset{\text{Segundo descenso (m)}}{(-27)}$$

En la Figura 1.21 se muestra la representación de esta adición.

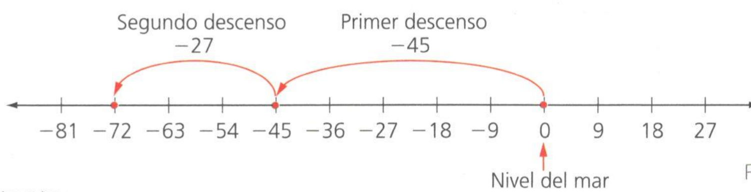


Figura 1.21

Por lo tanto:

$$-45 + (-27) = -72$$

Analíticamente, el resultado anterior es equivalente a la suma de los valores absolutos de los sumandos, precedida por el signo común de los números -45 y -27. Esto es:

$$\text{Signo común} \longrightarrow -(\overbrace{|-45| + |-27|}^{\text{Suma de los valores absolutos de los sumandos}}) = -(45 + 27) = -72$$

Se deduce entonces que el buzo descendió 72 m en total.

En la **adición de números enteros del mismo signo**, se suman los valores absolutos de los sumandos y a esta suma se le antepone el signo que tienen en común.

5.2 Adición de números enteros de diferente signo

En la **adición de números enteros de diferente signo**, se restan los valores absolutos de los sumandos y a la suma se le antepone el signo del sumando que tenga el mayor valor absoluto.

Ejemplo 1

Para efectuar la operación $-9 + 12$ se procede así:

1. Se calculan los valores absolutos de los dos sumandos. $\quad |-9| = 9$ y $|12| = 12$
2. Al mayor valor absoluto se le resta el menor valor. $\quad 12 - 9 = 3$
3. Al resultado se le antepone el signo del sumando que tenga el mayor valor absoluto. $\quad -9 + 12 = +3$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

5.3 Propiedades de la adición de números enteros

La adición de números enteros cumple con las propiedades que se presentan en la Tabla 1.9.

Propiedad	Descripción	Ejemplo
Clausurativa	La adición de dos o más números enteros es otro número entero.	$(-20) + (-39) = -59$
Conmutativa	En la adición de números enteros, el orden de los sumandos no altera la suma.	$(-25) + 45 = 45 + (-25)$ $20 = 20$
Asociativa	Se pueden asociar los sumandos de varias formas y el resultado no se altera.	• $(-23 + 24) + (-4)$ $= 1 + (-4) = -3$ • $-23 + [24 + (-4)]$ $= -23 + 20 = -3$
Modulativa	Todo número entero sumado con el 0 da como resultado el mismo número entero.	$0 + (-12) = (-12) + 0$ $-12 = -12$
Invertiva	Todo número entero sumado con su opuesto aditivo da como resultado 0.	$25 + (-25) = (-25) + 25$ $0 = 0$

Tabla 1.9

5.4 Adición de varios números enteros

Las propiedades de la adición de números enteros permiten efectuar la adición de tres o más números enteros de dos maneras equivalentes.

- Se suman los números enteros de dos en dos, de forma consecutiva.

$$\underbrace{25 + (-32)} + (-12) + 23$$
$$= \underbrace{-7 + (-12)} + 23$$
$$= \underbrace{-19 + 23}$$
$$= 4$$

- Se suman por separado los números positivos y los negativos, y luego se resuelven las operaciones resultantes.

$$25 + (-32) + (-12) + 23$$
$$= \underbrace{25 + 23} + \underbrace{(-32) + (-12)}$$
$$= \underbrace{48 + (-44)}$$
$$= 4$$

Ejemplo 2

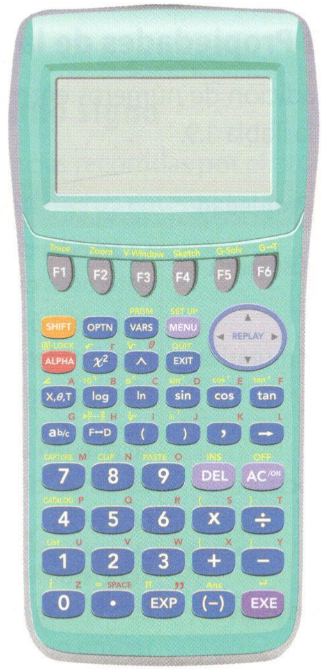
Luis hizo dos compras con su tarjeta de crédito: una por \$ 296 000 y otra por \$ 103 000. Antes de hacer las compras tenía un saldo a favor de \$ 229 000, entonces abonó a la tarjeta \$ 130 000. ¿Qué saldo tiene después del abono?

Para resolver el problema, se puede efectuar la siguiente adición :

$$229\,000 + (-296\,000) + (-103\,000) + 130\,000$$
$$= 229\,000 + 130\,000 + (-296\,000) + (-103\,000)$$
$$= 359\,000 + (-399\,000) = -40\,000$$

Por tanto, Luis tiene un saldo en contra de \$ 40 000.

5 Adición de números enteros

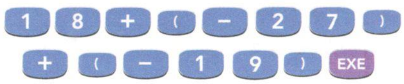


MatemaTICS

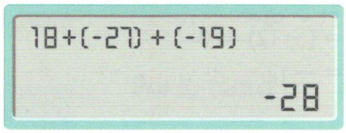
Realiza operaciones con números negativos

Identifica en tu calculadora científica las teclas ( ) y −. Estas te permitirán introducir cualquier adición de números enteros.

Ahora, observa la secuencia que debes ingresar en tu calculadora para efectuar la operación $18 + (-27) + (-19)$.



Con ello obtendrás el siguiente resultado:



Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Relaciona cada adición con la representación en la recta numérica que le corresponde.

a. $-4 + (-3)$ b. $6 + 5$

c. $-2 + 7$ d. $-8 + 5$

( )

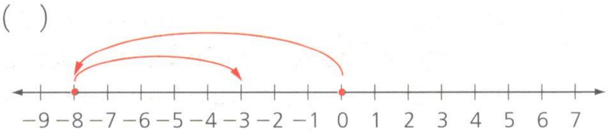


Figura 1.22

( )

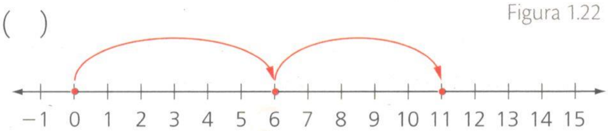


Figura 1.23

( )

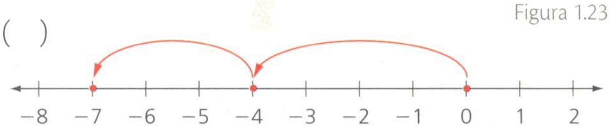


Figura 1.24

( )

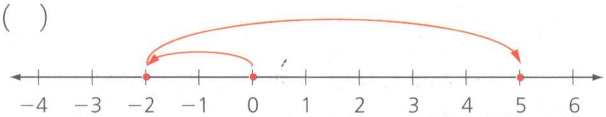


Figura 1.25

2 Calcula la suma en cada caso.

a. $19 + (-12)$ b. $-82 + 9$

c. $6 + (-27)$ d. $18 + (-2)$

Comunicación

3 Completa la Tabla 1.10.

a	b	$a + b$	$a + (-b)$
-5	-16		
6	-18		
-12	24		
18	31		

Tabla 1.10

Razonamiento

4 Escribe en cada caso el valor de la letra y la propiedad de la adición que se utilizó.

a. $15 + (-8 + x) = [15 + (-8)] + (-7)$

b. $13 + y = 0$

c. $-23 + 54 = x + (-23)$

d. $27 + (-27) = z$

Ejercitación

5 Efectúa las siguientes adiciones.

a. $(+4) + (-6) + (-8) + (+10) + (-2)$

b. $(+8) + (-60) + (+16) + (+5) + (-4)$

c. $(-10) + (-8) + (+1) + (-6) + (-30)$

d. $(-10) + (+2) + (-5) + (+6) + (-8)$

Comunicación

6 ¿Qué obtienes si al número entero 349 le sumas 85 y al resultado le sumas -434? ¿Qué propiedad de la adición cumple este resultado?

Razonamiento

7 Completa la pirámide numérica de la Figura 1.26. Ten en cuenta la información de la pirámide de la izquierda.

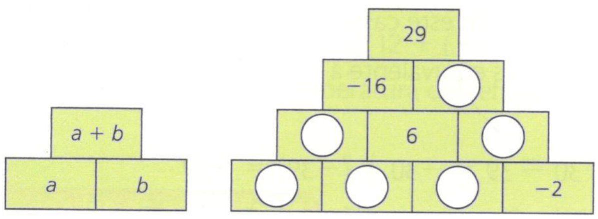


Figura 1.26

8 Completa cada cuadrado mágico con números enteros de tal manera que la suma de sus columnas, filas y diagonales sea la misma.

a.

5		
	1	
10		-3

b.

-8		
	-3	0
		2

c.

7		
-6		
5		-3

d.

	-7	
-9		
-4		-8

9 Determina si la afirmación es verdadera o falsa.

a. El opuesto del opuesto de un número es igual al mismo número.

b. Al adicionar números enteros que están a la izquierda del 0, se obtiene un número entero negativo.

c. La suma de dos enteros negativos es negativa.

d. Dos números son opuestos si al sumarlos se obtiene como resultado 1.

10 Encuentra y corrige el error en las siguientes adiciones de números enteros.

a. $-13 + 46 + (-17) + 8 + (+5)$
$= -13 + (-17) + 46 + 5 + 8$
$= 30 + 59$
$= 89$

b. $-45 + 4 + (-7) + 8 + (-5)$
$= 4 + 8 + (-45) + (-7) + (-5)$
$= -12 + 57$
$= -45$

Resolución de problemas

11 Tres niñas recibieron de sus padres cierta cantidad de dinero para ir de compras. La primera recibe \$ 55 000, la segunda \$ 5 000 más que la primera y la tercera recibe la suma de las otras dos juntas. ¿Cuánto recibió cada niña?

12 Pitágoras, famoso filósofo y matemático griego, nació en el año 571 a. C. Según la historia, este personaje murió a los 85 años de edad. ¿En qué año murió Pitágoras?

Evaluación del aprendizaje

i Tiberio Claudio César Augusto Germánico, historiador y político romano, nació el 1 agosto del año 11 a. C. y murió el 13 octubre del año 54 d. C. ¿Cuántos años vivió?

ii La adición de dos números es –17. Calcula el número menor, si el mayor es –8.

Estilos de vida saludable

Liliana sigue un plan de entrenamiento antes de participar en una maratón. El plan incluye correr durante 20 semanas: 8 km el lunes, 8 km el miércoles, 8 km el viernes y 16 km el sábado.

- ¿Cuántos kilómetros corre Liliana semanalmente? ¿Por qué es importante el entrenamiento?

6 Sustracción de números enteros

Saberes previos

Para comprar un automóvil que cuesta \$ 35 000 000, Diego tiene ahorrados \$ 19 000 000. ¿Cuánto dinero debe conseguir Diego para completar el valor del automóvil?

Analiza

Cleopatra, famosa reina de Egipto, falleció en el año 30 a. C., cuando tenía 39 años de edad.

- ¿En qué año nació Cleopatra?

Conoce

Para averiguar el año de nacimiento de Cleopatra, se puede efectuar la siguiente **sustracción de números enteros.**

$$\underset{\text{Año en que falleció}}{-30} \quad - \quad \underset{\text{Edad a la que falleció}}{39}$$

Una sustracción de números enteros es equivalente a la adición del minuendo con el opuesto del sustraendo. En este caso,

$$-30 - 39 \text{ es equivalente a } -30 + (-39)$$

Por lo tanto:

$$-30 - 39 = -30 + (-39) = -69$$

Según el anterior resultado, Cleopatra nació en el año 69 a. C.

Si a y b son dos números enteros, entonces la sustracción entre a y b expresada como $a - b$ es equivalente a $a + (-b)$.

Ejemplo 1

Una sustracción de números enteros se puede expresar como una adición y, por tanto, se puede representar en la recta numérica. Observa.

a. $12 - (-10) = 12 + 10 = 22$

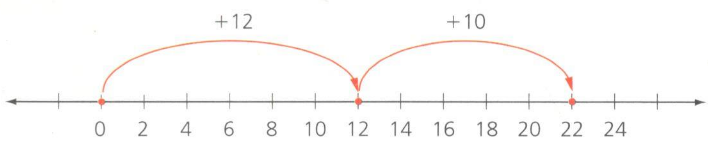


Figura 1.27

b. $36 - 27 = 36 + (-27) = 9$

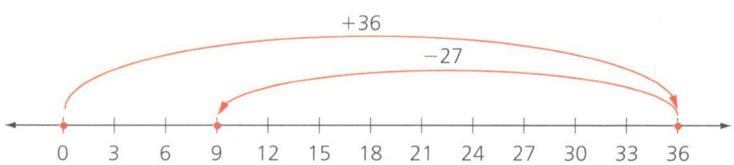


Figura 1.28

c. $-16 - 24 = -16 + (-24) = -40$

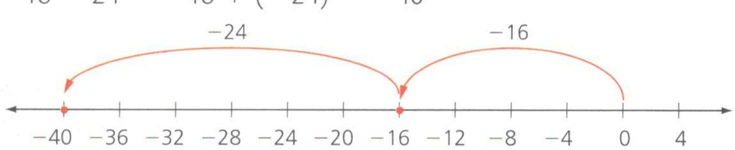


Figura 1.29

d. $-8 - (-5) = -8 + 5 = -3$

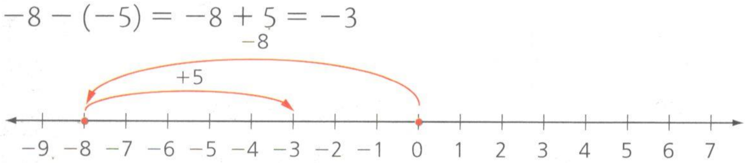


Figura 1.30

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 2

La temperatura de un refrigerador es de 12 °C bajo cero. Si dicha temperatura disminuye 7 °C más, ¿cuál es la nueva temperatura del refrigerador?:

La situación se puede resolver efectuando una sustracción.

$$\underbrace{-12}_{\text{Temperatura inicial del refrigerador (°C)}} \quad - \quad \underbrace{7}_{\text{Disminución de la temperatura (°C)}}$$

Esto es:

$$-12 - 7 = -12 + (-7) = -19$$

Se concluye que la nueva temperatura del refrigerador es 19 °C bajo cero.

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Escribe cada sustracción de números enteros como una adición equivalente y resuélvela.

a. $19 - (-12)$
b. $(-82) - 9$
c. $-6 - (-27)$
d. $18 - (-2)$
e. $(-18) - 4$
f. $(-12) - (-11)$

2 Efectúa las siguientes operaciones.

a. $[(-28) - (+42)] - (-13)$
b. $[(-15) - (-6)] - (-23)$
c. $[(+45) - (-4)] - (+17)$
d. $[(+27) - (-18)] - (-72)$

3 Completa la Tabla 1.11.

Personaje	Fecha de nacimiento	Fecha de fallecimiento	Cantidad de años vividos
Pitágoras	−571	−497	
Euclides		−275	55
Zenón	−495		65
Arquímedes	−287	−212	

Tabla 1.11

4 Haz lo que se indica en cada caso.

a. Resta 200 de 280
b. A −540 réstale −120
c. De 850 resta −1 070
d. Resta −2 945 de −980

Resolución de problemas

5 Un termómetro marcaba −5 °C a las 5:00 a. m. y 12 °C al mediodía. ¿Cuál fue la variación de la temperatura?

6 Si en una sustracción el minuendo es −125 y la diferencia es −125, ¿cuál es el sustraendo?

Evaluación del aprendizaje

La Tabla 1.12 muestra el número de goles a favor y en contra de los cuatro equipos que participaron en un campeonato de fútbol.

Equipos	Goles a favor	Goles en contra	Diferencia de goles
7 A	35	38	
7 B	28	25	
7 C	52	43	
7 D	46	49	

Tabla 1.12

a. Completa la columna de la diferencia de goles con los números enteros correspondientes.
b. ¿Qué equipo tuvo la mayor diferencia de goles?
c. ¿Qué equipo tuvo la menor diferencia de goles?
d. ¿Qué equipo no tuvo diferencia de goles?
e. Ordena los equipos desde el que obtuvo el primer lugar hasta el que ocupó el último puesto.

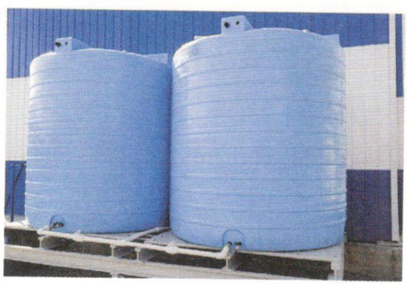
7 Multiplicación de números enteros

Saberes previos

Sebastián compró cinco docenas de vasos a $ 2 500 cada una. Luego, vendió cada vaso a $ 300, pero se le rompieron cinco de ellos. ¿Cuánto dinero ganó con la venta?

Analiza

Desde las 8:00 a. m., a un tanque vacío se le vierten 28 L de agua cada hora y se le extraen simultáneamente 5 L.



- ¿Cuántos litros de agua habrá en el tanque a las 11:00 a. m.?

Conoce

Una manera de averiguar cuántos litros de agua habrá en el tanque a las 11:00 a. m. consiste en hacer el cálculo de los litros que se vertieron durante las tres horas y, a esta cantidad, restarle la cantidad de litros que se extrajeron en ese mismo tiempo.

- Al representar en la recta numérica la cantidad de litros de agua que se vierten en el tanque, se obtiene la Figura 1.31.

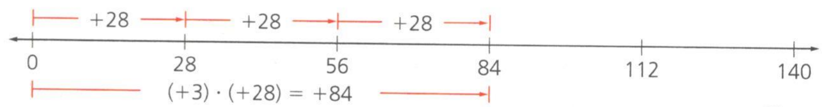


Figura 1.31

Según lo anterior, después de 3 horas se habrán depositado 84 L de agua en el tanque.

- Por otra parte, el número de litros que se extraen del tanque puede representarse como en la Figura 1.32.

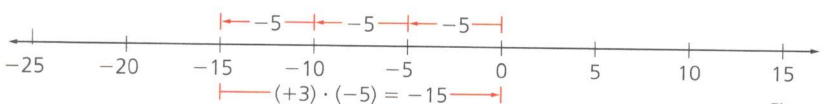


Figura 1.32

Entonces, al cabo de tres horas habrán salido del tanque 15 L de agua.

- Finalmente, para calcular la cantidad de litros que habrá en el tanque a las 11:00 a. m. se realiza la resta.

$$84\text{ L} - 15\text{ L} = 69\text{ L}$$

Para calcular el **producto de dos números enteros**, se multiplican los valores absolutos de los factores. El producto es **positivo** si los factores tienen el mismo signo, o es **negativo** si los factores tienen diferente signo.

7.1 Regla de los signos

Se puede determinar el signo del producto de dos números enteros si se aplica la regla de los signos, que se resume como sigue.

- El producto de dos números enteros de igual signo es positivo.

$$+ \cdot + = +$$
$$- \cdot - = +$$

- El producto de dos números enteros de diferente signo es negativo.

$$+ \cdot - = -$$
$$- \cdot + = -$$

Ejemplo 1

Observa el resultado de estas multiplicaciones.

- $7 \cdot (-8) = -56$
- $(-6) \cdot 9 = -54$
- $(-12) \cdot (-3) = +36$
- $11 \cdot 4 = 44$

7.2 Propiedades de la multiplicación de números enteros

En el conjunto de los números enteros, la multiplicación cumple ciertas propiedades. En la Tabla 1.13 se describe cada una de ellas.

Propiedad	Definición	Ejemplo
Clausurativa	La multiplicación de dos o más números enteros es otro número entero. En general: $a \cdot b = c, c \in \mathbb{Z}$	$(-2) \cdot (-9) = 18$
Conmutativa	En toda multiplicación de números enteros, el orden de los factores no altera el producto. En general: $a \cdot b = b \cdot a$	$(-5) \cdot 4 = 4 \cdot (-5)$ $-20 = -20$
Asociativa	Se pueden asociar los factores de distintas formas y el producto no se altera. En general: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	$[(-3) \cdot 4] \cdot (-7)$ $= (-12) \cdot (-7)$ $= 84$ $(-3) \cdot [4 \cdot (-7)]$ $= (-3) \cdot (-28)$ $= 84$
Elemento neutro	El elemento neutro de la multiplicación es 1, pues el producto de un número entero por 1 es el mismo número. En general: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$	$1 \cdot (-15) = (-15) \cdot 1$ $= -15$
Elemento nulo	El producto de un número entero con 0 es 0. En general: $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$	$(-5) \cdot 0 = 0$
Distributiva de la multiplicación con respecto a la adición	La multiplicación de un número por una suma es igual a la suma de los productos de dicho número por cada uno de los sumandos. En general: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	$2 \cdot (-15 + 3)$ $= 2 \cdot (-12) = -24$ $2 \cdot (-15) + 2 \cdot 3$ $= (-30) + 6$ $= -24$

Tabla 1.13

Ejemplo 2

Karina tiene ahorrados \$ 275 200, pero debe \$ 34 500 a cada uno de sus cinco amigos. Para indicar con un número entero el saldo del que dispone Karina, se procede de la siguiente manera.

- Primero se toma la cantidad de dinero que debe Karina y se multiplica por 5, que son los amigos a los que les adeuda.

$$(-34\,500) \cdot 5 = -172\,500$$

- Luego, de los ahorros se resta la deuda.

$$275\,200 - 172\,500 = 102\,700$$

Por lo tanto, Karina dispone de un saldo de +\$ 102 700.

7 Multiplicación de números enteros

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Calcula estos productos.

a. $(-8)\cdot(-4)$ b. $(-31)\cdot(-4)$

c. $(-13)\cdot(-42)$ d. $(-23)\cdot(-6)$

e. $42\cdot(-7)$ f. $(-18)\cdot(-35)$

2 Halla el número que falta para obtener el resultado que se muestra en cada caso.

a. $7\cdot\square=35$ b. $(-3)\cdot\square=-24$

c. $9\cdot\square=-540$ d. $\square\cdot(-15)=0$

e. $\square\cdot 25=-100$ f. $\square\cdot 200=-400$

g. $12\cdot\square=12$ h. $(-17)\cdot\square=-51$

Comunicación

3 Completa la Tabla 1.14.

Número	−12	−6	−13	21	−32	4
Doble						
Triple						
Cuádruple						

Tabla 1.14

4 Indica si cada afirmación es verdadera o falsa.

a. El producto de dos números enteros es otro número entero.

b. El producto de dos números enteros negativos es un número entero negativo.

c. El número 0 es el elemento neutro de la multiplicación de los números enteros.

d. La multiplicación de números enteros no cumple la propiedad conmutativa.

Razonamiento

5 Escribe como producto de dos factores los siguientes resultados (puede háber más de una solución).

a. −14 b. 300

c. 6 d. 84

e. −25 f. −90

g. −75 h. 105

6 Resuelve y completa la Tabla 1.15.

a	b	c	$a\cdot b\cdot c$	$a\cdot c\cdot(-1)$
−7	−31	9		
−9	20	−2		
5	−13	0		
−12	8	−8		
16	14	−11		

Tabla 1.15

Comunicación

7 Escribe la multiplicación que se representó en cada caso.

a.

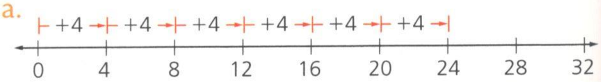


Figura 1.33

b.

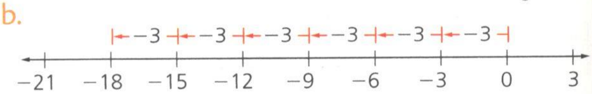


Figura 1.34

Razonamiento

8 Resuelve.

a. $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$

b. $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$

c. $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$

d. ¿Qué signo tiene el resultado de multiplicar (-2) por sí mismo 981 veces?

e. ¿Cuál es el signo del siguiente producto? $(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\ldots\cdot(-1\,056)$

9 Reemplaza en las operaciones las letras por sus valores correspondientes. Luego, calcula los resultados.

$m=-2$ $n=5$ $p=-7$ $q=-10$

a. $(m\cdot q)\cdot(n\cdot p)$ b. $m\cdot(n+p)$

c. $(m+p)\cdot(n-q)$ d. $(2m)\cdot p\cdot(2n)\cdot q$

10 Lee cada situación y justifícala dando un ejemplo.

a. Si multiplicas dos números enteros que no tienen el mismo signo, ¿qué resultado obtendrás?

b. Si multiplicas dos números enteros negativos, ¿qué resultado obtendrás?

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

11 Completa las casillas de cada cuadrado con números enteros, de forma que el producto por filas y columnas sea el mismo.

a.

		−2
	10	25
		−20

b.

−5		3
	−3	
		2

12 Busca el camino más corto desde el punto *A* hasta el punto *B*, de tal manera que cada número sea el doble del anterior. El camino puede ser de manera vertical, horizontal o diagonal.

A	−12	16	35	77	21
−7	24	46	24	12	25
−14	−28	43	56	112	45
28	−56	−112	12	−89	90
56	−21	−224	−448	−1 216	457
30	−64	448	−896	−1 792	2 516
60	128	−235	−1 624	−3 584	*B*

13 Si p y q son números enteros, encuentra las posibles soluciones para cada ecuación.

a. $p \cdot q = -45$
b. $p \cdot q = -448$
c. $p \cdot q = -32$
d. $p \cdot q = 54$
e. $p \cdot q = 86$
f. $p \cdot q = -96$

14 Encuentra y corrige el error en la siguiente multiplicación de números enteros.

$$[(-1) \cdot 4 \cdot (-17)] \cdot (8 \cdot 5)$$
$$= (-68) \cdot 40$$
$$= -2\,720$$

15 Completa la pirámides de la figura 1.35, teniendo en cuenta que la casilla superior es el resultado de la multiplicación de las dos casillas inferiores.

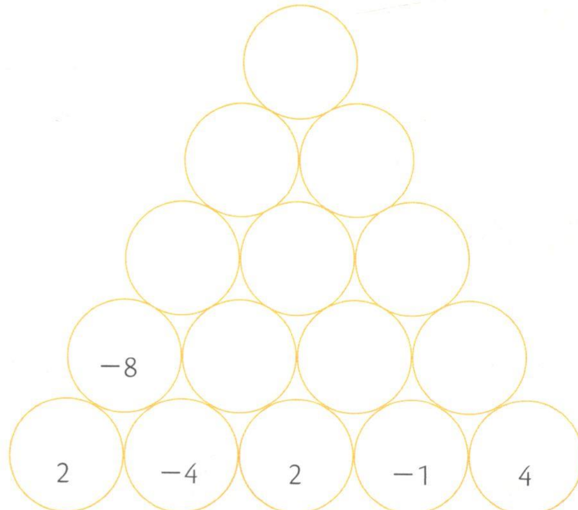


Figura 1.35

Resolución de problemas

16 ¿Cuál es el resultado de la multiplicación entre la suma de (−7) y (−6) y la resta entre (−4) y (−4)?

17 Si el producto de dos números es −48 y la diferencia entre el entero mayor y el entero menor es 16, ¿cuáles son los dos números?

Evaluación del aprendizaje

i Al triplicar la temperatura registrada en un día muy caluroso se obtiene 69 °C. ¿Cuál era la temperatura inicial?

ii Una piscina se llena a razón de 250 L por hora. ¿Cuántos litros de agua tiene la piscina después de 7 horas?

Educación ambiental

En Colombia cada persona genera aproximadamente 0,65 kilogramos de residuos sólidos al día. Si en total hay 48 841 902 habitantes, ¿cuántos residuos sólidos se generan en nuestro país al año? ¿Qué podrías hacer para reducir la producción de residuos sólidos?

8 División exacta de números enteros

Pensamiento numérico

Saberes previos

Mónica recorrió en su automóvil 441 km en 7 horas. Si hizo el recorrido a una velocidad constante, ¿cuántos kilómetros avanzó cada hora?

Analiza

En cierto experimento científico se debe disminuir la temperatura de una sustancia a razón de 13 °C cada hora.

- Si el experimento da inicio con una temperatura de 0 °C, ¿cuántas horas habrán transcurrido cuando la temperatura alcance los 78 °C bajo cero?

Conoce

Para resolver la situación, se puede dividir la temperatura final entre la cantidad de grados centígrados en los que disminuye la temperatura cada hora.

$$(-78) \div (-13)$$

En este caso, se debe dividir una cantidad negativa entre otra cantidad negativa. Para ello, se efectúa la división del valor absoluto del dividendo entre el valor absoluto del divisor, y al cociente se le pone signo positivo.

$$(-78) \div (-13) = +6$$

Este resultado significa que habrán transcurrido 6 horas desde el inicio del experimento hasta alcanzar la temperatura final.

Para calcular el **cociente de dos números enteros**, se divide el valor absoluto del dividendo entre el valor absoluto del divisor. El cociente es **positivo** si el dividendo y el divisor tienen el mismo signo, y es **negativo** si dichos términos tienen diferente signo.

La regla de los signos tiene una versión correspondiente en la división exacta de números enteros.

- El cociente de dos números enteros de igual signo es positivo.

$$+ \div + = +$$
$$- \div - = +$$

- El cociente de dos números enteros de diferente signo es negativo.

$$+ \div - = -$$
$$- \div + = -$$

Ejemplo 1

La definición de división exacta permite calcular cocientes como los que se muestran a continuación.

- $18 \div (-6) = -3$, ya que $(-6) \cdot (-3) = +18$.
- $(-45) \div (-9) = +5$, porque $(-9) \cdot (+5) = -45$.
- $(-96) \div 8 = -12$, pues $+8 \cdot (-12) = -96$.
- $108 \div 12 = 9$, porque $+12 \cdot (+9) = +108$.

Ejemplo 2

Si un buzo se sumerge en el mar 15 m cada hora, se puede averiguar cuánto tiempo ha transcurrido si el buzo se encuentra a −75 m efectuando la siguiente división.

$$-75 \div (-15) = +5$$

Según lo anterior, han transcurrido 5 horas.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 3

En una ciudad se registró una temperatura de 24 °C bajo cero a las 3:00 p. m. Si a las 7:00 a. m. del mismo día la temperatura era tres veces mayor, ¿cuál sería la temperatura a esa hora?

Para responder la pregunta, se puede dividir la temperatura presentada a las 3:00 p. m. entre 3, así:

$$(-24) \div 3 = -8$$

Lo anterior permite concluir que la temperatura en la ciudad a las 7:00 a. m. fue de 8 °C bajo cero.

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1. Calcula los cocientes.

a. $144 \div (-12)$
b. $(-82) \div 2$
c. $(-26) \div (-2)$
d. $18 \div (-6)$
e. $(-20) \div 4$
f. $(-12) \div (-12)$

2. Completa la Tabla 1.16 según las operaciones indicadas. Escribe una X cuando no se trate de una división exacta.

a	b	$a \div b$	$-2b$	$a \div (-b)$
−24	−3			
16	−4			
−25	2			
−6	66			
32	8			
6	−18			

Tabla 1.16

Comunicación

3. Indica si cada afirmación es verdadera o falsa.

a. Todo número entero dividido por otro entero siempre da un número entero.
b. Si el dividendo es múltiplo del divisor, el cociente siempre es un número entero.
c. La división de números enteros es conmutativa.
d. La división de números enteros no es asociativa.
e. Para que el cociente sea entero, basta que el dividendo sea mayor que el divisor.

Razonamiento

4. Halla el valor de x para que cada expresión sea verdadera.

a. $156 \div x = 13$
b. $x \div (-15) = 11$
c. $714 \div (-21) = x$
d. $-(21 \div 7) = x$

Resolución de problemas

5. ¿Cuál es el número entero x que dividido entre 4 da como resultado −15?

6. Un avión se aproxima a tierra perdiendo 12 000 pies de altura en 15 minutos. ¿Qué altura pierde el avión por minuto?

7. Una piscina tiene 2 056 L de agua. Si se vacía a razón de 257 L por hora, ¿cuántas horas demorará en vaciarse completamente?

Evaluación del aprendizaje

i. La familia Martínez está integrada por cuatro personas. Entre todos compraron un automóvil por un costo de $ 9 800 000, que pagarán en cuotas iguales en dos meses. ¿Cuánto dinero deberá pagar cada integrante de la familia el primer mes?

ii. Susana compró tres artículos: *A*, *B* y *C*. El artículo *C* le costó $ 53 580; el artículo *A* le costó el doble del artículo *C* dividido en 3, y el artículo *B* le costó 5 veces el precio de *C* dividido en 10. ¿Cuánto pagó por cada artículo?

9 Operaciones combinadas con números enteros

Saberes previos

Calcula el resultado de cada operación.

- $74 + 13 \cdot 6 - 12 \cdot 7$
- $[(370 + 253 - 436) \cdot 45] \div 15$

Explica el orden en que efectúas las operaciones.

Analiza

Observa cómo se resuelve la siguiente operación de dos maneras distintas.

I. $15 + 18 \div (-3)$

$= 33 \div (-3)$

$= -11$

II. $15 + 18 \div (-3)$

$= 15 + (-6)$

$= 9$

- ¿Cuál es el resultado correcto de la operación?

Conoce

9.1 Operaciones combinadas

Para resolver operaciones combinadas con números enteros, se les da prioridad a algunas operaciones con respecto a otras; es decir, existe una **jerarquía de las operaciones** que indica el orden en que estas deben ser efectuadas.

En este caso, el orden correcto en el que se debe resolver la operación presentada es: primero se realiza la división y luego la adición.

$$15 + 18 \div (-3) = 15 + (-6) = 9$$

Para efectuar **operaciones combinadas con números enteros**, se sigue este orden:

1. Se resuelven las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha.
2. Se resuelven las adiciones y sustracciones de izquierda a derecha.

Ejemplo 1

Observa el orden en el que se realizan las operaciones en cada caso.

$12 + 3 \cdot 18 - 29$

$= 12 + 54 - 29$ ← Se resuelve primero la multiplicación.

$= 66 - 29$ ← Se efectúa la adición.

$= 37$ ← Se efectúa la sustracción.

Ejemplo 2

Cuando en un polinomio aritmético hay dos o más operaciones del mismo orden, estas se efectúan según aparezcan de izquierda a derecha, como en el siguiente caso.

$(-30) \div 5 \cdot 3$

$= (-6) \cdot 3$ ← Se realiza primero la división.

$= -18$ ← Se resuelve la multiplicación.

9.2 Operaciones con signos de agrupación

Los **signos de agrupación** se emplean para indicar el orden en que deben efectuarse las operaciones combinadas. Los más utilizados son: los paréntesis ( ), los corchetes [ ] y las llaves { }.

Cuando hay **operaciones combinadas** en las que aparecen signos de agrupación, el orden para resolverlas es el siguiente:

1. Se realizan las operaciones que están dentro de los paréntesis. Si hay unos dentro de otros, se empieza por los internos.
2. Se efectúan las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha.
3. Se realizan las adiciones y sustracciones.

Ejemplo 3

Observa cómo se efectúa esta operación.

$$(15 - 6) + 3 - [(20 - 5 \cdot 2) + (5 + 24 \div 4)] - (-3)$$

$$(15 - 6) + 3 - [(20 - 5 \cdot 2) + (5 + 24 \div 4)] - (-3)$$

$= 9 + 3 - [(20 - 10) + (5 + 6)] - (-3)$ ← Se aplica la jerarquía de las operaciones en los paréntesis.

$= 9 + 3 - [10 + 11] - (-3)$ ← Se continúa con las operaciones que se encuentran entre paréntesis.

$= 9 + 3 - 21 - (-3)$ ← Se resuelven las operaciones de los corchetes.

$= 9 + 3 - 21 + 3$ ← Se eliminan los paréntesis.

$= -6$ ← Se efectúan adiciones y sustracciones.

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Calcula el resultado de cada operación.

a. $(-15) \cdot 2 - (-16) \div (-8)$

b. $(-12) + (-9) \cdot 6 \div (-2)$

c. $7 - 3 \cdot (-4) - 27 \div (-9)$

d. $(7 - 2 + 4) - (2 - 5)$

e. $(-12) \cdot 3 + 18 \div (-12 \div 6 + 8)$

f. $6 \cdot \{3 \cdot [-9 + 4(5 \cdot 3 - 9)] - 3 \cdot (40 - 8)\}$

Comunicación

2 Indica si son ciertas las siguientes igualdades.

a. $15 + 18 \div 3 = (15 + 18) \div 3$

b. $96 \div [(4 - 2) \cdot 6] = 96 \div 4 - 2 \cdot 6$

c. $7 - (12 - 9) = 7 - 12 + 9$

d. $29 + [35 \div (-5)] = 29 + 35 \div (-5)$

Razonamiento

3 Sustituye la *a* por el número entero que haga que la igualdad sea cierta.

a. $(-15) \cdot (-8 + 3) = (-15) \cdot a$

b. $12 \div 6 \cdot (-9) + (-2) \cdot 8 = a - 16$

c. $17 - (18 - 12) \div (-3) = 17 - a$

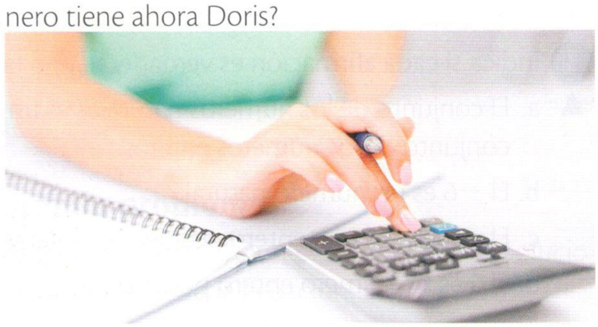
d. $6 - 4 \cdot 9 + 30 = 6 - a$

4 Obtén los números del 1 al 10 combinando la adición, la sustracción, la multiplicación y la división. Utiliza como única cifra el número 5, como se muestra en el ejemplo.

$$(-5) \div (-5) = 1$$

Evaluación del aprendizaje

i Doris recibió \$ 700 000 de sueldo el día lunes y pagó \$ 110 000 que debía. El miércoles su hermano le devolvió \$ 57 000 que le había prestado. El jueves, Doris gastó en compras el doble de lo que le devolvió su hermano el día anterior. ¿Cuánto dinero tiene ahora Doris?



ii Ubica los paréntesis donde sea preciso para obtener cada resultado.

a. $10 \cdot 100 - 100 \div 10 = 990$

b. $15 \div 5 + 3 \cdot 5 + 9 \div 3 = 21$

Practica más

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Números relativos

Ejercitación

1 Representa con números relativos las temperaturas promedio de una ciudad registradas en la Tabla 1.17 tomando como punto de referencia las temperaturas que se indican en cada literal.

L	Ma	Mi	J	V	S	D
8 °C	10 °C	13 °C	11 °C	18 °C	17 °C	22 °C

Tabla 1.17

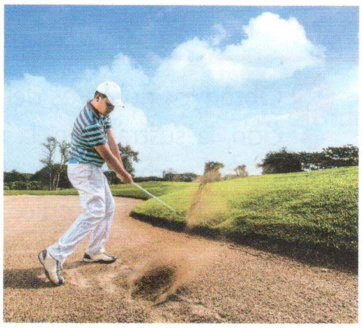
a. 12 °C b. 15 °C

Resolución de problemas

2 En el golf un *par* indica el número de golpes que un golfista debe emplear para meter la bola en un hoyo. En la Tabla 1.18 se registra la cantidad de golpes que realizan varios golfistas al enfrentarse al hoyo 5.

Golfista	Golpes
Luis	2
Juan	6
Ana	7
Jaime	1
Víctor	4
Luz	9

Tabla 1.18



Utiliza números relativos para representar cuántos golpes menos o cuántos golpes más dio cada golfista a la pelota si el hoyo es *par* cuatro.

Números enteros

Comunicación

3 Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. El conjunto de los números naturales es un subconjunto de los números enteros. ( )

b. El -6 es un número natural. ( )

c. El opuesto de un entero positivo es negativo. ( )

d. El 0 es un número entero positivo. ( )

Ejercitación

4 Representa en la recta numérica el opuesto de cada número.

$-6, 9, -1, 0, 8$

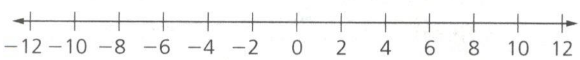


Figura 1.36

Valor absoluto. Orden en los números enteros

Razonamiento

5 Lee cada afirmación y escribe un ejemplo o un contraejemplo, según corresponda.

a. El valor absoluto de un número entero positivo es un número entero negativo.

b. Entre dos números negativos es mayor el que tiene mayor valor absoluto.

c. El opuesto de un número negativo siempre es menor que el número dado.

d. Todo número negativo es menor que 0.

Comunicación

6 Determina y escribe los números por los que se puede reemplazar cada letra para que los grupos de números queden ordenados.

a. $-15, A, -10, B, 0, C, 3$

b. $6, |A|, 0, B, -8, C$

c. $-|A|, -6, 0, 2, |B|, 5$

d. $-13, -|A|, -8, -|B|, 0, C, 2$

Operaciones con números enteros

Ejercitación

7 Calcula el resultado de cada operación.

a. $-5 + 6 - (-6) + 7 - (-8)$

b. $9 + (-6) + (-6) - (-5)$

c. $8 \cdot 2 + (-10) \cdot (-9)$

d. $(-12) \cdot (-15) - 8 \cdot (-8)$

8 Completa la Tabla 1.19.

a	b	c	a + b	c · b	a + b − c
2	4	3			
−2	−5	−8			
9	−9	4			
5	12	−7			

Tabla 1.19

Resolución de problemas

9 En un año se observó que las temperaturas promedio en la cima del monte Everest en enero y septiembre fueron de 36 °C bajo cero y -9 °C, respectivamente. ¿Cuántos grados aumentó la temperatura entre enero y septiembre en ese año?

Resolución de **problemas**

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Estrategia: Utilizar la información de una tabla

Problema

Una ciudad ha experimentado temperaturas extremas como las que se registran en la Tabla 1.20.

Año	Mínima	Máxima
2011	-2 °C	18 °C
2012	-5 °C	19 °C
2013	-4 °C	22 °C
2014	-7 °C	21 °C
2015	-3 °C	23 °C

Tabla 1.20

¿En qué año la ciudad experimentó la mayor variación en la temperatura?

1. Comprende el problema

- ¿Qué información se puede obtener de la tabla?

  R: Las temperaturas máximas y mínimas que ha experimentado la ciudad del 2011 al 2015.

- ¿Qué se debe averiguar?

  R: El año en el que se presentó la mayor variación de temperatura en la ciudad.

2. Crea un plan

- Analiza la información de la tabla y calcula la diferencia entre los números enteros correspondientes a la temperatura máxima y mínima de cada año.

3. Ejecuta el plan

- Calcula la variación de la temperatura en cada año.

Año	Variación
2011	$18 - (-2) = 18 + 2 = 20$ °C
2012	$19 - (-5) = 19 + 5 = 24$ °C
2013	$22 - (-4) = 22 + 4 = 26$ °C
2014	$21 - (-7) = 21 + 7 = 28$ °C
2015	$23 - (-3) = 23 + 3 = 26$ °C

Tabla 1.21

R: La mayor variación fue de 28 °C y se presentó en el 2014.

4. Comprueba la respuesta

- Compara las variaciones de temperatura y verifica que 28 °C > 20 °C, 28 °C > 24 °C y 28 °C > 26 °C.

Aplica la estrategia

1 La Tabla 1.22 registra los movimientos de la cuenta bancaria de Patricia entre el lunes y el miércoles.

Día	Consignación	Retiro
Lunes	$ 320 000	$ 180 000
Martes	$ 240 000	$ 570 000
Miércoles	$ 640 000	$ 450 000

Tabla 1.22

¿Cuál es el saldo de Patricia al finalizar el día miércoles?

a. Comprende el problema

....

....

b. Crea un plan

....

....

c. Ejecuta el plan

....

....

d. Comprueba la respuesta

....

....

Resuelve otros problemas

2 Ordena de menor a mayor los puntos de fusión de los elementos químicos registrados en la Tabla 1.23.

Elemento	Nitrógeno	Helio	Bromo	Fósforo	Neón
Punto de fusión (°C)	-219	-270	-7	44	-249

Tabla 1.23

Formula problemas

3 Plantea y resuelve un problema que se solucione empleando la ecuación: $x - 34 = -25$

Enriquece tu vocabulario

- Agregar el siguiente vocabulario matemático. Completa.

  Los números enteros están formados por los enteros ...., los enteros .... y el ....

Evaluación del aprendizaje

Proposiciones

Razonamiento

1 Completa la Tabla 1.24 con los números relativos que representen cada situación. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

Situación	Número relativo
Carlos perdió 17 fichas de las que le habían prestado.	
El pez está a 50 metros bajo el nivel del mar.	
Mario ganó 22 puntos en el videojuego.	
Quedan 18 segundos antes de que despegue el avión.	
El pájaro se encuentra a 358 m de altura.	

Tabla 1.24

Números enteros. Orden y operaciones

Razonamiento

2 Escribe $\in$ o $\notin$, según corresponda. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

a. -23 ☐ $\mathbb{Z}^+$ b. 9 ☐ $\mathbb{Z}^-$

c. 12 ☐ $\mathbb{Z}^+$ d. -9 ☐ $\mathbb{Z}^-$

e. -11 ☐ $\mathbb{Z}^-$ f. 4 ☐ $\mathbb{Z}^+$

g. -123 ☐ $\mathbb{Z}^+$ h. 2 ☐ $\mathbb{Z}^-$

3 Escribe la posición final de los siguientes movimientos realizados sobre una recta numérica. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

a. Inicia en -5 y se desplaza 10 unidades a la derecha: ☐

b. Inicia en 13 y se desplaza 19 unidades a la izquierda: ☐

c. Inicia en 4, se desplaza 6 unidades a la izquierda y luego 15 unidades a la derecha: ☐

d. Inicia en -21, se desplaza 32 unidades a la derecha y luego 9 unidades a la izquierda: ☐

e. Inicia en -5, se desplaza 3 unidades a la izquierda y luego 4 unidades a la derecha: ☐

Ejercitación

4 Resuelve las siguientes operaciones. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $5 + (-6) + 12 + (-5)$

b. $(-15) + 23 + (-8) + (-4)$

c. $(-1) + 3 + (-4) - (-13)$

d. $[(-13 - 14) - (-9 - 12)] + (-6)$

e. $[(19 - 20) + (14 - 15)] - [(-7 - 13) + 12]$

Razonamiento

5 Escribe números enteros que cumplan la condición que se indica en cada caso. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

a. Su valor absoluto es 12.

b. Son mayores que -2 y menores que 3.

c. Su valor absoluto es menor que 2.

d. Su valor absoluto está situado entre los opuestos de los números 3 y -2.

e. Son menores que -5 y mayores que -9.

Resolución de problemas

6 En la Tabla 1.25 se muestra la variación del nivel del agüa del embalse La Rosita en los últimos cinco meses. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Mes	1	2	3	4	5
Nivel del agua (m)	-10	19	-35	-9	7

Tabla 1.25

a. Explica el significado del número -9 en esta situación.

b. ¿Entre qué meses se presentó la mayor variación del nivel del agua?

c. Si antes de tomar las muestras del nivel del agua el embalse tenía una profundidad de 356 m, ¿cuál es el nivel del agua de la represa al final del quinto mes?

Ejercitación

7 Resuelve las siguientes operaciones con números enteros. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $8 \cdot (-6) \cdot (-7)$

b. $12 \cdot 4 \div (-2)$

c. $[(-225) \div 15] - (-85)$

d. $(-4) \cdot [(-6) \div 2]$

e. $[(-13 \cdot 14) \cdot (20 \div 10)]$

f. $[(5 \cdot 8) \div (2 \cdot 10)] \cdot [(18 \div (-6)]$

g. $\{[(-16) \cdot (-16)] \div (-8) \cdot (-8)\}$

8 Completa la Tabla 1.26. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

·	15	−16	−8	−1
−6				
4				
−12				
3				
−7				

Tabla 1.26

Resolución de problemas

9 La temperatura de una ciudad a las 9:00 a. m. era de 26 °C. Si cada hora que pasa la temperatura aumenta 3 °C, ¿cuál es la temperatura de esta ciudad a las 2:00 p. m.? SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

10 El camión de Alejandro tiene una capacidad para almacenar 300 cajas. Si en cada caja se empacan 48 bolsas y hay un total de 16 800 bolsas, ¿es posible acomodar todas las bolsas en el camión? SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

11 Un ciclista baja una peña a una velocidad de 60 metros por segundo. Si conserva la misma velocidad de descenso, ¿cuántos metros habrá descendido en 78 segundos? SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

12 Un submarino asciende hacia la superficie a una velocidad de 200 metros por minuto. Si el submarino se encuentra a 5 km de profundidad, ¿cuánto tiempo tardará en subir a la superficie? SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

13 Un estanque se desocupa a razón de 3 litros por hora. Dentro de 6 horas, ¿cuántos litros menos contendrá el estanque? SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

14 Una piscina tiene 1 380 L de agua. Si se vacía a razón de 230 L por hora, ¿cuántas horas tardará en desocuparse? SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

15 En la tienda de don Juan hay una nueva nevera. Si la temperatura desciende 4 °C cada hora una vez conectada la máquina, y la temperatura actual es de 16 °C, ¿cuál será la temperatura dentro de ocho horas? SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

16 De los 328 escalones que tiene un edificio, a Fernando le falta subir 79. ¿Cuántos escalones ha subido? SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Ejercitación

17 Realiza las operaciones y escribe el valor absoluto de cada resultado en los círculos de la Figura 1.37, de tal manera que la suma de cada lado sea 20. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

a. $9 - [(240 + 220) \cdot (19 - 19)]$

b. $29 - 20 + 14 - 19$

c. $(-25 - 17 + 40) + (35 - 16 - 20)$

d. $2 + 5 + 8 - 7 - 3$

e. $3 \cdot 4 + (6 + 5 - 13) - 12 \div 4$

f. $(-25 + 18 - 45 + 12) \div (26 - 20 + 46 - 32)$

g. $35 - 24 - 35 + 23$

h. $(2 \cdot 4 + 10) \div (6 - 3)$

i. $(2 \cdot 4 - 4) \cdot (6 - 4)$

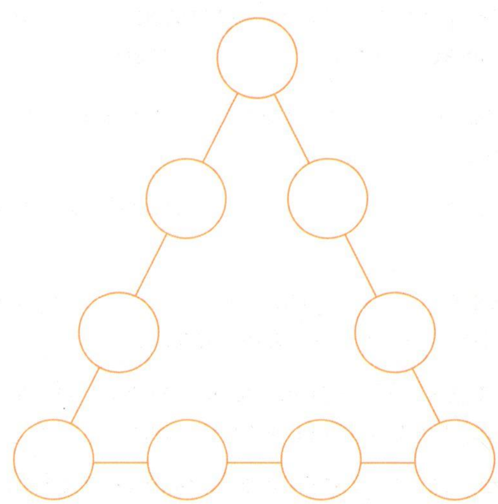


Figura 1.37

2 Números racionales

Ya sabemos

- Reconocer, representar y clasificar fracciones.

Vamos a aprender

- A construir el conjunto de los números racionales y operar con estos.

Nos sirve para

- Resolver problemas en los que se involucran fracciones y/o decimales.

1 Números racionales

Saberes previos

Simplifica cada fracción hasta obtener una fracción irreducible.

$\frac{36}{24}$ $\frac{75}{100}$ $\frac{140}{210}$

Analiza

Dos buses escolares transportan, cada uno, 24 estudiantes. En el primero, $\frac{1}{4}$ de los pasajeros son niñas y en el segundo, $\frac{3}{12}$ lo son.

- ¿Qué se puede afirmar con respecto a la cantidad de niñas que se transportan en cada bus?

Conoce

1.1 Fracciones equivalentes y fracciones irreducibles

Si en cada bus se hacen grupos de tal forma que en cada grupo haya el mismo número de estudiantes del mismo género, en el primero se pueden constituir cuatro grupos con seis estudiantes, en uno de los cuales solamente habrá niñas; entretanto, en el segundo bus se pueden hacer doce grupos con dos estudiantes y en tres de ellos habrá solo niñas, para un total de seis niñas. Por consiguiente, ambos buses transportan la misma cantidad de niñas.

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$

Figura 2.1

Se denominan **fracciones equivalentes** aquellas fracciones que representan la misma cantidad o parte del todo. En general, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y solo si $a \cdot d = b \cdot c$.

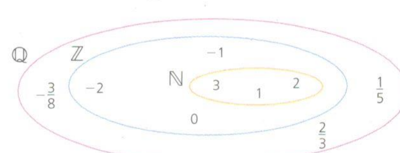
Ejemplo 1

Al simplificar la fracción $\frac{9}{27}$ se obtiene $\frac{1}{3}$, que es equivalente a la primera fracción. Es decir, $\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$.

Se denominan **fracciones irreducibles** aquellas fracciones en las que el máximo común divisor entre el numerador y el denominador es 1; o, de otra forma, aquellas que están simplificadas al máximo.

1.2 El conjunto de los números racionales

El **conjunto de los números racionales** ($\mathbb{Q}$) está formado por los números de la forma $\frac{a}{b}$, en donde a y b son números enteros y b es diferente de 0. Este conjunto contiene a los números enteros que, a su vez, contiene a los naturales, tal como se muestra en la Figura 2.2.



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Figura 2.2

Para determinar el signo de un número racional, basta con observar los signos del numerador y del denominador: si son iguales, el racional es positivo; si no lo son, el racional es negativo.

Un número racional negativo se puede escribir de diferentes formas: $\frac{-a}{b}$, $\frac{a}{-b}$ o $-\frac{a}{b}$ con a y b enteros positivos y $b \neq 0$.

Ejemplo 2

Para hallar la fracción irreducible equivalente al número racional $\frac{-30}{45}$, se determina el máximo común divisor del numerador y del denominador.

Como m. c. d. (30, 45) = 15, entonces se deduce que $\frac{-30 \div 15}{45 \div 15} = \frac{-2}{3}$.

Así, $\frac{-2}{3}$ es la fracción buscada.

Ejemplo 3

Los números racionales $\frac{4}{5}$ y $\frac{-8}{-13} = \frac{8}{13}$ son positivos, mientras que $\frac{7}{-15}$ y $\frac{-1}{3}$ son negativos. Además, $-\frac{1}{3}$ se puede escribir como $\frac{1}{-3}$ o $\frac{-1}{3}$.

Fracción irreducible

Para hallar la fracción irreducible de un número racional negativo, se halla el máximo común divisor del valor absoluto del numerador y del valor absoluto del denominador. Se dividen el numerador y el denominador por el m. c. d. y se obtiene la fracción buscada antecedida por el signo menos.

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Escribe cada expresión como un número racional.

a. El numerador es el doble del denominador, que es 4.

b. El denominador es el triple del numerador disminuido en 2. El numerador es el menor múltiplo de 5 diferente de 0.

c. El numerador es cuatro veces menor que el denominador, que corresponde al resultado de 8 · 2.

d. El denominador es la quinta parte de 25 y el numerador es el mínimo común múltiplo de 3 y 4.

e. El numerador es el cociente de dividir 8 entre 2, y su denominador es el primer múltiplo de 6 diferente de 0.

Ejercitación

2 Escribe tres números racionales equivalentes a cada racional dado.

a. $\frac{2}{5}$ b. $-\frac{1}{7}$ c. $\frac{2}{3}$ d. $\frac{9}{5}$ e. $-\frac{3}{2}$

3 Halla la fracción irreducible equivalente a cada número racional.

a. $\frac{24}{48}$ b. $-\frac{18}{9}$ c. $\frac{16}{48}$ d. $\frac{3}{9}$ e. $-\frac{12}{36}$

Razonamiento

4 Clasifica cada número racional como positivo o negativo.

a. $\frac{1}{4}$ b. $\frac{0}{-9}$ c. $\frac{3}{4}$ d. $\frac{1}{7}$ e. $\frac{-5}{6}$

Resolución de problemas

5 Un quinto de los 125 espectadores de una película salieron satisfechos. ¿Cuántos no salieron satisfechos?

Evaluación del aprendizaje

En un hospital se atienden diariamente a doce personas de la tercera edad por cada cuatro niños. ¿Cuántas personas de la tercera edad fueron atendidas en el mes, si durante ese tiempo se atendieron a 120 niños?

Educación ambiental

En Colombia se producen anualmente 11,6 millones de toneladas de residuos sólidos, de los cuales solo se reciclan $\frac{1}{6}$. ¿Qué cantidad de residuos son reciclados?

¿Cómo crees que puedes contribuir para mejorar el manejo de residuos sólidos en tu colegio y en tu casa?

2 Expresión decimal de los números racionales

Saberes previos

Efectúa las siguientes divisiones. Cuando sea posible, expresa con dos cifras decimales.

- $64 \div 5$
- $108 \div 12$
- $21 \div 2{,}5$

Analiza

Se consumieron $\frac{3}{5}$ de un litro de leche.

- ¿Cuántos litros de leche se consumieron?

Las expresiones decimales de fracciones cuyo denominador son potencias de 10 son exactas. Por ejemplo:

- $\frac{3}{10} = 0{,}3$
- $\frac{128}{100} = 1{,}28$
- $\frac{52}{1000} = 0{,}052$

Conoce

2.1 Números decimales exactos

Para responder a la pregunta se debe calcular la expresión decimal de la cantidad $\frac{3}{5}$. Así, $\frac{3}{5} = 3 \div 5 = 0{,}6$.

Por lo tanto, se consumieron 0,6 L de leche.

Se observa que en la división anterior, el residuo es 0 y el cociente tiene un número exacto de cifras decimales. Se dice que la expresión decimal 0,6 es exacta.

Una **expresión decimal** es **exacta** si tiene un número limitado de cifras decimales.

2.2 Expresión decimal periódica pura

Una **expresión decimal** es **periódica pura** si la parte decimal está formada por un grupo de cifras que se repite indefinidamente. Ese grupo se llama **periodo**.

Ejemplo 1

¿Cuál es el número decimal equivalente al número racional $-\frac{3}{11}$?

$$-\frac{3}{11} = -(3 \div 11) = -0{,}272727...$$

El número es $-0{,}272727...$ y se puede escribir $-0{,}\overset{\frown}{27}$.

En esta división, el residuo nunca es cero, y la expresión decimal tiene dos cifras que se repiten indefinidamente.

2.3 Expresión decimal periódica mixta

Una **expresión decimal** es **periódica mixta** si la parte decimal está formada por un grupo de cifras que no se repite y un grupo de cifras que se repite indefinidamente.

El grupo de cifras que no se repite delante del periodo se llama **anteperiodo**.

Ejemplo 2

¿Cuál es el número decimal equivalente al número racional $\frac{5}{12}$?

$$\frac{5}{12} = 5 \div 12 = 0{,}416666...$$

El número es $0{,}416666...$ y se puede escribir $0{,}41\overset{\frown}{6}$.

En esta división, el residuo nunca es cero, y la expresión decimal tiene dos cifras que no se repiten y una cifra que se repite indefinidamente. En este caso 41 es el anteperiodo y 6 es el periodo.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 5

Para cocinar una torta, María utilizará estos ingredientes:

a. Harina: $\frac{3}{4}$ de kilo
b. Sal: $\frac{4}{10}$ de kilo
c. Mantequilla: $\frac{1}{8}$ de kilo
d. Azúcar: $\frac{1}{5}$ de kilo

Figura 2.3

Si se toma la fracción que indica la cantidad de cada ingrediente y se efectúa la división que corresponde para hallar su expresión decimal se tiene que:

a. Harina: $\frac{3}{4}$ de kilo $= 3 \div 4 = 0{,}75$ kilos

b. Sal: $\frac{4}{10}$ de kilo $= 4 \div 10 = 0{,}4$ kilos

c. Mantequilla: $\frac{1}{8}$ de kilo $= 1 \div 8 = 0{,}125$ kilos

d. Azúcar: $\frac{1}{5}$ de kilo $= 1 \div 5 = 0{,}2$ kilos

Así, la harina está en la última bolsa, la sal en la tercera, la mantequilla en la primera y el azúcar en la segunda.

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Escribe la expresión decimal correspondiente a cada uno de los siguientes números racionales.

a. $\frac{13}{5}$ b. $-\frac{13}{5}$ c. $\frac{5}{11}$

d. $-\frac{8}{12}$ e. $-\frac{63}{7}$ f. $\frac{11}{9}$

Resolución de problemas

2 En la Figura 2.4 se muestran las dimensiones de un terreno para el pastoreo.

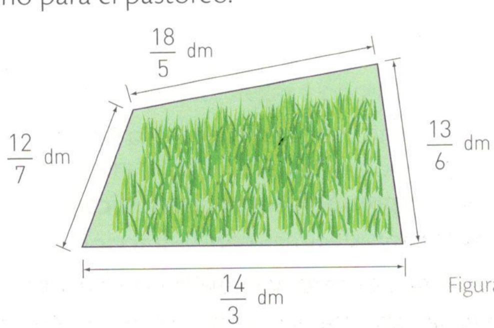


Figura 2.4

¿Cuáles de las medidas tienen expresiones decimales finitas y cuáles infinitas?

Evaluación del aprendizaje

i Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. La expresión decimal de $\frac{150}{10}$ es 1,5. ( )

b. $-3{,}45$ es la expresión decimal de $-\frac{345}{100}$. ( )

c. $-\frac{32}{100}$ es equivalente a $-3{,}2$. ( )

d. 45,6 es la expresión decimal de $\frac{456}{10}$. ( )

ii Relaciona cada fracción con su expresión decimal.

a. $\frac{1}{4}$	2
b. $\frac{8}{4}$	$0{,}1\widehat{6}$
c. $\frac{1}{6}$	0,25

3 Fracción correspondiente a una expresión decimal

Saberes previos

Encuentra la expresión decimal de cada número.

$\frac{30}{24}$ $\frac{40}{72}$ $\frac{144}{540}$

Analiza

La cantidad 4,37 es una expresión decimal exacta.

- ¿Cuál es su fracción generatriz?

Conoce

3.1 Fracción generatriz de una expresión decimal exacta

En este caso, para encontrar la fracción generatriz, se puede proceder como sigue:

$$4{,}37 = 4{,}37 \cdot \frac{100}{100} = \frac{437}{100}$$

La fracción $\frac{437}{100}$ se llama fracción generatriz de la expresión decimal 4,37.

La **fracción generatriz de una expresión decimal exacta** tiene:

- Por numerador la parte entera seguida de la parte decimal sin la coma.
- Por denominador el número formado por 1 seguido de tantos ceros como cifras tenga la parte decimal del número.

Ejemplo 1

Para determinar la fracción generatriz de la expresión decimal exacta −5,218, se puede hacer lo siguiente: se halla la fracción generatriz de la expresión decimal exacta sin el signo, y al resultado se le antepone el signo menos

$$-5{,}218 = -\left(\frac{5\,218}{1\,000}\right) = -\frac{2\,609}{500} \quad \text{Fracción generatriz}$$

3.2 Fracción generatriz de una expresión periódica pura

Para entender la estrategia que permite determinar la fracción generatriz de una expresión periódica pura, se puede comenzar por ver lo sugerido en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2

Para calcular la fracción generatriz de la expresión decimal periódica pura $0{,}\overparen{35}$, se pueden seguir estos pasos:

1.º Se llama x al número: $x = 0{,}353535\ldots$

2.º Se multiplica por una potencia de 10 con tantos ceros como cifras tenga el periodo: $100 \cdot x = 35{,}353535\ldots$

3.º Se sustraen las dos igualdades anteriores: $99 \cdot x = 35$

4.º Se despeja x: $x = \frac{35}{99}$

Con la práctica de este procedimiento, se puede llegar a la siguiente conclusión.

La **fracción generatriz de una expresión decimal periódica pura** es la suma de la parte entera de la expresión decimal con la fracción que tiene por numerador el periodo y por denominador un número formado por tantos nueves como cifras tenga la parte decimal.

La conclusión anterior se puede resumir en el esquema que se presenta a continuación.

Cálculo de la fracción generatriz de una expresión periódica pura

$$\text{Parte entera} + \frac{\text{periodo}}{\underbrace{9...9}_{\substack{\text{Tantos nueves como} \\ \text{cifras tenga el periodo}}}}$$

Ejemplo 3

Se quiere calcular la fracción generatriz de la expresión decimal periódica pura 2,151515… Dado que el periodo es 15, entonces:

$$2{,}151515... = 2 + 0{,}1515\overset{\frown}{15}... = 2 + \frac{15}{99} = 2 + \frac{5}{33} = \frac{71}{33}$$

Luego, la fracción generatriz de 2,15 es $\frac{71}{33}$.

3.3 Fracción generatriz de una expresión periódica mixta

Antes de abordar el procedimiento para determinar la fracción generatriz de una expresión periódica mixta, podemos analizar el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4

Para hallar la fracción generatriz de la expresión decimal periódica mixta 0,2414141…, se pueden seguir estos pasos:

1.º Se llama x al número: $x = 0{,}2414141...$

2.º Se multiplica por una potencia de 10 con tantos ceros como cifras tenga el anteperíodo: $10 \cdot x = 2{,}414141...$

3.º Se multiplica por una potencia de 10 con tantos ceros como cifras tenga el periodo: $1000 \cdot x = 241{,}414141$

4.º Se sustraen las igualdades de los pasos 3 y 2: $990 \cdot x = 239$

5.º Se despeja x: $x = \frac{239}{990}$

Este procedimiento, permite llegar a obtener esta conclusión.

La **fracción generatriz de una expresión decimal periódica mixta** es la suma de la parte entera con la fracción que tiene por numerador el número formado por el anteperiodo seguido del periodo, menos el anteperiodo. Y por denominador el número formado por tantos nueves como cifras tenga el periodo, seguido de tantos ceros como cifras tenga el anteperiodo.

3 Fracción correspondiente a una expresión decimal

El procedimiento descrito anteriormente se puede resumir así:

Fracción generatriz de un número decimal periódico mixto

$$\text{Parte entera} + \frac{\text{Anteperiodo periodo} - \text{Anteperiodo}}{\underbrace{9...9}_{\text{Tantos nueves como cifras tenga el periodo.}}\;\underbrace{0...0}_{\text{Tantos ceros como cifras tenga el anteperiodo.}}}$$

Ejemplo 5

Calcula la fracción generatriz de 3,8222…

Es periódico mixto con anteperiodo 8 y periodo 2.

$$3{,}8222... = 3 + 0{,}82222... = 3 + \frac{82 - 8}{90} = 3 + \frac{74}{90} = 3 + \frac{37}{45} = \frac{172}{45}$$

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Calcula la fracción generatriz de estas expresiones decimales exactas.

a. 4,72 b. 37,5
c. 15,2 d. 0,03
e. 0,253 f. 7,585
g. 7,9 h. 0,9
i. 1,0005 j. 9,25

2 Expresa los siguientes números decimales en forma de fracción.

a. $1{,}75 = \frac{\square}{\square}$ b. $2{,}83 = \frac{\square}{\square}$ c. $4{,}25 = \frac{\square}{\square}$
d. $10{,}48 = \frac{\square}{\square}$ e. $15{,}5 = \frac{\square}{\square}$ f. $23{,}9 = \frac{\square}{\square}$

Ejercitación

3 Halla la fracción generatriz de cada número decimal.

a. −0,8 b. −0,26
c. −0,04 d. −0,125
e. −1,5 f. −3,25
g. −1,452 h. −3,001

4 Calcula la fracción generatriz de los siguientes números decimales.

a. 0,77 b. 0,04
c. 0,77… d. 0,044044044…
e. 0,1 f. 0,9
g. 0,111… h. 0,9…
i. 0,010101... j. 0,909
k. 10,11777777… l. 2,101101101…

Comunicación

5 Calcula la fracción generatriz y simplifica si es posible.

a. −21,005 b. 3,121212…
c. 2,075323232… d. −14,11777777…
e. 2,11111111… f. 0,66
g. −0,323232… h. 1,3333…
i. 2,00222… j. −0,030303…
k. 1,18 l. −0,2223131…
m. −4,01555… n. −7,02525...

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Comunicación

6 Relaciona cada expresión decimal con su fracción generatriz.

a. $0,\overset{\frown}{7}$	( ) $-\frac{23}{11}$
b. $0,\overset{\frown}{45}$	( ) $\frac{40}{33}$
c. $3,\overset{\frown}{3}$	( ) $-\frac{13}{9}$
d. $-1,\overset{\frown}{4}$	( ) $\frac{10}{3}$
e. $-2,\overset{\frown}{09}$	( ) $\frac{7}{9}$
f. $1,\overset{\frown}{21}$	( ) $\frac{5}{11}$
g. $1,\overset{\frown}{6}$	( ) $\frac{19}{9}$
h. $0,\overset{\frown}{27}$	( ) $\frac{25}{90}$
i. $2,\overset{\frown}{1}$	( ) $\frac{15}{9}$

7 Indica si las afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).

a. La fracción generatriz de $3,8\overset{\frown}{2}$ es $\frac{172}{45}$. ( )

b. $\frac{254}{1\,125}$ es la fracción generatriz de $0,22\overset{\frown}{57}$. ( )

c. El número $0,0\overset{\frown}{4}$ tiene por fracción generatriz $\frac{44}{990}$. ( )

d. La fracción generatriz de $4,\overset{\frown}{6}$ es $\frac{1\,541}{330}$. ( )

e. $\frac{545}{30}$ es la fracción generatriz de $18,1\overset{\frown}{6}$. ( )

8 Completa.

a. $2,5 = \frac{25}{\square}$

b. $0,2525... = \frac{25}{\square}$

c. $0,001222... = \frac{\square}{\square}$

d. $3,303131... = \frac{\square}{\square}$

9 ¿Qué número es mayor 0,25 o $0,\overset{\frown}{25}$? Razona la respuesta.

10 Expresa con fracciones la diferencia que hay entre $\overset{\frown}{1,7}$ y 1,7.

11 Realiza 7,2 ÷ 11 y expresa el resultado con una fracción.

Modelación

12 Expresa con una fracción el resultado de la operación $\frac{4}{9} - 0,0111...$

13 Escribe la fracción que genera un número decimal cuya parte entera es nula, el anteperiodo son dos ceros y el periodo de dicho número es 15.

14 Un listón de madera mide 155,38 cm. Expresa su medida en forma de fracción.

Evaluación del aprendizaje

Observa la Figura 2.5.

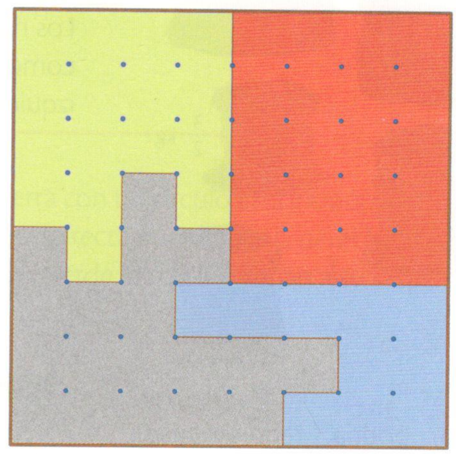


Figura 2.5

Copia la Tabla 2.1. Luego, complétala con estas cantidades, según corresponda.

0,28125 — $\frac{9}{32}$

0,3125 — $\frac{5}{16}$

0,15625 — $\frac{1}{4}$

0,25 — $\frac{5}{32}$

Color	Verde	Gris	Rojo	Azul
Expresión decimal				
Fracción				

Tabla 2.1

4 Números racionales en la recta numérica

Saberes previos

Representa sobre una misma recta numérica los números -3, -6, -4, 0, -1 y 5. Con respecto al 0, ¿dónde quedan ubicados los números positivos? ¿Y los negativos?

Analiza

En la Figura 2.6 se observa el peso de cinco bultos.

Figura 2.6

- ¿Cómo podría representarse en la recta numérica el peso de cada bulto?

Conoce

Para representar el peso de cada bulto en la recta numérica, primero se debe expresar cada peso en fracciones con el mismo denominador.

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{8} \qquad \frac{3}{2} = \frac{12}{8} \qquad \frac{13}{4} = \frac{26}{8} \qquad \frac{21}{4} = \frac{42}{8} \qquad \frac{26}{4} = \frac{52}{8}$$

Posteriormente, se divide cada unidad de la recta según lo que indica el denominador (ocho partes iguales) y se toman tantas partes como indique el numerador. La representación de los pesos en la recta numérica se observa en la Figura 2.7.

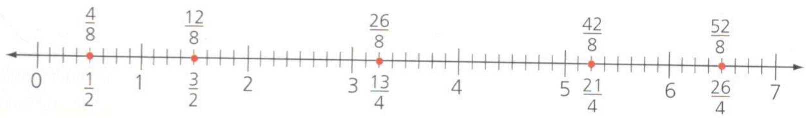


Figura 2.7

Los números racionales se ubican en la **recta numérica** tanto a la izquierda como a la derecha del 0. A la derecha se hallan los racionales positivos y a la izquierda los racionales negativos.

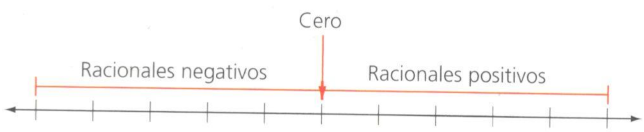


Figura 2.8

Ejemplo 1

Si se divide en dos partes iguales cada segmento unidad en la recta numérica, se pueden representar los números racionales cuya representación fraccionaria tenga como denominador 2. En la recta numérica de la Figura 2.9 se observa la representación de los números racionales $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{2}$, $-\frac{1}{2}$ y $-\frac{5}{2}$.

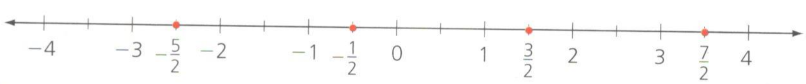


Figura 2.9

Ejemplo 2

Para representar los racionales $(0,\widehat{7}$; $2,2\widehat{6}$; $-1,\widehat{285714}$ y $-3,4$, se pueden hallar sus fracciones generatrices $\frac{7}{9}$, $\frac{34}{15}$, $-\frac{9}{7}$ y $-\frac{17}{5}$ respectivamente, y ubicar cada punto sobre la recta (Figura 2.10).

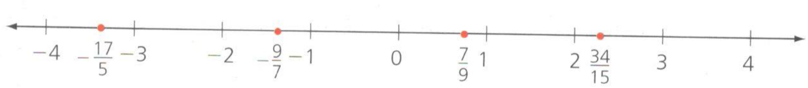


Figura 2.10

Ejemplo 3

Ubica cada uno de los siguientes números sobre una recta numérica.

a. $\frac{2}{1}$ b. $\frac{1}{2}$ c. $1\frac{1}{4}$ d. $-\frac{1}{4}$ e. $-\left(1\frac{1}{4}\right)$

Conviene expresarlos respectivamente mediante una fracción cuyo denominador sea el mínimo común múltiplo de los denominadores, así:

a. $\frac{8}{4}$ b. $\frac{2}{4}$ c. $\frac{5}{4}$ d. $-\frac{1}{4}$ e. $-\frac{5}{4}$

Luego, se ubican los puntos correspondientes a cada número racional tal como se muestra en la Figura 2.11.

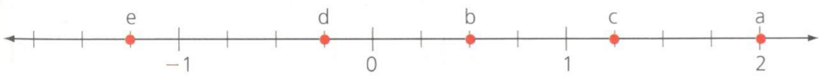


Figura 2.11

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Representa en la recta numérica cada número racional.

a. $\frac{3}{5}$ b. $-\frac{4}{2}$ c. $-\frac{6}{4}$

d. $\frac{7}{3}$ e. $\frac{2}{8}$ f. $-\frac{3}{7}$

Razonamiento

2 Califica cada afirmación como verdadera (V) o falsa (F).

a. El número racional $-\frac{11}{3}$ se ubica en la recta entre -3 y -4.

b. En la recta, el número racional $\frac{27}{9}$ coincide con el número 3.

c. El número mixto $8\frac{4}{7}$ se ubica en la recta entre 8 y 9.

d. El número racional $-\frac{13}{5}$ se ubica en la recta a la derecha de -2.

e. En la recta, el número racional $\frac{24}{6}$ coincide con el número -4.

f. En la recta, el número racional $\frac{8}{2}$ coincide con el número 5.

g. Existen infinitos números racionales entre 0 y 1.

3 Encierra con un círculo azul los números que se ubican en la recta numérica a la derecha del 0, y con un círculo verde los que se sitúan a su izquierda.

a. $-\frac{13}{10}$ b. $\frac{5}{10}$ c. $\frac{3}{9}$

d. $-\frac{9}{3}$ e. $-\frac{7}{35}$ f. $\frac{23}{7}$

Evaluación del aprendizaje

Para facilitar la ubicación de las pesas del laboratorio, se ha decidido organizarlas de la más pesada a la más liviana.

Figura 2.12

a. Representa en una recta numérica los pesos indicados en la Figura 2.12.

b. Escribe la expresión decimal correspondiente a cada uno de los pesos.

c. Expresa en gramos cada uno de los pesos.

5 Sistema de coordenadas cartesianas

Pensamiento numérico

Saberes previos

Escribe las coordenadas de los puntos A, B, C, D y E que se observan en la Figura 2.13.

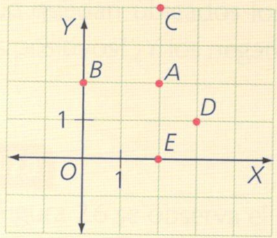


Figura 2.13

Analiza

Gabriela debe representar, en un sistema de coordenadas cartesianas, un polígono cuyos vértices son los puntos $M(6, -3)$, $N(-1, -5)$, $P(-5, 0)$, $Q(-3, 4)$ y $R(0, 6)$.

- ¿Qué polígono representará Gabriela?

Conoce

5.1 Puntos en el plano con coordenadas enteras

En primer lugar, Gabriela debe trabajar en un **sistema de coordenadas cartesianas**. Es decir, debe dibujar dos ejes X y Y, perpendiculares en el punto O, que dividan el plano en cuadro cuadrantes; luego, debe escribir las escalas adecuadas en los ejes y localizar las coordenadas de cada punto. Finalmente, debe unir con segmentos los vértices de la figura.

Para ubicar en el plano un punto con coordenadas enteras, la primera de sus coordenadas se mide sobre el eje horizontal y se llama **abscisa** del punto. La segunda se mide sobre el eje vertical y se llama **ordenada** del punto.

En este caso, Gabriela obtiene el pentágono que se observa en la Figura 2.14.

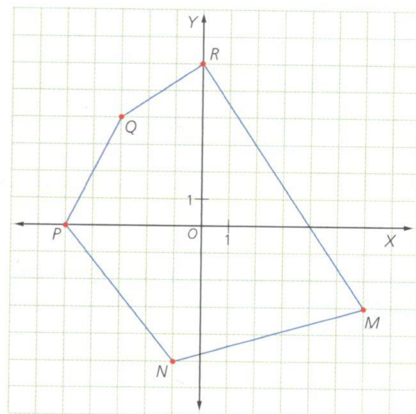


Figura 2.14

En el plano cartesiano, el eje horizontal se llama **eje de las abscisas.**

El eje vertical se llama **eje de las ordenadas.**

El punto de corte de los dos ejes se llama **origen de coordenadas.**

5.2 Simetría de dos puntos

La simetría de dos puntos en el plano cartesiano se puede dar de tres maneras: respecto al origen O de coordenadas, respecto al eje Y y respecto al eje X.

Respecto al origen de coordenadas. El simétrico del punto $P(x, y)$ es el punto $Q(-x, -y)$.

Respecto al eje Y. El simétrico del punto $R(x, y)$ con respecto al eje Y es el punto $S(-x, y)$. Estos puntos tienen las mismas ordenadas, pero las abscisas son números opuestos.

Respecto al eje X. El punto $T(x, y)$ es simétrico con respecto al eje X con el punto $Z(x, -y)$. T y Z tienen la misma abscisa, pero las ordenadas son números opuestos.

Ejemplo 1

En la Figura 2.15 se observa que:

- El punto simétrico a $P(5, 2)$ con respecto al origen de coordenadas es $Q(-5, -2)$.
- El punto simétrico a $P(5, 2)$ con respecto al eje de abscisas es $R(5, -2)$.
- El punto simétrico a $P(5, 2)$ con respecto al eje de ordenadas es $S(-5, 2)$.

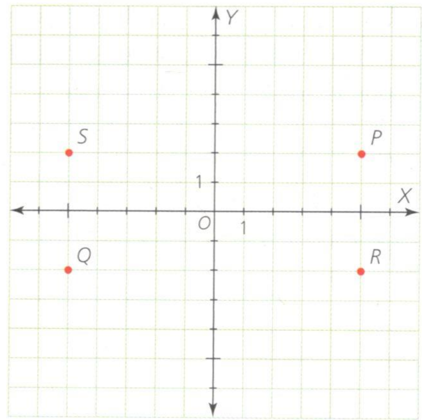


Figura 2.15

5.2 Puntos en el plano con coordenadas racionales

Una **pareja ordenada de números racionales** (x, y) es aquella que tiene como coordenadas x y y números racionales.

Para representar en el plano parejas ordenadas con números racionales expresados como fracción, se deben realizar procedimientos similares a los utilizados para representar números racionales en la recta numérica.

Ejemplo 2

Para representar el punto $A\left(\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}\right)$ en el plano cartesiano, se ubica la primera componente en la parte positiva del eje X y la segunda en la parte negativa del eje Y; al trazar la perpendicular de los ejes coordenados desde esos puntos, se encuentra su intersección donde se ubica el punto A. En el par ordenado $B\left(-\frac{7}{6}, -\frac{1}{2}\right)$ se puede observar que el valor de x es negativo y el de y también, por lo que ese punto se localiza en el tercer cuadrante. El punto $C\left(-\frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right)$ se ubica en el segundo cuadrante; y el $D\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$, en el primer cuadrante.

La Figura 2.16 muestra la representación de los puntos A, B, C y D.

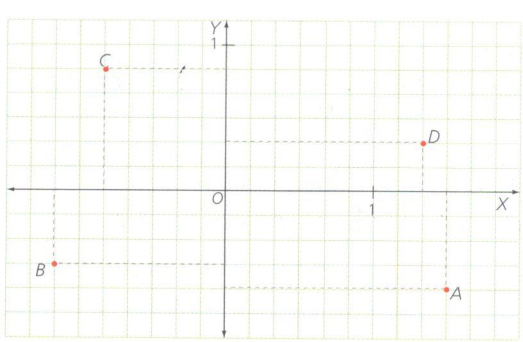


Figura 2.16

5 Sistema de coordenadas cartesianas

Ejemplo3

En la Figura 2.17 se observa que las coordenadas de los puntos representados en el plano, son:

$A\left(0, \frac{1}{3}\right)$ $B\left(\frac{1}{4}, \frac{7}{8}\right)$

$C\left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right)$ $D\left(-\frac{5}{8}, 1\right)$

$E\left(-1, -\frac{3}{4}\right)$

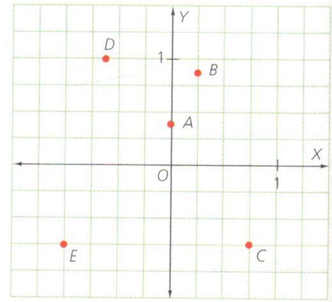


Figura 2.17

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Representa en el plano cartesiano las coordenadas de los siguientes puntos.

$A\,(3, 2)$ $B\,(5, 3)$ $C\,(3, 1)$ $I\,(-4, 7)$

$H\,(0, 2)$ $K\,(3, 0)$ $L\,(0, 0)$ $N\,(0, -3)$

$D\,(1, 1)$ $J\,(6, 1)$ $M\,(8, 5)$ $E\,(-4, 0)$

Comunicación

2 Escribe las coordenadas de los puntos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* y *H* que aparecen en la Figura 2.18.

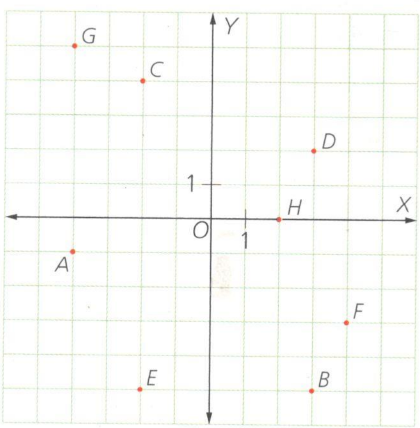


Figura 2.18

3 Ubica en el plano cartesiano cada par de puntos y determina las coordenadas del punto medio entre los dos.

a. $(2, 4)$ y $(2, 10)$ b. $(6, 3)$ y $(2, 3)$

4 Indica el cuadrante donde se ubica cada uno de los puntos cuyas coordenadas son:

$A(-7, -4)$, $B(6, -2)$, $C(-2, 1)$, $D(2, 5)$ y $E(-4, 6)$

5 Lee y resuelve.

En la Figura 2.19 los puntos $A(3, 2)$ y $B(-3, 2)$ corresponden a puntos simétricos respecto al eje *Y*; ambos puntos tienen la misma ordenada, y la abscisa del punto *A* es el opuesto de la abscisa del punto *B*.
Los puntos $B(-3, 2)$ y $C(-3, -2)$ son simétricos respecto al eje *X*; ambos puntos tienen la misma abscisa, y la ordenada de uno es el opuesto de la ordenada del otro.
Los puntos $C(-3, -2)$ y $A(3, 2)$ son simétricos respecto al origen. La abscisa del punto *C* es el opuesto de la abscisa del punto *A*, y la ordenada del punto *C* es el opuesto de la ordenada del punto *A*.

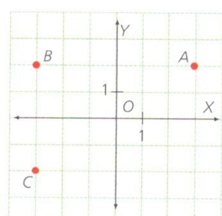


Figura 2.19

Halla las coordenadas del punto simétrico al punto dado, respecto a cada eje y al origen.

a. $M(-2, -1)$ b. $N(3, 0)$ c. $E(0, 4)$

6 Escribe las coordenadas de un punto *B* que tenga como abscisa el doble de la del punto $A(-3, 6)$ y esté sobre el eje de abscisas.

Resolución de problemas

7 ¿Qué valor debe tomar *k* para que el punto $A(2, 3k - 12)$ esté sobre el eje *X*?

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Comunicación

8 Observa la Figura 2.20 y responde.

a. Si el triángulo *ABC* se gira 90°, alrededor del punto B, en el sentido de las manecillas del reloj, ¿cuáles son las nuevas coordenadas de sus vértices?

b. Nombra las coordenadas de los puntos *B* y *C* si el triángulo *ABC* se traslada tres unidades a la izquierda y dos hacia arriba.

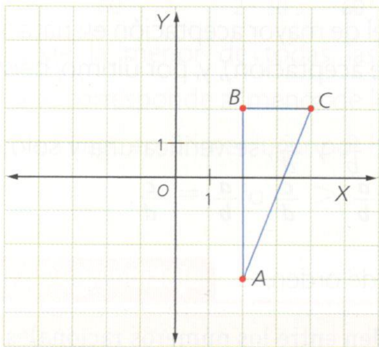


Figura 2.20

9 Observa la Figura 2.21 y responde:

a. En el eje *X*, ¿qué coordenadas indican los extremos del diámetro?

b. Si la circunferencia se moviera tres unidades a la izquierda y dos hacia abajo, ¿cuáles serían las coordenadas de su centro?

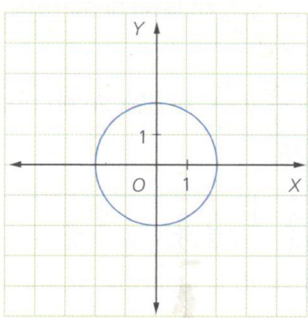


Figura 2.21

Modelación

10 Representa los siguientes puntos sobre un mismo plano cartesiano.

$A\left(0, \frac{9}{2}\right)$ $B\left(-\frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right)$

$D\left(-\frac{5}{8}, 1\right)$ $E\left(2, -\frac{3}{4}\right)$

$G\left(-3, -\frac{11}{2}\right)$ $H\left(-\frac{15}{2}, 0\right)$

11 Escribe las coordenadas de los vértices del triángulo de la Figura 2.22.

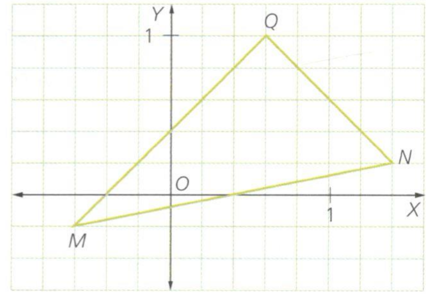


Figura 2.22

12 En el plano de la Figura 2.23 se trazó un polígono cuyos vértices son los puntos *M*, *N*, *P*, *Q* y *R*.

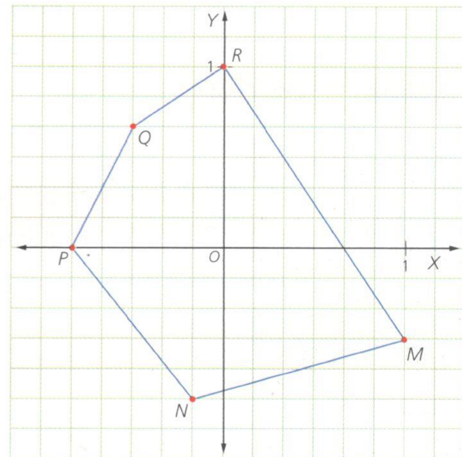


Figura 2.23

Determina las coordenadas de cada uno de los vértices del polígono.

Evaluación del aprendizaje

Responde las preguntas a partir de la información provista en la Figura 2.24.

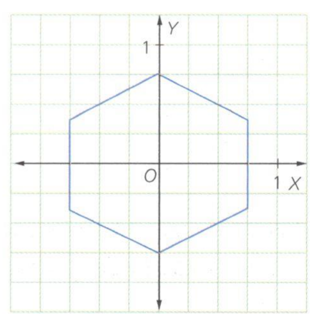


Figura 2.24

a. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del hexágono?

b. ¿Cuáles serían las coordenadas de los vértices, si el hexágono se traslada dos unidades a la derecha?

6 Relación de orden en los números racionales

Saberes previos

Ordena de mayor a menor los números $-4, 5, -1, 3, 2$ y -2. Explica el criterio que utilizaste.

Analiza

El profesor Camilo preguntó a sus 32 estudiantes acerca de su deporte favorito y anotó la fracción de los que eligieron cada deporte en la Tabla 2.2.

Deporte	Fracción
Fútbol	$\frac{4}{16}$
Natación	$\frac{3}{8}$
Tenis	$\frac{1}{4}$
Béisbol	$\frac{4}{32}$

Tabla 2.2

- ¿Cuál es el orden de los deportes según su popularidad?

Conoce

Para responder la pregunta, se puede construir una recta numérica como la de la Figura 2.25 y ubicar en ella cada fracción. El orden de mayor a menor preferencia corresponde a las fracciones ubicadas de derecha a izquierda.

Figura 2.25

El orden de los deportes desde el de mayor aceptación es: natación, luego tenis y fútbol (con el mismo grado de aceptación), y, por último, béisbol.

Dados los números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, se verifica una y solo una de las siguientes relaciones: $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ o $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

La Tabla 2.3 muestra la relación de orden.

Relaciones de orden entre los números racionales	
Representación en la recta numérica	**Relación de orden**
$\frac{a}{b}$ ——— $\frac{c}{d}$	$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, porque $\frac{a}{b}$ está a la izquierda de $\frac{c}{d}$ en la recta numérica.
$\frac{c}{d}$ / $\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, porque les corresponde el mismo punto en la recta numérica.
$\frac{c}{d}$ ——— $\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, porque $\frac{a}{b}$ está a la derecha de $\frac{c}{d}$ en la recta numérica.

Tabla 2.3

Ejemplo 2

Para ordenar los números $\frac{5}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}$ y $\frac{9}{4}$, se ubican en una recta numérica como se muestra en la Figura 2.26.

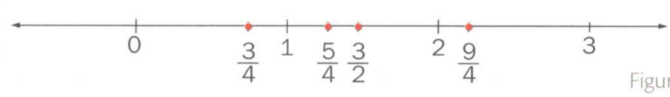


Figura 2.26

Luego, $\frac{3}{4} < \frac{5}{4} < \frac{3}{2} < \frac{9}{4}$

Ejemplo 2

Para comparar los números $-\frac{3}{10}$ y $-\frac{1}{9}$, se pueden seguir estos pasos:

- Se encuentra el mínimo común múltiplo de los denominadores; esto es, 90.
- Se amplifican las fracciones para expresarlas con denominador 90.

$$-\frac{3}{10} = \frac{-3\cdot 9}{10\cdot 9} = \frac{-27}{90} \text{ y } \frac{-1}{9} = \frac{-1\cdot 10}{9\cdot 10} = \frac{-10}{90}$$

$$\frac{-10}{90} > \frac{-27}{90}\text{, porque } -10 > -27$$

Entonces, $-\frac{10}{90} > -\frac{27}{90} \Rightarrow -\frac{1}{9} > -\frac{3}{10}$.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 3

En una competencia de patinaje, los tres competidores que se disputaban el paso a la final registraron los siguientes tiempos: Juan $\frac{3}{4}$ de hora, Camilo $\frac{1}{2}$ de hora y Fernando $\frac{8}{15}$ de hora. Para saber quién llegó en primer lugar, se amplifican las fracciones correspondientes a los tiempos de los competidores para obtener fracciones homogéneas cuyo mínimo común múltiplo de los denominadores sea 60.

Así, $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 15}{4 \cdot 15} = \frac{45}{60}$; $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 30}{2 \cdot 30} = \frac{30}{60}$; $\frac{8}{15} = \frac{8 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{32}{60}$.

Luego, se escoge la menor de todas las fracciones obtenidas, que es $\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$, ya que corresponde al menor de los tiempos. De esta forma, Camilo fue quien llegó en primer lugar por haber gastado el menor tiempo.

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Escribe $>$, $<$ o $=$, según corresponda.

a. $\frac{7}{5} \; \square \; \frac{8}{3}$ b. $\frac{5}{4} \; \square \; \frac{10}{8}$

c. $2\frac{3}{2} \; \square \; 2\frac{7}{4}$ d. $\frac{1}{3} \; \square \; 2\frac{1}{3}$

2 Ordena de menor a mayor los números racionales de cada lista.

a. $\frac{3}{5}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$

b. $2\frac{5}{6}, \frac{13}{10}, 2\frac{1}{5}, \frac{10}{10}$

c. $\frac{22}{42}, -\frac{4}{14}, -\frac{8}{30}, \frac{14}{18}$

Razonamiento

3 Escribe un número natural en cada espacio vacío, de tal forma que se satisfaga la desigualdad correspondiente.

a. $2\frac{1}{4} < 2\frac{6}{\square}$ b. $\frac{\square}{5} < \frac{4}{10}$

c. $\frac{3}{\square} > \frac{1}{2}$ d. $2\frac{2}{4} > \frac{\square}{5}$

Ejercitación

4 Ordena de menor a mayor cada grupo de números.

a. 0,5; $-0,5$; 1,75; 4,55; 4,5; $4,\widehat{5}$; 0

b. 1,2; $1,\widehat{2}$; 1,07; 1,7; 3,3; $-5,6$

c. $\frac{3}{5}$; $0,\widehat{6}$; $0,\widehat{63}$; $-0,\widehat{6}$; $-0,\widehat{66}$

Evaluación del aprendizaje

Observa la información de la Tabla 2.4.

Alimento	Cantidad aproximada de calorías
Papas fritas	$\frac{127}{450}$
Gaseosa	$\frac{230}{550}$
Porción de pizza	$\frac{30}{75}$
Hamburguesa	$\frac{120}{80}$

Tabla 2.4

¿Qué combinación tiene menos calorías, la gaseosa y las papas fritas o la gaseosa y la porción de pizza?

Estilos de vida saludable

Manuel y Jorge trabajan todo el día frente al computador. Manuel acostumbra a emplear $\frac{2}{32}$ de su jornada laboral para realizar pausas activas, mientras que Jorge dedica $\frac{1}{48}$ para ello. ¿Cuál de los dos crees que está cuidando mejor su salud? ¿Por qué?

7 Adición de números racionales

Saberes previos

Calcula.

- m.c.m. (24, 60)
- m.c.m. (6, 10, 15)
- m.c.m. (8, 12, 24)

Analiza

Las boletas para un partido de fútbol se vendieron así:

$\frac{5}{9}$ para los hinchas del equipo rojo, $\frac{3}{9}$ para los hinchas del equipo azul y $\frac{1}{9}$ para los hinchas de otros equipos.

- ¿Qué parte del estadio estuvo ocupada durante el partido?

Conoce

7.1 Adición de números racionales en expresión fraccionaria

Para saber qué parte del estadio estuvo ocupada, se puede hacer uso de una recta numérica como la de la Figura 2.27. Primero, se divide la unidad en nueve partes iguales; luego, se ubica el punto que corresponde a $\frac{5}{9}$; a partir de este punto se cuentan $\frac{3}{9}$ más y se llega a $\frac{8}{9}$. Por último, a partir de $\frac{8}{9}$ se avanza $\frac{1}{9}$ más y se llega a 1.

Como $\frac{9}{9}$ corresponde a la ocupación total, significa que los hinchas de los tres equipos ocuparon todo el estadio.

Figura 2.27

Para **sumar dos números racionales con el mismo denominador**, se suman los numeradores y se mantiene el mismo denominador.

Ejemplo 1

Para calcular $\frac{1}{5} + \frac{6}{5}$ se procede así:

1. Se suman los numeradores y el resultado es el numerador de la fracción suma.

$$\frac{1}{5} + \frac{6}{5} = \frac{1+6}{\square} = \frac{7}{\square}$$

2. Se deja el mismo denominador, que será el denominador de la fracción suma.

$$\frac{1}{5} + \frac{6}{5} = \frac{1+6}{5} = \frac{7}{5}$$

Para **sumar dos números racionales con diferente denominador**, se buscan fracciones equivalentes a los números racionales dados, que tengan el mismo denominador; luego se adicionan las fracciones equivalentes obtenidas.

Ejemplo 2

Para resolver la suma $\left(-\frac{2}{8}\right) + \frac{1}{3}$, se sigue este procedimiento:

1. Se hallan racionales equivalentes a los dados con un mínimo común múltiplo de los denominadores, que en este caso es 24.

$$-\frac{2}{8} = -\frac{2 \cdot 3}{8 \cdot 3} = -\frac{6}{24} \quad \text{y} \quad \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{8}{24}$$

2. Se suman las fracciones obtenidas.

$$\left(-\frac{6}{24}\right) + \frac{8}{24} = \frac{-6+8}{24} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

Por lo tanto, $\left(-\frac{2}{8}\right) + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.

7.2 Adición de números racionales en expresión decimal

Para **sumar** dos **números racionales** en **expresión decimal**, se sigue el procedimiento que se indica a continuación:

- Se escriben los sumandos en posición vertical, garantizando que las comas queden una debajo de la otra.
- Se resuelve la suma como si se tratara de números enteros.
- Se ubica la coma de la suma alineada con la coma de los sumandos.

Ejemplo 3

Para hallar $-45{,}67 + (-3{,}8)$ se escriben los sumandos en posición vertical, de tal forma que las comas queden alineadas una debajo de la otra. En el segundo sumando se debe escribir 0 en el lugar de las centésimas para que ambos números queden con la misma cantidad de cifras decimales.

$$\begin{array}{r} -45{,}67 \\ +\quad -\ \ 3{,}80 \\ \hline -49{,}47 \end{array}$$

Por lo tanto, $-45{,}67 + (-3{,}8) = -49{,}47$

7.3 Propiedades de la adición de números racionales

Propiedad	Enunciado	Ejemplo
Clausurativa	La suma de dos números racionales siempre es un número racional.	$\frac{5}{4} + \left(-\frac{7}{4}\right) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$
Conmutativa	El orden en el que se suman dos números racionales no altera la suma.	$\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
Modulativa	La suma de todo número racional con 0 da como resultado el mismo número racional. El 0 es el módulo de la adición.	$\frac{8}{3} + 0 = \frac{8}{3}$ $\left(-\frac{9}{7}\right) + 0 = 0 + \left(-\frac{9}{7}\right) = -\frac{9}{7}$
Invertiva	Todo número racional sumado con su opuesto aditivo da como resultado 0.	$\frac{12}{9} + \left(-\frac{12}{9}\right) = 0$
Asociativa	Cuando se suman más de dos números racionales, estos se pueden agrupar sin importar el orden y siempre se obtiene el mismo resultado.	$\frac{3}{5} + \left(\frac{1}{4} + \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{4}\right) + \frac{4}{3}$ $\frac{3}{5} + \left(\frac{19}{12}\right) = \left(\frac{17}{20}\right) + \frac{4}{3}$ $2\frac{11}{60} = 2\frac{11}{60}$

Tabla 2.5

7 Adición de números racionales

Ejemplo 4

Para ir de una ciudad *A* a una ciudad *B* en tres días, Santiago hace los siguientes recorridos: el primer día recorre $\frac{2}{7}$ de km, el segundo día avanza $\frac{9}{4}$ de km más, y el tercer día recorre $\frac{1}{4}$ de km más que el primer día. Para saber la distancia entre la ciudad *A* y la ciudad *B*, se suman los recorridos diarios que realiza Santiago.

Entonces, la distancia entre las ciudades *A* y *B* es:

$$\frac{2}{7} + \frac{9}{4} + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{7}\right) = \frac{8 + 63 + 7 + 8}{28} = \frac{86}{28} = \frac{43}{14}$$

Por lo tanto, entre las ciudades *A* y *B* hay $\frac{43}{14}$ km o 3,07 km.

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Resuelve las siguientes adiciones y simplifica el resultado cuando sea posible.

a. $-\frac{5}{9} + \frac{3}{7}$ b. $\frac{8}{25} + \frac{12}{45}$

c. $\frac{4}{24} + \frac{5}{32}$ d. $-\frac{15}{9} + \frac{1}{24}$

e. $\frac{9}{18} + \frac{2}{14}$ f. $-\frac{4}{12} + \frac{6}{30}$

g. $-\frac{5}{12} + \left(-\frac{2}{15}\right)$ h. $-\frac{4}{9} + \left(-\frac{11}{7}\right)$

i. $\frac{4}{17} + \left(-\frac{6}{46}\right)$ j. $\frac{10}{12} + \frac{4}{15}$

Razonamiento

2 Construye una operación en la que uses las propiedades de la adición de números racionales que se indican en cada caso.

a. Propiedad asociativa y propiedad modulativa.

b. Propiedad modulativa, propiedad invertiva y propiedad clausurativa.

c. Propiedad clausurativa, propiedad conmutativa y propiedad modulativa.

3 Lee y responde.

Andrés afirmó que todas las propiedades de la adición de números enteros se satisfacen también en los números racionales. ¿Por qué puede asegurar eso Andrés? ¿Se satisfacen todas las propiedades de la adición de números racionales en la adición de números naturales?

Ejercitación

4 Relaciona cada operación de la izquierda con el resultado que le corresponde a la derecha.

a. $\frac{7}{2} + \frac{3}{4} + \frac{7}{3}$ ( ) $\frac{79}{24}$

b. $\frac{3}{8} + \frac{4}{6} + \frac{9}{4}$ ( ) $\frac{33}{12}$

c. $\frac{2}{6} + \frac{5}{12} + \frac{8}{4}$ ( ) $\frac{79}{12}$

5 Realiza las siguientes adiciones entre decimales.

a. 1,8 + 5,4 b. 22,167 + 3,18

c. 3,75 + 5 d. 2,13 + 23,20

e. 22,167 + 23,18 f. 3,405 + 5,04

6 Calcula el perímetro de los triángulos de la Figura 2.28, si las medidas están dadas en centímetros.

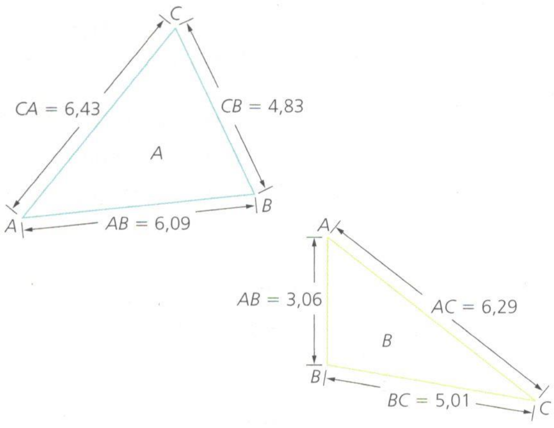


Figura 2.28

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Razonamiento

7 Completa las pirámides de las Figuras 2.29 y 2.30, sabiendo que el valor de cada ladrillo corresponde a la suma de los números de los dos ladrillos que tiene justo debajo.

a.

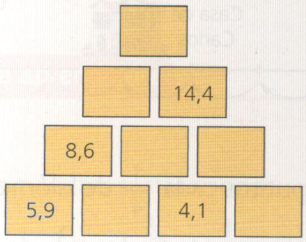


Figura 2.29

b.

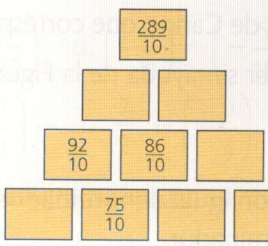


Figura 2.30

8 Determina si cada igualdad es correcta.

a. $5{,}2 + 1{,}6 = 1{,}8$

b. $4{,}6 + 3{,}444 = 8{,}044$

c. $3{,}02 + 1{,}14 = 4{,}16$

d. $33{,}3 + 10{,}4 = 200{,}8$

9 Indica el error que se cometió en cada caso.

a. $-\frac{9}{7} + 0 = \frac{9}{7}$

b. $\frac{12}{9} + \left(-\frac{12}{9}\right) = -\frac{24}{9}$

c. $\frac{5}{4} + \left(-\frac{7}{4}\right) = 3$

d. $\frac{4}{6} + \frac{3}{8} + \frac{9}{4} = 0$

Ejercitación

10 Halla el número decimal que falta para completar cada igualdad.

a. $\square + 0{,}16 = 1{,}08$

b. $4{,}36 + \square = 7{,}19$

c. $7{,}08 + 8{,}34 = \square$

d. $\square + 15{,}4 = 29{,}8$

Resolución de problemas

11 En la Figura 2.31 se muestran los pesos de algunos alimentos que se guardan en la alacena de una cocina.

Halla los pesos combinados de los productos que se indican en cada caso.

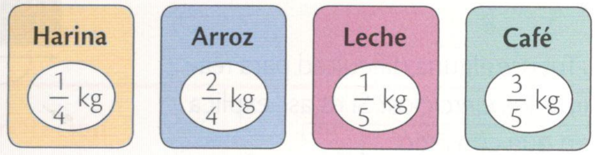


Figura 2.31

a. Arroz, leche y café

b. Café y leche

c. Arroz y harina

d. Harina, leche y café

Evaluación del aprendizaje

Para ayudar a una fundación, algunos estudiantes de grado séptimo decidieron reunir alimentos y donarlos.

Andrea aportó 2,5 kg de arroz, Mateo llevó $\frac{4}{2}$ kg de fríjol, Catalina ayudó con $\frac{3}{9}$ kg de arroz y Juan cooperó con 3,75 kg de fríjol.

a. ¿Cuánto arroz y cuánto fríjol recogieron en total?

b. ¿Qué recogieron más, arroz o fríjol?

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

El acoso escolar es una forma de agresión que atenta contra el libre desarrollo de la personalidad. Según cifras oficiales, el 77,5% de los estudiantes colombianos ha sufrido acoso escolar alguna vez en su vida. Según la información, ¿puedes afirmar que más del 50% de los estudiantes no sufren de matoneo? ¿Cómo crees que se puede evitar el acoso escolar?

8 Sustracción de números racionales

Saberes previos

Calcula mentalmente:

- $1 - \frac{1}{2}$
- $1 - \frac{1}{4}$
- $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$

¿Tuviste alguna dificultad para realizar los ejercicios? Si es así, explica en qué consistió.

Analiza

Andrea recorre $\frac{10}{4}$ de kilómetro en línea recta de su casa a la oficina. Ella siempre hace una parada para recoger a su compañero Carlos, que vive a $\frac{3}{4}$ de kilómetro de la oficina.

- ¿Cuál es la distancia entre la casa de Andrea y la de Carlos?

Conoce

8.1 Sustracción de números racionales en expresión fraccionaria

El recorrido de Andrea se puede representar como se muestra en la Figura 2.32.

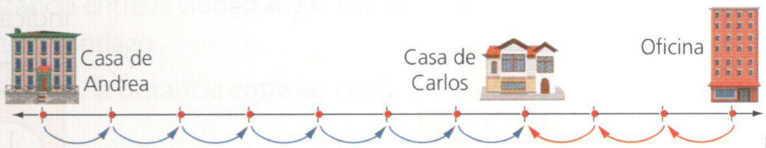


Figura 2.32

En este recorrido se han marcado puntos cada $\frac{1}{4}$ de kilómetro. Los arcos rojos indican la distancia de la oficina a la casa de Carlos, $\frac{3}{4}$ de km, y los azules, la distancia entre la casa de Andrea y la de Carlos, que corresponde a $\frac{7}{4}$ de km.

El resultado anterior se puede obtener sin ayuda de la Figura 2.32 resolviendo la sustracción $\frac{10}{4} - \frac{3}{4}$.

Para **sustraer números racionales con igual denominador**, se restan los numeradores y se deja el mismo denominador.

Ejemplo 1

La sustracción propuesta para solucionar la situación inicial se realiza así:

$$\frac{10}{4} - \frac{3}{4} = \frac{10-3}{4} = \frac{7}{4}$$

Para **sustraer racionales con diferente denominador**, primero se hallan fracciones equivalentes a los números racionales dados que tengan el mismo denominador; luego, se procede como en el caso anterior.

Ejemplo 2

Para hallar $\frac{3}{5} - \frac{1}{2}$ se siguen estos pasos:

1. Se hallan fracciones equivalentes a los números racionales dados cuyo denominador sea el mínimo común múltiplo de los denominadores. $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ y $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$
2. Se sustraen los racionales de igual denominador. $\frac{6}{10} - \frac{5}{10} = \frac{1}{10}$

Por lo tanto, $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$.

8.2 Sustracción de números racionales en expresión decimal

Para **sustraer expresiones decimales**, se escribe el sustraendo debajo del minuendo de tal manera que queden alineadas las cifras del mismo valor posicional; luego, se resta como en los números enteros. A la diferencia se le agrega la coma debajo de las comas.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 3

Observa cómo se sustrae 34,28 de 124,85.

$$\begin{array}{rl} 124{,}85 & \leftarrow \text{Minuendo} \\ -\ \ 34{,}28 & \leftarrow \text{Sustraendo} \\ \hline 90{,}57 & \leftarrow \text{Diferencia} \end{array}$$

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Resuelve las siguientes sustracciones.

a. $\frac{8}{9} - \frac{3}{10}$ b. $-\frac{3}{5} - \frac{1}{3}$

c. $\frac{8}{15} - \left(-\frac{5}{12}\right)$ d. $\left(-\frac{4}{9}\right) - \left(-\frac{5}{18}\right)$

e. $\frac{3}{4} - \left(-\frac{7}{3}\right)$ f. $\frac{7}{2} - \left(-\frac{9}{4}\right)$

2 Relaciona cada operación con su respectivo resultado.

a. $\frac{6}{13} - \frac{4}{6} - \frac{1}{3}$ ( ) $\frac{1}{2}$

b. $\frac{7}{6} - \left(-\frac{2}{5}\right) - \frac{3}{4}$ ( ) $\frac{49}{60}$

c. $\left(-\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{7}{6}\right)$ ( ) $\frac{59}{5}$

d. $\left(-\frac{13}{5}\right) - \left(-\frac{72}{5}\right)$ ( ) $-\frac{7}{13}$

e. $\left(-\frac{21}{34}\right) - \left(-\frac{17}{9}\right)$ ( ) $\frac{389}{306}$

Razonamiento

3 Determina en cada caso si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. Siempre que se sustraen dos números racionales se obtiene otro número racional. ( )

b. La diferencia de dos números racionales siempre es menor que el minuendo y que el sustraendo. ( )

c. Para que sea posible sustraer dos números racionales, estos siempre deben tener el mismo denominador. ( )

Ejercitación

4 Escribe los números que faltan en las casillas verdes de la Figura 2.33 para que se cumpla cada igualdad.

1,5	−		=	0,7
−		−		−
	−		=	
=		=		=
0,6	−		=	3,8

Figura 2.33

Resolución de problemas

5 Una botella de 1,5 L está llena de agua. Si se consumen 0,330 L de agua, ¿cuántos litros de agua quedan en la botella?

Evaluación del aprendizaje

La superficie de África es muy aproximada a los 30 221 000 km^2. En la Tabla 2.6 se muestra la fracción aproximada de superficie que le corresponde a cada uno de los demás continentes.

Continente	Superficie
Europa	$\frac{1}{3}$
América	$\frac{141}{100}$
Oceanía	$\frac{17}{60}$
Asia	$\frac{148}{100}$
Antártida	$\frac{23}{50}$

Tabla 2.6

a. ¿Qué continente tiene la menor superficie?

b. ¿Qué continente tiene la mayor superficie?

c. ¿Cuál es la diferencia entre las fracciones correspondientes a las superficies del continente más grande y a las del más pequeño?

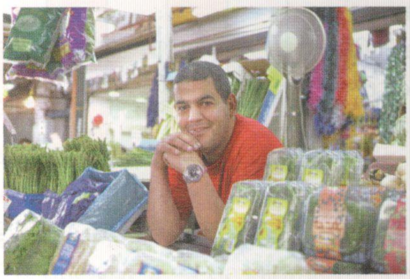
9 Multiplicación y división de números racionales

Saberes previos

Ernesto debe hacer un recorrido de 8,5 km. Si ha avanzado dos quintas partes del total, ¿qué distancia le falta por recorrer?

Analiza

José vende vasos de gaseosa de $\frac{1}{4}$ de litro cada uno.



- Si el domingo vendió nueve vasos de gaseosa, ¿cuántos litros vendió en total?

Conoce

9.1 Multiplicación de números racionales en expresión fraccionaria

Para saber cuántos litros de gaseosa vendió José, se suma nueve veces el contenido de gaseosa de un solo vaso.

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$$

Sumar nueve veces el número $\frac{1}{4}$ equivale a multiplicarlo por 9, así que:

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{1}=\frac{1\cdot 9}{4\cdot 1}=\frac{9}{4}$$

Por lo tanto, José vendió $\frac{9}{4}$ o 2,25 litros de gaseosa.

Dados $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}\in\mathbb{Q}$, se tiene que $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$.

Ejemplo 1

La constructora Alcatraz construirá una nueva sede para sus oficinas en un terreno que mide $\frac{15}{2}$ de m de ancho y $\frac{121}{5}$ de m de largo. ¿Cuál es el área con que cuenta para construir el edificio?

$$A=\frac{15}{2}\text{ m}\cdot\frac{121}{5}\text{ m}=\frac{15\text{ m}\cdot 121\text{ m}}{2\cdot 5}=\frac{1815}{10}\text{ m}^2=\frac{363}{2}\text{ m}^2$$

El área del terreno es de $\frac{363}{2}$ m²; es decir, 181,5 m².

9.2 Multiplicación de números racionales en expresión decimal

Para **multiplicar expresiones decimales**, se efectúa la multiplicación como si se tratara de números enteros, y se separa el producto en tantas cifras decimales como haya entre los dos factores.

Ejemplo 2

Observa cómo se realiza la operación 45,87 · 3,5.

$$\begin{array}{r} 45{,}87 \\ \times\ 3{,}5 \\ \hline 22935 \\ 13761 \\ \hline 160{,}545 \end{array}$$

Tres cifras decimales

Tres cifras decimales

9.3 Propiedades de la multiplicación de números racionales

Propiedad	Explicación
Clausurativa	El producto de dos o más números racionales es otro número racional.
Conmutativa	El orden de los factores no altera el producto.
Asociativa	Al multiplicar tres o más números racionales, estos se pueden agrupar de diferentes formas y el producto no se altera.
Modulativa	La multiplicación de un número racional con el número 1 da como resultado el mismo número racional.
Invertiva	El producto que se obtiene al multiplicar un número racional por su inverso multiplicativo es la unidad.
Anulativa	Todo número racional multiplicado por 0 da como resultado 0.
Distributiva	Un número racional como producto de una suma de números racionales es equivalente a la suma de los productos del número racional por cada sumando.

Tabla 2.7

Ejemplo 3

a. Propiedad conmutativa

$$\left(-\frac{7}{8}\right)\cdot\frac{4}{3}=\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)=-\frac{7}{6} \qquad 6{,}3\cdot(-1{,}5)=(-1{,}5)\cdot 6{,}3=-9{,}45$$

b. Propiedad distributiva

$$\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\right) \qquad 5{,}4\cdot(4{,}3+2)=(5{,}4\cdot 4{,}3)+(5{,}4\cdot 2)$$

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{13}{15}=\frac{3}{20}+\frac{1}{2} \qquad 5{,}4\cdot 6{,}3=23{,}22+10{,}8$$

$$\frac{13}{20}=\frac{13}{20} \qquad 34{,}02=34{,}02$$

9.4 División de números racionales en expresión fraccionaria

Para **dividir dos números racionales**, se multiplica el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor. En general, se cumple que:

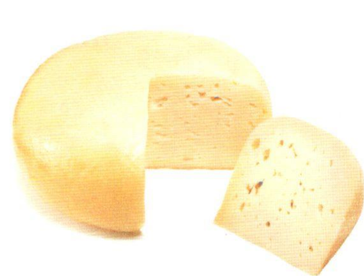
$$\text{si } \frac{a}{b} \text{ y } \frac{c}{d}\in\mathbb{Q}, \text{ entonces } \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}.$$

Ejemplo 4

Julián tenía en su nevera $\frac{3}{4}$ de kilo de queso y lo dividió en porciones de $\frac{1}{8}$ de kilo cada una. Para saber cuántas porciones obtuvo, es necesario dividir $\frac{3}{4}$ entre $\frac{1}{8}$.

$$\frac{3}{4}\div\frac{1}{8}=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{1}=\frac{24}{4}=6$$

Julián obtuvo seis porciones de queso.



Pensamiento numérico

Ejemplo 5

Andrés disponía de $\frac{5}{3}$ de litro de pintura para pintar las cuatro paredes de su alcoba.

Para saber la fracción de pintura que usó Andrés en cada pared, se debe encontrar el cociente de $\frac{5}{3} \div 4$.

Al resolver, se tiene que: $\frac{5}{3} \div \frac{4}{1} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$.

Andrés usó $\frac{5}{12}$ de litro de pintura en cada pared.

Ejemplo 6

Observa cómo se resuelve la operación $\dfrac{\frac{9}{4}+\frac{2}{3}}{\frac{12}{5}-\frac{7}{10}}$.

$$\dfrac{\frac{9}{4}+\frac{2}{3}}{\frac{12}{5}-\frac{7}{10}} = \dfrac{\frac{35}{12}}{\frac{17}{10}}$$

Se resuelven las operaciones del numerador y del denominador.

$$= \frac{35}{12} \div \frac{17}{10}$$

Se expresa la fracción compleja como una división.

$$= \frac{35}{12} \cdot \frac{10}{17} = \frac{350}{204} = \frac{175}{102}$$

Se dividen las fracciones y se simplifica el cociente.

9.5 División de números racionales en expresión decimal

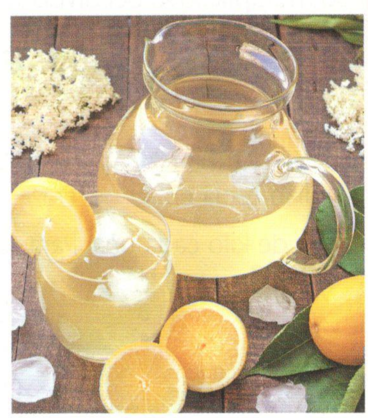
Para **dividir dos números racionales en expresión decimal**, se eliminan las comas decimales multiplicando el dividendo y el divisor por una misma potencia de 10. Luego, se efectúa la división entre los números enteros obtenidos.

Ejemplo 7

En la fiesta de cumpleaños de Juana se sirvió jugo para los invitados en vasos de 0,25 L. En total se tienen 2,5 litros de jugo. Con el fin de saber para cuántos invitados alcanzó, se debe dividir el total de jugo disponible entre la capacidad de cada vaso.

$$2{,}5 \div 0{,}25 = 250 \div 25 = 10$$

Por lo tanto, el jugo alcanzó para diez invitados.



Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Realiza las siguientes operaciones.

a. $\left(-\frac{3}{7}\right) \div \frac{4}{12}$
b. $\frac{41}{3} \div \frac{22}{5}$
c. $\frac{15}{11} \div \frac{4}{5}$
d. $\frac{17}{5} \div \frac{4}{3}$
e. $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$
f. $\left(-\frac{19}{8}\right) \cdot \left(-\frac{12}{7}\right)$
g. $\left(\frac{12}{5} \cdot \frac{7}{4}\right) \div \frac{3}{2}$
h. $\left(\frac{9}{8} \cdot \frac{5}{4}\right) \div \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{11}{3}\right)$

2 Resuelve las operaciones con expresiones decimales que se presentan a continuación.

a. $1{,}5 \cdot 0{,}35$
b. $6{,}2 \cdot 0{,}1$
c. $(-0{,}14) \div 2$
d. $(-27{,}778) \div 2{,}15$
e. $(-3{,}425) \cdot 1{,}7$
f. $(-43{,}4 \cdot 2{,}5) \div 3{,}7$

Comunicación

3 Indica, en cada caso, cuántas cifras decimales se deben separar en el producto al multiplicar cada par de factores.

a. Cada factor tiene dos cifras decimales.
b. Un factor tiene tres cifras decimales y el otro dos cifras decimales.
c. Un factor tiene dos cifras decimales y el otro una cifra decimal.

Razonamiento

4 Une con una línea cada operación planteada en la izquierda con el cociente que le corresponde a la derecha.

a. Un sexto dividido tres	3
b. Dos novenos dividido dos	$\frac{1}{9}$
c. Tres medios dividido un medio	$\frac{1}{18}$
d. Seis octavos dividido un tercio	$\frac{18}{5}$
e. Tres quintos dividido un sexto	$\frac{9}{4}$
f. Doce tercios dividido un cuarto	$\frac{9}{10}$
g. Un décimo dividido un noveno	16

5 Explica el error que se cometió en el desarrollo de la división y corrígelo.

$$\frac{44}{3} \div \frac{9}{2} = \frac{44}{3} \cdot \frac{9}{2} = \frac{396}{6} = 66$$

Resolución de problemas

6 Lee y responde las preguntas.

a. Se tienen dos pliegos y medio de cartón que se deben cortar en octavos de pliego. ¿Cuántos octavos se pueden cortar?

b. ¿Cuántos vasos de $\frac{1}{4}$ de litro se pueden servir de un galón de agua que contiene $\frac{18}{8}$ de litro?

c. Un automóvil recorrió $\frac{8}{10}$ de kilómetro en nueve minutos. ¿Qué fracción de kilómetro recorrió en tres minutos?

d. Se reparten $\frac{6}{8}$ de pizza en partes iguales entre seis personas. ¿Qué fracción de pizza le correspondió a cada persona?

Evaluación del aprendizaje

i Resuelve.

Alejandro escribió $\frac{1}{8} \div \frac{2}{7} = \frac{2}{7} \div \frac{1}{8}$.

a. ¿Qué propiedad quería aplicar Alejandro con está expresión?

b. ¿Se puede aplicar esta propiedad a la división? Explica tomando como base la igualdad que planteó Alejandro.

c. ¿Hay alguna propiedad de la multiplicación de números racionales que se cumpla en esta división? Explica con ejemplos.

ii Escribe los números que satisfacen cada igualdad.

a. $(-0{,}5) \cdot \square = 5$
b. $100 \cdot \square = 3{,}75$
c. $\frac{3}{5} \div \square = 12$
d. $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\square}{\square}\right) = -\frac{1}{8}$
e. $\left(-\frac{15}{7}\right) \div \left(\frac{\square}{\square}\right) = \frac{45}{7}$
f. $\left(\frac{\square}{\square}\right) \div \left(-\frac{3}{6}\right) = \frac{2}{9}$
g. $0{,}75 \div \square = 0{,}25$
h. $(-0{,}8) \div \square = -2$

Practica más

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Números racionales

Ejercitación

1 Escribe la fracción irreducible, equivalente a cada par de fracciones.

a. $\frac{78}{104}$ y $\frac{45}{60}$ b. $\frac{21}{63}$ y $\frac{32}{96}$

c. $\frac{86}{215}$ y $\frac{60}{150}$ d. $\frac{54}{36}$ y $\frac{63}{42}$

Comunicación

2 Marca con una X, en la Tabla 2.7, el conjunto al que pertenece cada número. Puedes marcar más de una opción.

Número	Naturales	Enteros	Racionales
-2			
$\frac{3}{8}$			
0,2			
$-\frac{5}{6}$			
$-\frac{9}{3}$			

Tabla 2.7

Expresión decimal de los números racionales

Ejercitación

3 Calcula la expresión decimal de cada número racional y clasifícala como finita o periódica.

a. $\frac{2}{6}$ b. $-\frac{24}{6}$ c. $\frac{22}{5}$

d. $-\frac{2}{7}$ e. $\frac{15}{6}$ f. $-\frac{7}{3}$

4 Halla la fracción generatriz de cada expresión decimal.

a. 0,58 b. 1,99 c. 5,525

d. $-0{,}321$ e. 1,23 f. $-4{,}248$

Números racionales en la recta numérica y relaciones de orden

Razonamiento

5 Identifica los números racionales representados en la recta numérica.

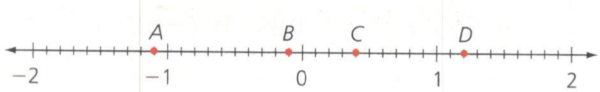


Figura 2.34

6 Representa cada número racional en la recta numérica. Luego, ordénalos de mayor a menor.

a. $A = \frac{4}{3}$ b. $B = -\frac{6}{8}$ c. $C = \frac{5}{2}$

d. $D = \frac{1}{8}$ e. $E = -\frac{13}{4}$ f. $F = -\frac{13}{16}$

Adición y sustracción de números racionales

Ejercitación

7 Escribe en los recuadros los números que hacen que las igualdades sean ciertas.

a. $-\frac{19}{3} + \frac{\square}{\square} = \frac{23}{10} + \frac{1}{2}$ b. $\frac{1}{2} + \frac{\square}{\square} = \frac{5}{2}$

c. $\frac{\square}{\square} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} = -\frac{6}{8}$ d. $\frac{\square}{\square} + \frac{6}{5} = \frac{3}{10}$

Resolución de problemas

8 Para preparar una receta, Andrés utiliza $\frac{7}{2}$ de kg de manzanas, $\frac{3}{4}$ de kg de mantequilla y $\frac{9}{2}$ de kg de masa para hojaldre.

a. ¿Cuánto pesa la mezcla de los tres ingredientes?

b. Si para una porción se necesita medio kilogramo de la mezcla, ¿cuántos kilogramos de mezcla no se utilizan?

Multiplicación y división de números racionales

Ejercitación

9 Calcula la fracción generatriz de las longitudes de los lados de la Figura 2.35 que están expresadas de forma decimal. Luego, halla el área de la figura.

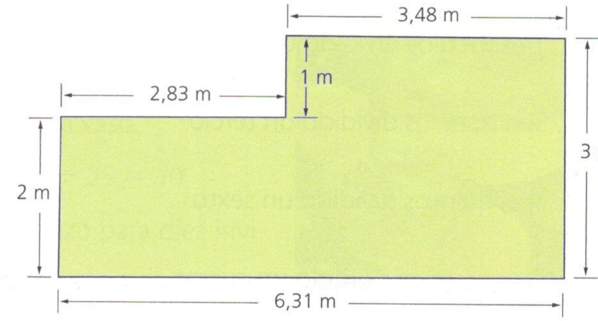


Figura 2.35

Resolución de **problemas**

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Estrategia: Descomponer el problema en partes

Problema

Tres amigos entrenan para una carrera de atletismo. Manuel recorre diariamente $\frac{13}{12}$ de km, Felipe, $\frac{17}{6}$ de km y Andrés, $\frac{23}{3}$ de km. ¿Cuál de ellos recorre más distancia al día?

1. Comprende el problema

- ¿Qué información aporta el problema?
  R: La distancia que recorren diariamente tres personas que se preparan para una competencia atlética.
- ¿Qué se debe averiguar?
  R: Qué atleta recorre más distancia al día.

2. Crea un plan

- Encuentra fracciones equivalentes a las fracciones dadas y compáralas.

3. Ejecuta el plan

- Halla el m. c. m. de los denominadores de las tres fracciones.

3	6	12	2
3	3	6	2
3	3	3	3
1	1	1	

m. c. m. $(3, 6, 12) = 2^2 \cdot 3 = 12$

- Encuentra una fracción equivalente a cada fracción con denominador 12.

$$\frac{17}{6} = \frac{17 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{34}{12} \qquad \frac{23}{3} = \frac{23 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{92}{12}$$

- Compara las fracciones que tienen denominador común.

$$\frac{13}{12} < \frac{34}{12} < \frac{92}{12}$$

R: Andrés recorre más distancia al día.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que la diferencia entre las distancias recorridas por Andrés y Manuel sea $\frac{79}{12}$ de km.

Aplica la estrategia

1. Marcela resuelve quince ejercicios de matemáticas en $\frac{35}{60}$ de hora; Paula los resuelve en $\frac{9}{12}$ de hora y Valentina en $\frac{3}{4}$ de hora. ¿Cuál de ellas tarda menos tiempo en resolver los ejercicios?

   a. Comprende el problema

   b. Crea un plan

   c. Ejecuta el plan

   d. Comprueba la respuesta

Resuelve otros problemas

2. De un recipiente que contiene 1,395 kg de mantequilla se han utilizado tres porciones, cada una de 0,456 kg. ¿Qué cantidad de mantequilla queda aún en el recipiente?

3. Para pintar una puerta, Javier utilizó $\frac{5}{4}$ de galón de pintura, y para pintar una pared, Leonardo empleó 1,25 galones. ¿Cuál de los dos gastó más pintura?

Formula problemas

4. Inventa y resuelve un problema que involucre la información de la Figura 2.36.

Figura 2.36

Enriquece tu vocabulario

- Una **fracción generatriz** de un número decimal es la fracción que lo representa.

Evaluación del aprendizaje

Números racionales

Ejercitación

ACTIVIDAD DE REFUERZO

1 Colorea con verde las fracciones equivalentes a $\frac{3}{5}$ y con amarillo las fracciones equivalentes a $\frac{7}{2}$.

$\frac{4}{3}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{14}{4}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{36}{60}$	$\frac{21}{18}$
$\frac{15}{9}$	$\frac{35}{28}$	$\frac{77}{22}$	$\frac{24}{23}$	$\frac{52}{36}$	$\frac{48}{12}$
$\frac{24}{40}$	$\frac{40}{24}$	$\frac{64}{42}$	$\frac{36}{15}$	$\frac{56}{16}$	$\frac{90}{45}$
$\frac{5}{36}$	$\frac{84}{24}$	$\frac{27}{45}$	$\frac{25}{31}$	$\frac{14}{6}$	$\frac{75}{125}$

Comunicación

ACTIVIDAD DE REFUERZO

2 Escribe el número racional que representa la relación entre las partes sombreadas y el número total de partes iguales de las figuras 2.37 a 2.39.

a.

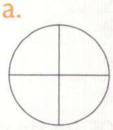


Figura 2.37

b.

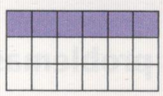


Figura 2.38

c.

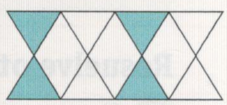


Figura 2.39

Comunicación

VERDADERO FALSO

3 Califica como verdadera o falsa cada afirmación.

a. Todo número racional es el cociente de dos números naturales.

b. $-\frac{20}{2}$ no es un número racional.

c. $\frac{6}{9}$ es un número racional.

d. Todos los números racionales son positivos.

Expresión decimal de los números racionales

Comunicación

ACTIVIDAD DE RELACIONAR

4 Relaciona cada racional expresado en su forma fraccionaria con el número decimal que le corresponde.

$\frac{1}{6}$ $\frac{-3}{8}$ $\frac{7}{2}$ $\frac{-4}{3}$ $\frac{7}{11}$ $\frac{-1}{4}$ $\frac{9}{10}$ $\frac{-5}{3}$

$0{,}1\overline{6}$ $-0{,}375$ $-1{,}\overline{3}$ $-1{,}\overline{6}$ $0{,}25$ $3{,}5$ $0{,}\overline{63}$ $0{,}9$

Fracción correspondiente a una expresión decimal

Ejercitación

ACTIVIDAD DE REFUERZO

5 Calcula las fracciones para cada una de las siguientes expresiones decimales.

a. $1{,}\overline{36}$ b. $0{,}\overline{123}$ c. $0{,}\overline{5}$ d. $4{,}2\overline{96}$

Números racionales en la recta numérica

Comunicación

ACTIVIDAD DE REFUERZO

6 Representa este conjunto de números racionales en una recta numérica. Ordénalos de menor a mayor.

a. $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{9}{2}, -\frac{11}{2}, \frac{5}{2}$

b. $\frac{1}{6}, -\frac{5}{6}, \frac{11}{6}, \frac{7}{6}, \frac{5}{6}, \frac{15}{6}$

Sistema de coordenadas cartesianas

Modelación

ACTIVIDAD DE REFUERZO

7 Escribe las coordenadas de cada lugar del colegio.

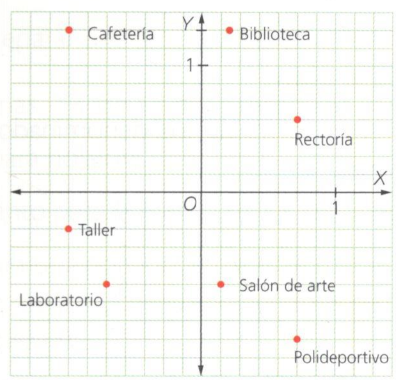


Figura 2.40

8 Represента las siguientes parejas de números racionales en un plano cartesiano.

ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $A\left(-\frac{1}{10}, \frac{3}{5}\right)$ b. $B\left(-\frac{3}{2}, -\frac{4}{5}\right)$ c. $C\left(-\frac{7}{2}, \frac{2}{5}\right)$

Relación de orden en los números racionales

Razonamiento

9 Encuentra un número racional mayor que $\frac{3}{4}$ y menor que $-\frac{1}{2}$.

ACTIVIDAD DE REFUERZO

Resolución de problemas

ACTIVIDAD DE REFUERZO

10 Juan tomó un cuarto de litro de jugo, Daniel tomó dos tercios de litro y Lina tomó tres quintos de litro. ¿Cuál de ellos tomó la mayor cantidad de jugo? Explica.

Adición de números racionales

Ejercitación

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

11 Efectúa las adiciones con números racionales.

a. $-\frac{7}{10}+\frac{6}{5}$ b. $\frac{4}{5}+\left(-\frac{23}{28}\right)$

c. $23{,}075+(-19{,}348)$ d. $-17{,}32+(-15{,}0945)$

Resolución de problemas

12 Entre la casa de Juanita y el paradero del bus hay $\frac{1}{6}$ de km, y la distancia entre el paradero y su colegio es $\frac{7}{4}$ de km.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

a. ¿Cuántos kilómetros hay entre la casa de Juanita y el colegio?

b. Si Juanita de lunes a viernes va a pie de su casa al paradero, toma el bus para llegar al colegio y luego de la jornada escolar, este la regresa al paradero desde donde camina de regreso hasta su casa, ¿cuántos kilómetros camina en total durante los cinco días?, ¿cuántos kilómetros recorre el bus durante los 20 días del mes escolar yendo y viniendo del paradero al colegio?

Sustracción de números racionales

Ejercitación

13 Obtén las siguientes diferencias.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

a. $-\frac{5}{12}-\frac{13}{6}$ b. $-\frac{9}{16}-\left(-\frac{5}{8}\right)$

c. $-123{,}056-54{,}089$ d. $72{,}103-(-98{,}25043)$

Resolución de problemas

14 Valentina compró $\frac{12}{7}$ de metro de tela para diseñar algunas prendas.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para diseñar una falda ella necesita medio metro de tela, para coser una camisa emplea $\frac{3}{5}$ de metro de tela, y para un pantalón requiere $\frac{2}{3}$ de m de tela.

a. ¿Tiene Valentina suficiente tela para diseñar una falda, una camisa y un pantalón?

b. ¿Cuánta tela emplea en el diseño de una camisa y un pantalón?

Multiplicación y división de números racionales

Ejercitación

15 Calcula el resultado de cada operación.

ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{7}{10}\right)$ b. $\frac{5}{8}\div\left(-\frac{3}{4}\right)$

c. $-\frac{9}{5}\cdot\left(\frac{6}{13}\right)$ d. $\frac{19}{7}\div\left(\frac{1}{20}\right)$

e. $-6{,}034\cdot(-12{,}31)$ f. $12{,}35\cdot(-56{,}013)$

g. $-96{,}386\div 3{,}2$ h. $4{,}732\div(-2{,}6)$

Resolución de problemas

De acuerdo con el diagrama de la Figura 2.41, responde las preguntas 16 y 17.

ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

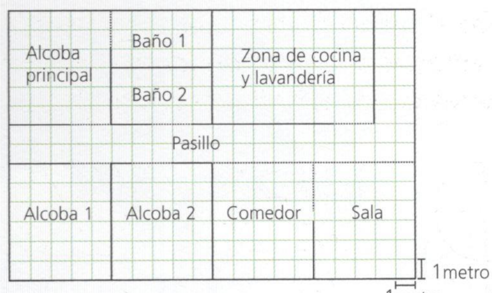


Figura 2.41

16 Si el área de la sala equivale a $\frac{3}{28}$ del área total del apartamento, el área del baño 1 equivale a:

ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

a. $\frac{1}{2}$ b. $\frac{1}{28}$

c. $\frac{30}{208}$ d. $\frac{3}{56}$

17 Para cambiar el piso del comedor y de la sala se necesitan 60 m^2 de baldosa. Si se compran 22 cajas que contienen $\frac{5}{2}$ de m^2 de baldosa cada una, ¿cuántos metros de baldosa faltan para poder cambiar el piso?

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

a. $\frac{5}{2}$ m^2

c. 38 m^2

b. 5 m^2

d. No falta material.

3 Proporcionalidad, ecuaciones y funciones

Ya sabemos

- Reconocer correlaciones entre variables y resolver ecuaciones sencillas.

Vamos a aprender

- A resolver problemas de proporcionalidad y analizar funciones.

Nos sirve para

- Explicar e interpretar el significado de información habitual expresada en términos de razones y proporciones.

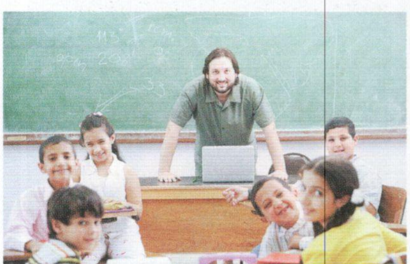
1 Razones y proporciones

Saberes previos

En el polideportivo de un pueblo se ofrecen cursos de patinaje. Según la información que se registra en la inscripción, se determina que la razón entre los niños que saben patinar y los que no saben es de 28 a 45. ¿Sabe o no sabe patinar la mayoría de los inscritos? ¿Por qué?

Analiza

En un colegio hay 50 profesores y 1 000 estudiantes.



- ¿Cuántos alumnos hay por cada profesor?

Conoce

La relación entre el número de profesores y el número de estudiantes se puede expresar con la **razón** matemática $\frac{50}{1\,000}$.

Al simplificar la razón se obtiene que $\frac{50}{1\,000} = \frac{1}{20}$. Por tanto, se concluye que por cada profesor hay 20 estudiantes.

1.1 Razones

Una **razón** es una expresión numérica de comparación entre las medidas de dos magnitudes. La razón entre a y b se escribe $\frac{a}{b}$ o $a : b$, y se lee: "a es a b".

En una razón $\frac{a}{b}$ se identifican dos términos: el **antecedente** (a), que corresponde al primer término, y el **consecuente** (b), que es el segundo término.

1.2 Proporciones

Dos razones forman una **proporción** si se puede establecer una igualdad entre ellas. La proporción entre las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se escribe $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, y se lee: "$a$ es a b como c es a d". Las razones que forman una proporción son razones equivalentes.

En la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, a y d son los **extremos,** c y b son los **medios**. El cociente de las razones que forman una proporción es el mismo, y se denomina **coeficiente** o **razón de proporcionalidad**.

Ejemplo 1

$\frac{3}{6}$ y $\frac{3}{5}$ no forman una proporción, pues $\frac{3}{6} = 0{,}5 \neq \frac{3}{5} = 0{,}6$.

1.3 Propiedad fundamental de las proporciones

En toda proporción se cumple que el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si y solo si } a \cdot d = b \cdot c$$

Ejemplo 2

El término desconocido de la proporción $\frac{x}{92} = \frac{64}{23}$ se halla aplicando la propiedad fundamental de las proporciones.

$$x \cdot 23 = 92 \cdot 64$$

$$x \cdot 23 = 5\,888 \Rightarrow x = \frac{5\,888}{23} = 256$$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1. Expresa los enunciados mediante una razón.
   - a. Dos carros por cada apartamento.
   - b. Cuatro naranjas por cada seis peras.
   - c. Tres galletas por cada dos panes.
   - d. Dos pantalones por cada tres camisas.
   - e. Tres mujeres por cada hombre.

Razonamiento

2. Encuentra dos razones equivalentes a cada una de las razones dadas.

   a. $\frac{1}{9}$ b. $\frac{7}{4}$ c. $\frac{12}{25}$ d. $\frac{14}{3}$

3. Halla el antecedente de las razones, si el coeficiente de proporcionalidad de cada una es igual a 0,6.

   a. $\frac{a}{10}$ b. $\frac{x}{5}$ c. $\frac{y}{20}$ d. $\frac{c}{15}$

4. Determina si la razón $\frac{38}{4}$ forma una proporción con cada una de las siguientes razones.

   a. $\frac{4}{38}$ b. $\frac{57}{6}$ c. $\frac{9,5}{1}$

   d. $\frac{19}{2}$ e. $\frac{16}{2}$ f. $\frac{76}{16}$

5. Comprueba si las expresiones dadas forman una proporción. Ten en cuenta que a y b son distintos de 0.

   a. $2a$, $4b$, $8a$ y $16b$ b. $3a$, $9b$, $10a$ y $28b$

   c. $30a$, $6b$, $25a$ y $5b$ d. $25a$, $5b$, $16a$ y $4b$

Ejercitación

6. Identifica los extremos y los medios de cada proporción. Luego, halla el coeficiente de proporcionalidad en cada caso.

   a. $\frac{3}{16} = \frac{15}{80}$ b. $\frac{18}{6} = \frac{9}{3}$

   c. $\frac{2}{10} = \frac{0,5}{2,5}$ d. $\frac{4,5}{0,5} = \frac{9}{1}$

   e. $\frac{4n}{3} = \frac{12n}{9}$ f. $\frac{5m}{10m} = \frac{1}{2}$

Razonamiento

7. Halla el valor desconocido en cada proporción.

   a. $\frac{5}{10} = \frac{y}{8}$ b. $\frac{4}{m} = \frac{2}{11}$

   c. $\frac{12}{0,5} = \frac{n}{3}$ d. $\frac{14}{16} = \frac{z}{8}$

   e. $\frac{x+1}{5} = \frac{15}{6}$ f. $\frac{5}{2} = \frac{b-1}{4}$

   g. $\frac{10}{2a} = \frac{20}{4}$ h. $\frac{3y}{2} = \frac{18}{4}$

Resolución de problemas

8. En una encuesta sobre el género de película favorito, se obtuvieron los datos que se muestran en la Tabla 3.1.

Género de película	Frecuencia
Suspenso	15
Animada	32
Acción	21
Comedia	17
Otro	7

Tabla 3.1

   a. ¿Cuál es la razón entre los que prefieren comedia y los que prefieren las películas animadas?
   b. ¿Cuál es la razón entre los que prefieren las películas de acción y el total de los encuestados?

9. Un carro recorre una distancia de 120 km en 1,5 h manteniendo una velocidad constante. ¿Cuántos kilómetros recorrerá en 3 h?

Evaluación del aprendizaje

i. Para hacer galletas, María agrega dos huevos por cada 300 g de mantequilla. Si duplica la cantidad de mantequilla, ¿cuántos huevos deberá usar?

ii. En una floristería venden doce rosas por cada 24 flores. ¿Cuántas rosas le entregarán a una persona que compre siete docenas de flores?

2 Magnitudes correlacionadas

Saberes previos

Francisco participa en una competencia de ciclismo. Desde el punto de inicio hasta el punto de llegada, con velocidad constante, emplea entre 2 y 2,3 horas. Si Francisco quiere reducir el tiempo del recorrido, ¿qué debe suceder con la velocidad?

Analiza

En el año 2014 se consideraba que la producción de leche en Colombia registraba costos muy altos.

La Tabla 3.2 muestra el costo de producción de leche de ese año según el número de litros.

Número de litros	Costo de producción (en pesos)
1	814
2	1 628
3	2 442
4	3 256

Tabla 3.2

- ¿Cómo se relacionan las magnitudes presentadas en la tabla?

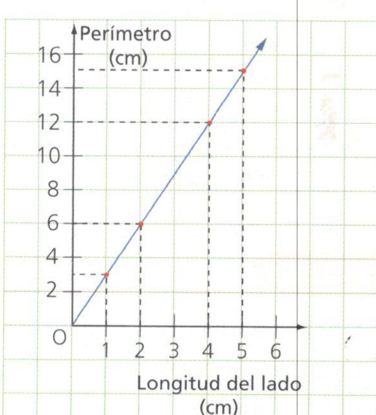


Figura 3.1

Conoce

2.1 Magnitudes directamente correlacionadas

Las magnitudes que están relacionadas en esta situación son el *número de litros de leche* y su *costo de producción*. Cuando el número de litros aumenta, el costo también; por tanto, se dice que entre las dos magnitudes existe una **correlación directa**.

Dos magnitudes *A* y *B* están **directamente correlacionadas** si al aumentar *A*, también aumenta *B*, o si al disminuir *A*, también disminuye *B*.

Ejemplo 1

En la Tabla 3.3 se muestra la relación entre la longitud del lado de un triángulo equilátero y su perímetro. Estas magnitudes tienen una correlación directa, ya que a medida que aumenta la longitud del lado, aumenta el perímetro del triángulo.

La relación entre estas dos magnitudes se representa en la Figura 3.1.

Longitud del lado (cm)	Perímetro (cm)
1	3
2	6
4	12
5	15

Tabla 3.3

2.2 Magnitudes inversamente correlacionadas

Así como hay magnitudes directamente correlacionadas, también se pueden encontrar magnitudes inversamente correlacionadas.

Dos magnitudes *A* y *B* están **inversamente correlacionadas** si al aumentar *A* disminuye *B*, o viceversa.

Ejemplo 2

- Las magnitudes de la Tabla 3.4 están inversamente correlacionadas, ya que a medida que aumenta el número de personas el costo por paquete turístico disminuye.
- Las magnitudes de la Tabla 3.5 están directamente correlacionadas, ya que a medida que aumenta el número de personas el descuento por paquete turístico aumenta.

Número de personas	Costo del paquete por persona ($)
10	1 800 000
20	1 750 000
30	1 700 000
40	1 600 000
50	1 500 000

Tabla 3.4

Número de personas	Descuento del paquete por persona ($)
10	25 000
20	40 000
30	60 000
40	80 000
50	100 000

Tabla 3.5

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Determina si cada par de magnitudes están correlacionadas. En caso afirmativo, escribe si la correlación es directa o inversa.

a. Altura de un edificio y número de personas que lo habitan.

b. Velocidad de un auto y tiempo que tarda en frenar.

c. Número de habitantes de una población y densidad demográfica en el pueblo.

d. Número de obreros para construir un edificio y tiempo que tardan en terminar la obra.

e. Capacidad de una botella y número de botellas que se necesitan para envasar cierta cantidad de líquido.

f. Número de vacas lecheras y cantidad de litros de leche producida.

g. Número de trabajadores y tiempo que emplean en hacer una obra.

Comunicación

2 Califica como verdadera (V) o falsa (F) cada una de las afirmaciones.

a. Si dos magnitudes están directamente correlacionadas, entonces al duplicar una la otra también se duplica. ( )

b. Si una magnitud es constante, no puede estar correlacionada con ninguna magnitud. ( )

c. Dos magnitudes no pueden estar correlacionadas de forma directa e inversa simultáneamente. ( )

3 Completa la Tabla 3.6 de manera que la magnitud *A* esté directamente correlacionada con la magnitud *B* e inversamente correlacionada con la magnitud *C*.

Magnitud *A*	Magnitud *B*	Magnitud *C*
10	100	100
20		
30		
40		
50		

Tabla 3.6

Razonamiento

4 Decide cuál de las gráficas representa magnitudes correlacionadas y explica por qué.

a.

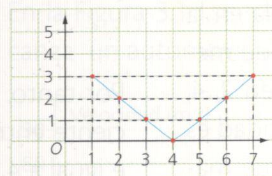


Figura 3.2

b.

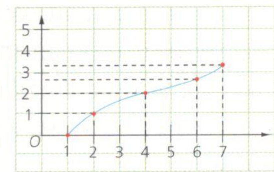


Figura 3.3

c.

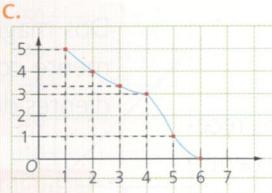


Figura 3.4

d.

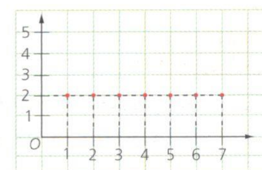


Figura 3.5

Resolución de problemas

5 El profesor de educación física de un colegio recomienda a sus estudiantes tomar por lo menos 500 ml de agua antes de realizar actividad física, 500 ml durante el ejercicio (cada 15-20 minutos) y por lo menos 500 ml después del ejercicio.

a. ¿Qué tipo de correlación existe entre el tiempo que un estudiante invierte en cierta actividad física y la cantidad de agua que debe consumir?

b. ¿La cantidad de agua que se consume antes de la actividad está correlacionada con el tiempo que dura la actividad?

Evaluación del aprendizaje

Propón tres magnitudes (*A*, *B* y *C*) que cumplan las condiciones indicadas en cada caso.

a. *A* y *B* no están correlacionadas, *B* y *C* no están correlacionadas, pero *A* y *C* están directamente correlacionadas.

b. *A* y *B* están directamente correlacionadas, *B* y *C* están directamente correlacionadas, pero *A* y *C* no están correlacionadas.

c. *A* y *B* están inversamente correlacionadas, *B* y *C* no están correlacionadas, y *A* y *C* están directamente correlacionadas.

3 Proporcionalidad directa

Saberes previos

En su práctica de natación, Catalina tardó un minuto en los 50 metros de recorrido. Con esa información elabora una tabla en la cual se registre la cantidad de metros que alcanza Catalina en 2, 4, 5, 6 y 8 minutos, si su velocidad es constante. Determina de qué manera se relacionan las magnitudes.

Analiza

Laura publicará un libro de recetas. Para mostrar la relación entre la cantidad de ingredientes y el número de porciones, incluirá gráficas y tablas. La Tabla 3.7 acompañará la receta para elaborar un ponqué.

Número de porciones	Número de huevos
8	2
16	4
24	6
32	8

Tabla 3.7

- ¿Qué tipo de relación presentan tales magnitudes?

Conoce

En la Tabla 3.7 se observa que al aumentar el número de porciones aumenta el número de huevos. Además, cuando se calcula la razón entre el número de porciones y el respectivo número de huevos se tiene que:

$$\frac{8}{2} = \frac{16}{4} = \frac{24}{6} = \frac{32}{8} = 4$$

Por tanto, como las magnitudes están directamente correlacionadas y el cociente entre las cantidades correspondientes de las magnitudes es constante e igual a 4, se dice que las **magnitudes** son **directamente proporcionales** y el cociente 4 es la **razón de proporcionalidad**.

Dos magnitudes *A* y *B* son **directamente proporcionales** si están directamente correlacionadas y el cociente entre cada par de valores correspondientes de las magnitudes es constante.

Ejemplo 1

Si se quiere hallar el número de huevos que se necesitan para preparar un ponqué para 100 personas, se establece una proporción en la cual una de las razones contiene el valor desconocido y la otra corresponde a uno de los pares de valores que se relacionan en la Tabla 3.7. Luego, se encuentra el valor desconocido aplicando la propiedad fundamental de las proporciones.

$$\frac{8}{2} = \frac{100}{x} \Rightarrow 8 \cdot x = 2 \cdot 100 \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 100}{8} \Rightarrow x = 25$$

Así, para preparar el ponqué para 100 personas se requieren 25 huevos.

La representación gráfica de magnitudes directamente proporcionales corresponde a parejas de puntos (a, b) que están ubicados sobre una recta que pasa por el punto $(0, 0)$.

Ejemplo 2

En la Tabla 3.8 se registran las distancias recorridas por un automóvil que viaja a velocidad constante en diferentes intervalos de tiempo. Estas magnitudes son directamente proporcionales, y su correspondiente representación gráfica se muestra en la Figura 3.6.

Tiempo (h)	Distancia (km)
2	140
3,5	245
4	280
4,5	315
5	350

Tabla 3.8

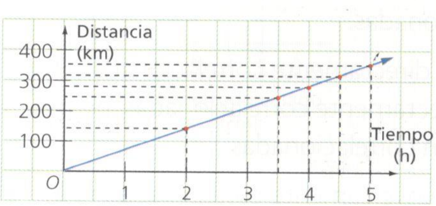


Figura 3.6

La razón entre la distancia y el tiempo es la velocidad.

Entonces, como $\frac{140}{2} = \frac{245}{3{,}5} = \frac{280}{4} = \frac{315}{4{,}5} = \frac{350}{5} = 70$, se dice que la velocidad constante del automóvil durante el recorrido fue de 70 km/h.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Halla la razón de proporcionalidad de cada par de magnitudes directamente proporcionales y completa la tabla respectiva.

a.

Magnitud A	4	8	16	
Magnitud B		24		15

Tabla 3.9

b.

Magnitud A		4	6	8
Magnitud B	3	6		

Tabla 3.10

Razonamiento

2 En una fábrica el salario es directamente proporcional al número de horas trabajadas.

a. Juan trabaja el doble de horas que Mateo; luego, el salario de Juan será ______ que el de Mateo.

b. Para obtener en una semana el triple del salario recibido en la semana anterior, Juan debe trabajar ______.

Modelación

3 Señala cuáles de las gráficas representan magnitudes directamente proporcionales. Luego, halla la razón de proporcionalidad que corresponde en cada caso.

a.

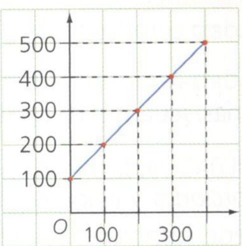


Figura 3.7

b.

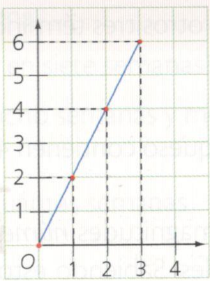


Figura 3.8

c.

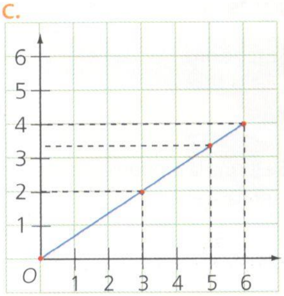


Figura 3.9

d.

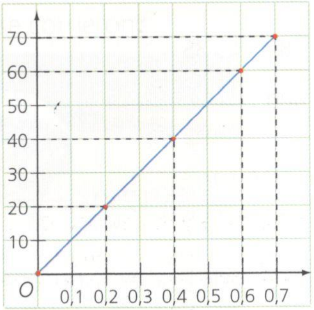


Figura 3.10

Resolución de problemas

4 Juan gastó $ 32 000 en las entradas a cine de cinco personas. ¿Cuánto dinero habría gastado si hubiesen asistido dos personas más?

5 En la Figura 3.11 se representa la velocidad que alcanza un automóvil al transcurrir el tiempo.

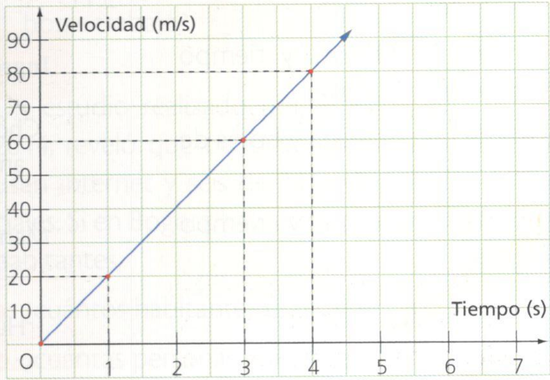


Figura 3.11

a. Explica si son o no directamente proporcionales las magnitudes velocidad y tiempo.

b. Halla la razón de proporcionalidad.

c. Determina cuánto tiempo tardará el automóvil para alcanzar una velocidad de 60 m/s.

d. Halla la velocidad que alcanzará el automóvil a los 7 s.

Evaluación del aprendizaje

i Para pintar una pared de 54 m^2 de superficie se utiliza un litro de pintura.

a. Explica si son o no directamente proporcionales las magnitudes cantidad de pintura y superficie que se puede pintar.

b. Haz una tabla en la que consignes la cantidad de m^2 que se pueden pintar con diversas cantidades de pintura.

c. Elabora una gráfica que represente la relación entre las dos magnitudes.

ii Diego compró cuatro agendas por $ 60 000.

a. ¿Cuánto gastará María si compra tres agendas iguales a las de Diego?

b. ¿Cuántas agendas como las de Diego puede comprar Beatriz con $ 150 000?

4 Regla de tres simple directa

Saberes previos

Identifica en las siguientes parejas de magnitudes, cuáles están directamente relacionadas y explica por qué.

- Costo y número de artículos comprados.
- Número de obreros y tiempo para realizar una tarea.
- Edad de una persona y horas de sueño.
- Distancia recorrida y tiempo empleado.

Analiza

Juliana preparará brownies para la celebración del cumpleaños de su padre a partir de la receta que encontró en un libro de cocina (Figura 3.12).

Brownies

Ingredientes

150 g de chocolate amargo
75 g de mantequilla
2 huevos
200 g de azúcar
100 g de harina
1/2 taza de nueces picadas

Porciones
8
Tiempo
1 h
Calorías
400

Figura 3.12

- Si a la fiesta asistirán doce personas, ¿qué cantidad de cada ingrediente debe usar Juliana?

Conoce

Las magnitudes *número de porciones* y *cantidad de ingredientes* son directamente proporcionales. Por tanto, para determinar la cantidad de ingredientes que debe usar Juliana en la preparación de doce brownies si se conocen los ingredientes para ocho porciones, se debe plantear una proporción por cada ingrediente y luego hallar el término desconocido, como se muestra en la Tabla 3.11.

Ingrediente	Proporción	Cálculo del término desconocido	Cantidad para 12 personas
Chocolate amargo	$\frac{8}{150} = \frac{12}{x}$	$x = \frac{150 \cdot 12}{8} = 225$	225 g
Mantequilla	$\frac{8}{75} = \frac{12}{x}$	$x = \frac{75 \cdot 12}{8} = 112{,}5$	112,5 g
Huevos	$\frac{8}{2} = \frac{12}{x}$	$x = \frac{2 \cdot 12}{8} = 3$	3
Azúcar	$\frac{8}{200} = \frac{12}{x}$	$x = \frac{200 \cdot 12}{8} = 300$	300 g
Harina	$\frac{8}{100} = \frac{12}{x}$	$x = \frac{100 \cdot 12}{8} = 150$	150 g
Nueces picadas	$\frac{8}{0{,}5} = \frac{12}{x}$	$x = \frac{0{,}5 \cdot 12}{8} = \frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$ taza

Tabla 3.11

La **regla de tres simple directa** es un procedimiento utilizado para resolver problemas que involucran magnitudes directamente proporcionales. Este método permite determinar el término desconocido de una proporción cuando se conocen los otros tres términos.

Ejemplo 1

Si ocho porciones de queso contienen 400 calorías, ¿cuántas calorías contienen 35 porciones?

En esta situación las magnitudes *número de porciones* y *calorías* son directamente proporcionales. Sabiendo esto, se puede responder la pregunta a partir del siguiente procedimiento.

Número de porciones	8	35
Calorías	400	x

Tabla 3.12

Se relacionan los datos en una tabla.

$$\frac{8}{400} = \frac{35}{x} \Rightarrow x = \frac{400 \cdot 35}{8} = 1\,750$$

Se forma la proporción correspondiente y se halla el valor desconocido.

Por tanto, 35 porciones de queso contienen 1 750 calorías.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Escribe la proporción correspondiente a cada situación propuesta.

a. Si un pasaje de Transmilenio cuesta $ 1 800, ¿cuánto cuestan cinco pasajes?

b. Un automóvil recorre 48 km en 35 minutos. ¿Cuántos kilómetros recorre en una hora?

c. La temperatura de un horno sube 2 °C cada cinco minutos. ¿Cuánto ha subido la temperatura al cabo de una hora?

d. Para cocinar una taza de arroz se emplean dos de agua. ¿Cuántas tazas de arroz se cocinaron si se usaron diez de agua?

e. En un salón de clase de grado séptimo por cada seis niñas hay nueve niños. Si hay 18 niñas, ¿cuántos niños hay?

Resolución de problemas

2 Escribe un problema que se resuelva planteando la proporción dada en cada caso.

a. $\frac{4}{1600} = \frac{17}{x}$ b. $\frac{50}{x} = \frac{3}{48}$

c. $\frac{7}{12} = \frac{x}{30}$ d. $\frac{5}{38000} = \frac{2}{x}$

3 Juan trabaja 48 horas a la semana.

a. ¿Cuántas horas trabaja Juan en siete semanas?

b. ¿Cuántas horas trabajó en ocho semanas y media?

c. Si Juan trabajó 240 horas, ¿cuántas semanas laboró?

4 En una competencia de ciclismo por cada tres etapas se deben recorrer 420 km. Si en total se recorrieron 2 100 km, ¿cuántas etapas se corrieron?

5 Milena gana $ 45 000 por cuatro horas de trabajo.

a. ¿Cuánto dinero gana Milena en once horas?

b. Si Milena trabaja seis horas diarias, ¿cuánto dinero gana en diez días?

c. Si Milena ganó en el mes $ 1 912 500, ¿cuántas horas trabajó?

6 Un estudio realizado por el Ministerio TIC en el 2014, reveló que ocho de cada diez colombianos usan internet y seis de cada diez visitan redes sociales. Si en Bogotá hay aproximadamente 7 800 000 habitantes,

a. ¿cuántos habitantes usan internet?

b. ¿cuántas personas visitan redes sociales?

c. ¿cuál es la razón entre los que usan internet y los que visitan las redes sociales?

Evaluación del aprendizaje

✓ El consumo diario aproximado de agua por persona, en litros, se muestra en la Figura 3.13.

Consumo aproximado en litros por persona	
Ducha:	60 litros (15 min)
Lavado de manos:	3,5 litros (55 s)
Baño:	6 litros
Lavadora:	50 litros
Aseo casa:	10 litros

Figura 3.13

a. Si una persona tarda en la ducha 20 minutos, ¿cuántos litros de agua consume?

b. Si una persona tarda dos minutos lavándose las manos, ¿cuántos litros de agua consume?

c. Si una persona limpia su casa cuatro días al mes, ¿cuántos litros de agua consume semestralmente aseando su casa?

d. Si en una casa viven cuatro personas, ¿cuántos litros de agua consumen en el mes en la ducha, el lavado de manos y el uso del baño?

5 Aplicaciones de la proporcionalidad directa

Saberes previos

A un almacén de artesanías llega un pedido de 100 ruanas artesanales. 30 rojas, 25 rosadas, 15 amarillas, 10 azules y el resto, verdes. Escribe la razón que representa cada color respecto al total de ruanas recibidas. Expresa como decimal cada razón.

Analiza

Los resultados de una encuesta aplicada a 800 personas en ocho ciudades del país sobre lo que acostumbran a hacer cuando van al centro comercial, se muestran en la Figura 3.14.

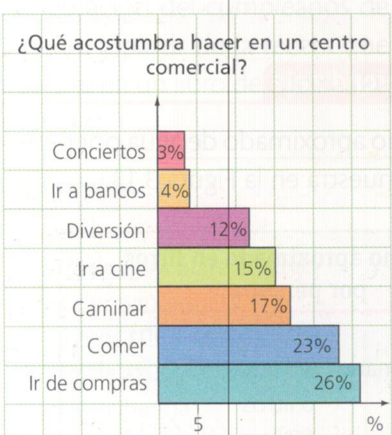


Figura 3.14

- De los encuestados, ¿cuántas personas acostumbran a ir de compras cuando visitan el centro comercial?

Conoce

5.1 Tanto por ciento o porcentaje

En la Figura 3.14 se observa que el 26% de las 800 personas encuestadas van de compras cuando visitan el centro comercial; por tanto, para responder la pregunta de la situación se plantea una proporción en la que una de las razones corresponde al porcentaje 26% expresado como una fracción cuyo denominador es 100.

$$\frac{26}{100} = \frac{x}{800} \Rightarrow x = \frac{26 \cdot 800}{100} \Rightarrow x = 208$$

Entonces, 208 personas acostumbran a ir de compras al centro comercial.

Un **tanto por ciento** o **porcentaje** es una razón cuyo término consecuente es 100. Esta razón representa una parte de un total de 100 unidades y se expresa mediante el símbolo %.

Ejemplo 1

Un tanque de agua tiene $\frac{3}{4}$ de su capacidad ocupada. ¿Qué porcentaje de su capacidad está ocupada?

Para responder la pregunta, se establece una proporción en la cual una de las razones es $\frac{3}{4}$ y la otra tiene denominador 100.

$$\frac{3}{4} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 100}{4} = 75$$

Así, $\frac{3}{4}$ de la capacidad del tanque equivalen al 75%.

5.2 Interés simple

Cuando una persona o entidad presta dinero a otra por un plazo determinado, cobra una tasa de interés por el uso de la cantidad prestada; el dinero adicional que se cobra en compensación por el préstamo, se denomina **interés** y es proporcional al capital inicial, el tiempo y la tasa de interés.

Si se llama i al interés producido por un capital C en t años con una tasa de interés del r % anual, se tiene que $i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$.

Ejemplo 2

El interés que producirá durante siete meses un capital de \$ 420 000 colocado en un banco al 4% anual, se calcula de la siguiente manera.

$$i = \frac{420\,000 \cdot 4 \cdot 1}{100} = 16\,800$$

Si se tiene en cuenta que un año tiene 12 meses, el interés en un mes será de:

$$i = \frac{16\,800}{12} = 1\,400$$

Al cabo de siete meses se habrá pagado $7 \cdot 1\,400 = 9\,800$ pesos de interés.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Completa la Tabla 3.13.

Porcentaje	Decimal	Fracción decimal
25%		
	0,5	
		$\frac{12}{100}$
	0,68	
74%		

Tabla 3.13

2 Halla los siguientes porcentajes.

a. 15% de 300
b. 25% de 8 000
c. 50% de 7 500
d. 45% de 1 000

3 Plantea una proporción y encuentra el valor de x en cada caso.

a. El 30% de x es 75.
b. El 47% de x es 141.
c. El 18,50% de x es 43 734.
d. El 1% de x es 2.

Comunicación

4 Responde las preguntas teniendo en cuenta que Milena tiene un capital de $ 15 000 000.

a. ¿Al cuánto por ciento anual se debe colocar el capital para obtener un interés de $ 1 950 000?
b. Si en un año Milena recibió $ 900 000 de interés, ¿cuál fue el interés mensual?

Razonamiento

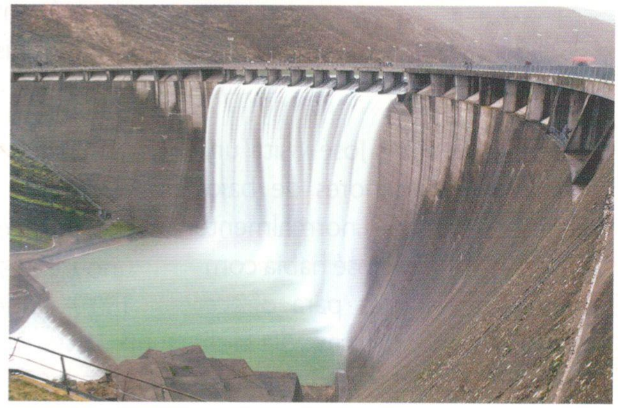
5 Completa la Tabla 3.14 en la cual se muestran las compras realizadas por Ana en temporada de descuentos.

Artículo	Valor sin descuento	Descuento	Valor con descuento
Camiseta	$ 25 000	20%	
Chaqueta	$ 200 000		$ 170 000
Pantalón	$ 70 000	10%	
		Total	

Tabla 3.14

Resolución de problemas

6 Un embalse de 425 hm^3 se encontraba el año pasado a un 60% de su capacidad. Este año descendió respecto al año anterior un 77%. ¿Cuál es su capacidad actualmente?

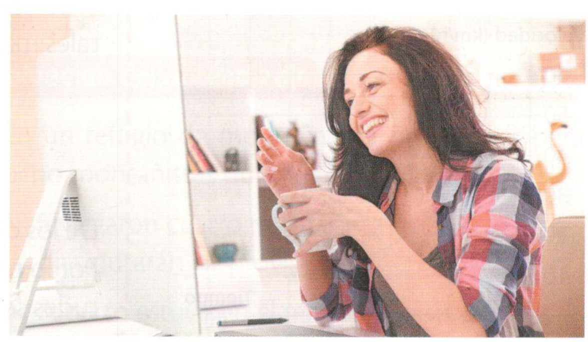


7 En determinada ciudad reciclaron en un año 1 592 toneladas de cartón. Al año siguiente, tras una campaña de información, la cantidad reciclada aumentó un 5,5%. ¿Cuántas toneladas de cartón fueron recicladas ese año?

Evaluación del aprendizaje

i Pilar piensa viajar en avión a una ciudad americana; consulta el precio por internet, y el pasaje de ida y vuelta en la compañía A le cuesta $ 1 620 000; luego consulta en la compañía B y el precio anterior se incrementa en un 5%.

¿Cuánto cuesta el pasaje en la compañía B?



ii Elsa deja en el banco $ 3 000 000 al 6% anual durante tres años. Pasado ese tiempo, decide dejar el capital y los intereses dos años más, también al 6%. Si inicialmente los $ 3 000 000 los hubiese dejado cinco años al 6%, ¿obtendría más intereses?

6 Proporcionalidad inversa

Saberes previos

Reúnete con un compañero y propongan tres ejemplos de parejas de magnitudes que estén inversamente correlacionadas.

Analiza

El día de los niños José visita una fundación de menores de bajos recursos a la que normalmente asisten 75 de ellos. José había comprado 150 naranjas para ofrecer dos a cada uno, pero ese día la directora le dice que solo asistieron 50 niños.

- Si José quiere repartir las 150 naranjas entre los niños que asistieron, ¿cuántas le corresponden a cada uno?

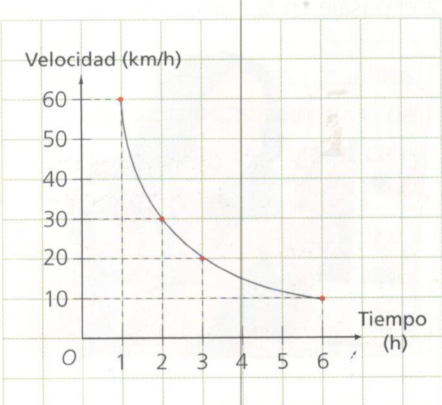


Figura 3.15

Conoce

6.1 Magnitudes inversamente proporcionales

Entre menos niños asistan a la fundación, más naranjas le corresponderán a cada uno. Esto indica que las magnitudes *número de niños* y *cantidad de naranjas* están inversamente correlacionadas. En la Tabla 3.15 se registran los datos que suministra el problema.

Número de niños	75	50
Cantidad de naranjas	2	x

Tabla 3.15

El producto del número de niños por la cantidad de naranjas que recibe cada uno debe ser igual a la cantidad total de naranjas que compró José, es decir, 150. Así que:

$$75 \cdot 2 = 150 \text{ y } 50 \cdot x = 150$$

$$\text{Luego, } x = \frac{150}{50} = 3$$

Entonces, a cada niño le corresponden tres naranjas.

Dos magnitudes A y B son **inversamente proporcionales** si están inversamente correlacionadas y se verifica que:

Magnitud A	a	b	c	...
Magnitud B	a'	b'	c'	...

Tabla 3.16

$a \cdot a' = b \cdot b' = c \cdot c' ... = k$, siendo k **la razón de proporcionalidad**.

Ejemplo 1

La velocidad y el tiempo son magnitudes inversamente proporcionales, pues a mayor velocidad empleada para recorrer una distancia el tiempo que se invierte en el recorrido es menor. En la Tabla 3.17 se observa la relación entre tales magnitudes al recorrer una distancia constante de 60 km.

Velocidad (km/h)	60	30	20	10
Tiempo (h)	1	2	3	6

Tabla 3.17

De los datos de la tabla se infiere que $60 \cdot 1 = 30 \cdot 2 = 20 \cdot 3 = 10 \cdot 6 = 60$. Por lo tanto, 60 es la razón de proporcionalidad. La relación entre las magnitudes se representa en la Figura 3.15.

6.2 Regla de tres simple inversa

Cuando dos magnitudes que intervienen en una proporción son inversamente proporcionales, el proceso para hallar el valor faltante, si se conocen tres de ellos, se denomina **regla de tres simple inversa**.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 2

Para los cursos vacacionales se contratan doce instructores. Cada uno tiene a cargo un grupo de 36 estudiantes. ¿Cuántos instructores se necesitarían si se quisieran organizar grupos de 24 estudiantes?

Las magnitudes *número de instructores* y *número de estudiantes* son inversamente proporcionales. Como el total de estudiantes no varía, se tiene que:

$$12 \cdot 36 = 24 \cdot x \Rightarrow x = \frac{12 \cdot 36}{24} = 18$$

Si se quisieran grupos de 24 estudiantes se requerirían 18 instructores.

Actividades de aprendizaje

Modelación

1 Representa gráficamente las magnitudes inversamente proporcionales que se muestran en las tablas 3.18 y 3.19.

a.

Velocidad (km/h)	8	12	24	48	96
Tiempo (h)	6	4	2	1	0,5

Tabla 3.18

b.

Dinero ($)	5 000	2 500	2 000	1 000	500
Número de personas	2	4	5	10	20

Tabla 3.19

Ejercitación

2 Halla la constante de proporcionalidad inversa en cada caso y completa las tablas 3.20 y 3.21.

a.

Número de salones	2	3	6	12	54
Niños por salón					4

Tabla 3.20

b.

Cantidad de cajas	6	12	24	36	48
Lápices por caja			120		

Tabla 3.21

3 Determina el valor de x en cada caso, sabiendo que las magnitudes son inversamente proporcionales.

a.

Número de obreros	5	20
Tiempo (h)	12	x

Tabla 3.22

b.

Porciones de pizza	3	2
Número de personas	8	x

Tabla 3.23

Resolución de problemas

4 Un barco que navega a 24 km/h tardó 12 h en hacer un recorrido. ¿Cuánto tardará en hacer el mismo recorrido otro barco que navega a 32 km/h?

5 Para envasar cierta cantidad de combustible se necesitan 16 canecas de 200 L. Para envasar la misma cantidad en 64 canecas, ¿de qué capacidad tienen que ser?

6 Un rectángulo tiene 10 m de base y 7 m de altura. Otro rectángulo de igual área tiene 4 m de base. ¿Cuál será la medida de su altura?

7 Tres jardineros hicieron el jardín de un parque trabajando en total 120 horas. ¿Cuántas horas tendrán que trabajar nueve jardineros para hacer un jardín igual al anterior?

Evaluación del aprendizaje

i En un refugio de montaña hay provisiones para ocho montañistas durante tres días. Responde:

a. Si llegaron cuatro montañistas más, ¿cuántos días durarán las provisiones?

b. Alberto estuvo en el refugio con sus amigos durante cuatro días. ¿Cuántos amigos eran en total?

ii Cuatro pintores tardan seis horas en pintar una casa. Calcula cuántos días tardarán en pintar esa misma casa ocho pintores.

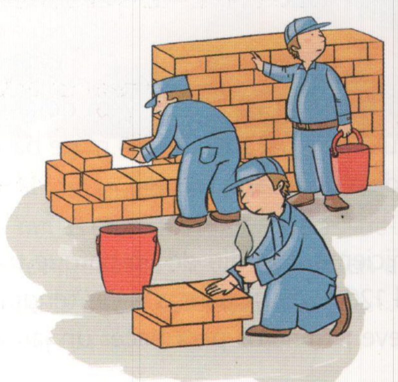
7 Regla de tres compuesta

Saberes previos

Forma un grupo con otros dos compañeros. Identifiquen en su entorno cotidiano tres magnitudes *A*, *B* y *C*, de manera que con ellas puedan proponer una situaciones en la cual las magnitudes *A* y *B* sean inversamente proporcionales; las magnitudes *B* y *C* sean directamente proporcionales y las magnitudes *A* y *C* sean directamente proporcionales. Compartan su propuesta con el resto del grupo.

Analiza

El director de una obra ha establecido que para levantar doce paredes, contratando ocho obreros gasta diez días.



- ¿Cuánto tiempo empleará para levantar 30 paredes, contando con diez obreros?

Conoce

Para resolver este problema es necesario utilizar una **regla de tres compuesta**, como se muestra a continuación.

1. Se plantea una razón para cada una de las magnitudes involucradas en la situación.

Cantidad de paredes	Cantidad de obreros	Tiempo de obra (en días)
$\frac{12}{30}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{10}{x}$

2. Se determina la relación entre cada una de las dos primeras magnitudes con la tercera magnitud que es la que contiene la incógnita.

- Las magnitudes *cantidad de paredes* y *tiempo de la obra* son magnitudes directamente proporcionales.
- Las magnitudes *cantidad de obreros* y *tiempo de la obra* son magnitudes inversamente proporcionales.

3. Se plantea una sola ecuación y se halla el término desconocido.

$$\frac{12}{30} \cdot \frac{10}{8} = \frac{10}{x} \Rightarrow \frac{120}{240} \Rightarrow \frac{10}{x} \Rightarrow x = 20$$

Por lo tanto, para levantar 30 paredes contratando diez obreros se requieren 20 días.

Una **regla de tres compuesta** es un procedimiento utilizado para resolver problemas que involucran más de dos magnitudes proporcionales.

Las magnitudes *x*, *y* y *z* (magnitud que contiene el dato desconocido) se pueden relacionar con las siguientes razones.

Magnitud *x*	Magnitud *y*	Magnitud *z*
$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{e}{f}$

Con base en estas, se puede plantear la ecuación que permite resolver un problema que involucre la regla de tres compuesta así:

- Si la magnitud *z* es directamente proporcional a las magnitudes *x* y *y*, entonces $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$.
- Si la magnitud *z* es inversamente proporcional a las magnitudes *x* y *y*, entonces $\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} = \frac{e}{f}$.
- Si la magnitud *z* es directamente proporcional a la magnitud *x* e inversamente proporcional a la magnitud *y*, entonces $\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{e}{f}$.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Determina la relación de proporcionalidad existente entre cada par de magnitudes en cada caso.

a. Área del piso - cantidad de baldosas - tiempo de embaldosado.

b. Velocidad - distancia recorrida - tiempo empleado.

c. Artículos producidos - número de artículos producidos por hora - tiempo total de la producción.

d. Cantidad de líquido en un tanque - cantidad de grifos que suministran líquido - tiempo de llenado.

e. Cantidad de dinero recaudado - número de provisiones - valor de cuota por persona.

2 Analiza cada esquema y realiza las actividades.

Número de máquinas	Producción de cada máquina	Producción total
$\frac{5}{8}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{20}{x}$

Presupuesto total	Número de socios	Aporte individual
$\frac{2\,000\,000}{6\,000\,000}$	$\frac{50}{120}$	$\frac{40\,000}{x}$

Número de empleados	Producción de cada empleado	Producción total
$\frac{3}{x}$	$\frac{25}{320}$	$\frac{75}{160}$

a. Redacta el enunciado y la pregunta que sugiere cada uno de los esquemas planteados.

b. Analiza la relación que existe entre la magnitud a la que corresponde la incógnita y las otras dos magnitudes.

c. Plantea la ecuación que relacione las tres variables.

Resolución de problemas

3 Se sabe que para hacer doce paredes contratando a ocho obreros se emplean diez días.

a. ¿Cuántos obreros se necesitan para levantar 24 paredes en 16 días?

b. ¿Cuántas paredes se podrán levantar si se cuenta con doce obreros y un periodo de 30 días?

4 Para un grupo de 20 excursionistas, se requieren 25 cajas de enlatados para sobrevivir durante cinco días.

a. ¿Para cuánto tiempo alcanzarán 20 cajas de enlatados si asisten diez excursionistas?

b. ¿Para cuántos excursionistas alcanzarán 40 cajas de enlatados si la excursión dura diez días?

c. ¿Cuántas cajas de enlatados se requerirán si asisten 20 excursionistas por un tiempo de ocho días?

d. ¿Para cuánto tiempo alcanzarán 20 cajas de enlatados si asisten los 20 excursionistas?

e. ¿Para cuántos excursionistas alcanzarán 12 cajas de enlatados si la excursión dura cuatro días?

f. ¿Cuántas cajas de enlatados se necesitan si asisten cinco excursionistas más y la excursión dura tres días más?

Evaluación del aprendizaje

i Dos hombres que trabajan al mismo ritmo recibieron \$ 292 800 por un trabajo que realizaron entre los dos. El primero trabajó cinco horas diarias durante 20 días y recibió \$ 120 000. Si el segundo trabajó ocho horas diarias, ¿durante cuántos días trabajó?

ii Los habitantes de una casa han establecido que tres cuartas partes del tanque del agua les alcanzan para cuatro días, consumiendo 9 L diarios. ¿Cuántos litros diarios podrán consumir si cuentan con la mitad del tanque y requieren que les dure seis días?

8 Lenguaje algebraico

Saberes previos

Completa la tabla para que se cumpla la relación numérica que se indica.

- Son tres números consecutivos.

1.º grupo	13		
2.º grupo		−26	
3.º grupo			72

Tabla 3.24

Analiza

Jairo tiene cierta cantidad de libros, y Ana tiene el triple de los libros que tiene Jairo más cinco.

- ¿Cómo se puede expresar el número de libros que tiene Ana?

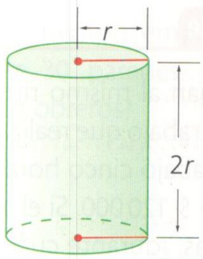


Figura 3.16

Conoce

Si se representa el número de libros que tiene Jairo con la letra a, entonces la expresión $3a$ corresponde al triple de los libros que tiene Jairo, y la expresión $3a + 5$ indica el triple de los libros que tiene Jairo más 5. Esta expresión representa la cantidad de libros que tiene Ana.

El **lenguaje algebraico** utiliza una combinación de números y letras relacionados por los signos de las operaciones con el fin de expresar información.

8.1 Uso de las letras para expresar relaciones

Con las letras se expresan de forma concisa relaciones y propiedades entre magnitudes. Las expresiones literales reciben el nombre de fórmulas.

Ejemplo 1

Un pintor recubre de barniz piezas cuadradas de madera. Cobra \$ 17 500 por metro cuadrado barnizado y \$ 35 000 por el desplazamiento. Expresa la relación de la superficie barnizada y el costo mediante una fórmula.

Si se designa con x el lado del cuadrado, x^2 es la superficie barnizada. Si con la letra y se designa el costo, entonces la fórmula es:

$$y = 17\,500 \cdot x^2 + 35\,000$$

8.2 Expresiones algebraicas

Una **expresión algebraica** es una combinación de números y letras relacionados entre sí por los signos de las operaciones aritméticas: adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.

Ejemplo 2

El volumen del cilindro de la Figura 3.16, cuya altura h mide el doble del radio r de la base, se calcula mediante la expresión:

$$\begin{aligned} V &= A_{\text{base}} \cdot h \\ &= \pi r^2 \cdot 2r \\ &= 2\pi r^3 \end{aligned}$$

8.4 Valor numérico de una expresión algebraica

El **valor numérico de una expresión algebraica** es el número que se obtiene al sustituir las letras por números determinados y hacer las operaciones indicadas.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 3

Para calcular el volumen del cilindro de la Figura 3.16, cuando $r = 3$, basta con tener en cuenta que en el ejemplo 2 se dedujo que el volumen del cilindro se representa con la expresión $V = 2\pi r^3$.

Entonces se reemplaza el valor de r.

$$V = 2\pi r^3 = 2\pi(3)^3 = 2\pi(27) = 54\pi$$

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Utiliza el lenguaje algebraico para escribir las siguientes expresiones.

a. El cuadrado de un número más su mitad.

b. El triple de un número menos cuatro.

c. El triple de un número más su cuarta parte.

2 Expresa los siguientes enunciados en lenguaje algebraico. Llama x y y a las edades actuales de dos hermanos.

a. La suma de las edades que tenían los hermanos hace 5 años.

b. El producto de las edades que tendrán dentro de 6 años.

c. La diferencia entre la edad del hermano mayor y la mitad de la edad del hermano menor.

3 Expresa algebraicamente el perímetro y el área de cada uno de los rectángulos de la Figura 3.17.

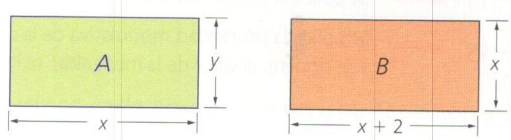


Figura 3.17

Razonamiento

4 Escribe la expresión algebraica del área del trapecio de la Figura 3.18 e indica el significado de las letras.

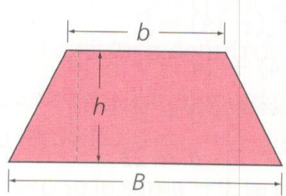


Figura 3.18

Modelación

5 Halla el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para los valores que se indican.

a. $x^2 - x$, para $x = 3$

b. $4x - 5$, para $x = 1$

c. $3z^2 - 10$, para $z = 2$

d. $20 - 2rt^2$, para $r = 1$ y para $t = 5$

Resolución de problemas

6 Un recipiente contiene 6 L de agua y cada hora se vierten en este 0,7 L de agua.

a. Expresa con lenguaje matemático la capacidad del recipiente en función del tiempo.

b. Al cabo de ocho horas y media, ¿cuántos litros de agua contendrá el recipiente?

c. Si la capacidad del recipiente es de 20 L, ¿en cuánto tiempo se llenará completamente?

Evaluación del aprendizaje

i Escribe en cada situación la expresión algebraica que le corresponda.

a. El cociente de dos números consecutivos.

b. El producto de un número con la tercera parte del mismo.

ii Un automóvil, cuyo tanque contiene 40 L de gasolina, consume 5 L por cada 100 km recorridos. Expresa mediante una fórmula los litros de gasolina que quedan en el tanque a medida que el automóvil recorre kilómetros.

9 Ecuaciones con estructura aditiva en los números enteros

Pensamiento variacional

Saberes previos

Las operaciones entre números enteros tienen operaciones inversas. Indica cuál es la operación inversa en cada caso.

- Inversa de la adición.
- Inversa de la multiplicación.
- Inversa de la división exacta.
- Inversa de la sustracción.

Analiza

Violeta tiene una deuda con el banco.

- Si hace un abono de $ 750 000 y aún debe $ 800 000, ¿cuál era su deuda inicial?

Conoce

La situación se puede representar mediante la siguiente **ecuación**:

$$\underbrace{x}_{\text{Deuda inicial}} + \underbrace{750\,000}_{\text{Abono}} = \underbrace{-800\,000}_{\text{Deuda actual}}$$

Para resolver esta ecuación, se utilizan las propiedades de la adición y de las igualdades como se muestra a continuación.

Se suma el opuesto de 750 000 en ambos lados de la igualdad.

$$x + 750\,000 + (-750\,000) = -800\,000 + (-750\,000)$$

Se obtiene 0 como sumando en el lado izquierdo (propiedad invertiva).

$$x + 0 = -1\,550\,000$$

Se despeja x en el lado izquierdo de la igualdad (propiedad modulativa).

$$x = -1\,550\,000$$

Según lo anterior, la deuda inicial de Violeta era de $ 1 550 000.

Una **ecuación de estructura aditiva** se caracteriza porque su operación principal es una adición o una sustracción. Estas ecuaciones son de la forma:

$$x + a = b \quad \text{o} \quad x - a = b$$

La letra x es la **incógnita** de la ecuación.

Ejemplo 1

Observa cómo se resuelve la ecuación $3 + m = -12$

$3 + m = -12$ ← Ecuación

$3 + (-3) + m = -12 + (-3)$ ← Se suma el opuesto de 3 en ambos lados de la igualdad.

$0 + m = -15$ ← Se aplica la propiedad invertiva de la adición.

$m = -15$ ← Se aplica la propiedad modulativa de la adición y se obtiene el valor de la incógnita.

Ejemplo 2

Al sustraer 14 de cierto número, se obtiene 9. ¿Cuál es ese número?

Si se denomina a al número buscado, entonces la ecuación que modela la situación es $a - 14 = 9$. Así, al resolver la ecuación se obtiene:

$$a + (-14) = 9$$
$$a + (-14) + 14 = 9 + 14$$
$$a + 0 = 9 + 14$$
$$a = 23$$

El número es 23.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Determina cuáles de las siguientes expresiones son ecuaciones y cuáles no. Justifica tu respuesta.

a. $40 + x = -15$

b. $27 + 40 + 16 = 83$

c. $p - 89 = 46$

d. $\{[3 + 2 - (9 - 7) + (3 + 4)]\}$

e. $m + 25 + 32 = -91$

f. $32 - 51 - 36 = -55$

g. $y - 3 = -7$

Comunicación

2 Relaciona cada ecuación con su solución.

a. $5 + x = 0$	( ) 25
b. $-17 + x = 0$	( ) 27
c. $30 + x = 0$	( ) -5
d. $x + (-27) = 0$	( ) 30
e. $x + 35 = 0$	( ) 17
f. $-25 + x = 0$	( ) -35
g. $x + (-30) = 0$	( ) -30

3 Resuelve las ecuaciones aplicando las propiedades de la adición de números enteros.

a. $x - 3 = 25$ b. $x + 9 = -234$

c. $-9 = -x + 12$ d. $-15 = x - 8$

e. $x - 23 = -78$ f. $x + 6 = -22$

Modelación

4 Traduce cada enunciado en una ecuación y halla su solución.

a. 17 menos un número es 79.

b. Un número disminuido en 23 es igual a 40.

c. Si a 21 se le suma cierto número, se obtiene 103.

d. La edad de una persona dentro de 7 años será 45.

e. La temperatura actual aumentada en 9 °C da una lectura de 38 °C.

f. Si a un número se le suma -9, se obtiene 24.

Comunicación

5 Escribe un problema que se pueda modelar con cada ecuación y resuélvelo.

a. $x - 6 = -19$ b. $7 = x + (-5)$

c. $-8 + x = 32$ d. $17 + x = 24$

6 Indica el error que se cometió al resolver la ecuación. Luego, corrígelo.

$$60 - 37 = 84 + x$$
$$22 = 84 + x$$
$$22 + (-84) = 84 + (-84) + x$$
$$-62 = 0 + x$$
$$-62 = x$$

Resolución de problemas

7 Un número más 8 es igual a 24. ¿Cuál es el número?

8 La suma de las edades de dos hermanos es 32. Si el menor tiene 15 años, ¿cuántos años tiene el mayor?

9 Dos niños reúnen nueve libros. Si uno de ellos aporta cuatro libros, ¿cuántos libros aporta el otro?

10 La suma de dos números enteros es 340. Si uno de los sumandos es -130, ¿cuál es el otro sumando?

11 La suma de dos números es 85. Si el mayor es 49, ¿cuál es el menor?

Evaluación del aprendizaje

i Las edades de Javier y Juanita suman 37 años. Si Javier tiene 15 años, ¿cuántos años tiene Juanita?

ii ¿Cuántos pisos faltan para subir al piso 42, si te encuentras en el 17?

iii Con el dinero que tengo y \$ 24 700 más, podría pagar una deuda de \$ 52 500 y me sobrarían \$ 3 700. ¿ Cuánto dinero tengo?

10 Ecuaciones con estructura multiplicativa en los números enteros

Saberes previos

Reta a un compañero con tu agilidad mental para resolver este acertijo. Diego piensa un número, le agrega 25 y obtiene -46. ¿Qué número pensó Diego?

Analiza

El producto de dos números es 300.

- Si uno de los factores es -15, ¿cuál es el otro?

Conoce

Una manera de encontrar solución al problema consiste en plantear una ecuación como la que se muestra a continuación.

$$(-15) \cdot x = 300$$

En esta ecuación, la incógnita x representa el número que se debe hallar. Para resolverla, se aplican tanto las propiedades de las igualdades como las de la multiplicación de números enteros.

$(-15) \cdot x = 300$	Ecuación
$x \cdot (-15) = 300$	Se aplica la propiedad conmutativa de la multiplicación.
$x \cdot (-15) \div (-15) = 300 \div (-15)$	Se divide en ambos lados de la igualdad entre (-15).
$x \cdot 1 = -20$	Se realizan las divisiones indicadas en ambos lados de la igualdad.
$x = -20$	Se aplica la propiedad modulativa de la multiplicación y se obtiene la solución.

Por lo tanto, el número buscado es -20.

Las **ecuaciones de estructura multiplicativa** se caracterizan porque su operación principal es una multiplicación o una división. Son de la forma: $a \cdot x = b$ o $x \div a = b$, donde x es la incógnita de la ecuación.

Ejemplo 1

Al resolver ecuaciones de estructura multiplicativa, conviene tener en cuenta la siguiente equivalencia.

$$\begin{array}{l|l} \text{Dividendo} & \underline{\text{Divisor}} \\ \text{Residuo} & \text{Cociente} \end{array}$$

$$\text{Dividendo} = \text{Cociente} \cdot \text{Divisor} + \text{Residuo}$$

De acuerdo con lo anterior, para resolver la ecuación $x \div (-9) = 12$, se puede encontrar la multiplicación equivalente.

$$x \div (-9) = 12 \text{ es equivalente a } x = (-9) \cdot 12$$

Por lo tanto, al resolver la última ecuación se obtiene que: $x = -108$.

Ejemplo 2

La ecuación $-13x + 65 = 39$ se resuelve de la siguiente manera.

$-13x + 65 = 39$	Ecuación dada.
$-13x + 65 - 65 = 39 - 65$	Se adiciona el opuesto de 65 en ambos lados de la ecuación.
$-13x + 0 = -26$	Propiedad invertiva de la adición.
$-13x = -26$	Propiedad modulativa de la adición.
$x \cdot (-13) \div (-13) = -26 \div (-13)$	Se divide por -13 en ambos lados de la igualdad.
$x \cdot 1 = 2 \Leftrightarrow x = 2$	Propiedad modulativa de la multiplicación.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 3

El cociente exacto entre dos números enteros es 134. Si el divisor es -28, ¿cuál es el dividendo?

Si se designa con x al dividendo, entonces se puede plantear la ecuación:

$$x \div (-28) = 134$$

A su vez, tal ecuación es equivalente a: $x = 134 \cdot (-28)$. Por lo cual, $x = -3752$.

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1. Halla el inverso multiplicativo de estos números.

a. -72 b. 585 c. -25

d. -54 e. 12 f. 31

g. 167 h. x i. -3

2. Determina cuáles de las siguientes expresiones son ecuaciones multiplicativas y cuáles no. Justifica tu respuesta.

a. $40x = -120$ b. $2 + 60 + x = 83$

c. $x - 89 = 46$ d. $100x = 100\,000$

e. $x + 25 = -45$ f. $-14x = 112$

3. Relaciona cada ecuación con su respectiva solución.

a. $24x = -48$ ( ) -48

b. $-2x = 96$ ( ) 4

c. $24 = x \cdot 6$ ( ) 8

d. $58x = 464$ ( ) 5

e. $12x = 60$ ( ) -2

f. $5x = -120$ ( ) -24

g. $36x = -180$ ( ) -5

4. Resuelve cada ecuación y comprueba la solución.

a. $5x = 25$ b. $2x = -234$

c. $-120 = x \cdot 8$ d. $-24x = -96$

e. $68x = -204$ f. $-5x = -9x - 24$

g. $5 + 2x = 5x - 7$ h. $1 + 4x - 3 = 6x + 8$

Modelación

5. Traduce los siguientes enunciados en ecuaciones y halla las soluciones.

a. El doble de un número es 48.

b. Si a 800 se le resta el doble de cierto número, se obtiene 670.

c. El triple de un número adicionado con -7 equivale a -19.

d. El triple de un número disminuido en 12 es igual al número menos 4.

Resolución de problemas

6. Si al dinero que tengo le sumo su doble y le resto \$ 3500, me quedan \$ 19000. ¿Cuánto dinero tenía?

7. Se va a construir una piscina de dos metros de profundidad, doce metros de largo y x metros de ancho. Si el volumen de la piscina será de 192 m^3, ¿cuál será la medida del ancho de la piscina?

8. ¿Cuál es el área de un triángulo que tiene 9 cm de base y 18 cm de altura?

Evaluación del aprendizaje

i. Un padre tiene 38 años y su hijo 10. ¿Al cabo de cuántos años será la edad del padre tres veces mayor que la edad del hijo?

ii. Dos ciudades A y B distan 300 km entre sí. A las 9 a. m. parte de la ciudad A un automóvil hacia la ciudad B con una velocidad de 80 km/h, y de la ciudad B parte otro hacia la ciudad A con una velocidad de 70 km/h. ¿Al cabo de cuánto tiempo se encontrarán los automóviles y qué hora será en ese momento?

11 Ecuaciones con números racionales

Saberes previos

Encuentra los valores desconocidos en cada uno de los diagramas de flechas.

$$\square \xrightarrow{-56} \square \xrightarrow{+13} \boxed{412}$$

$$\square \xrightarrow{-159} \square \xrightarrow{\times 7} \boxed{3941}$$

Figura 3.19

Analiza

Carlos puede comprar los $\frac{3}{4}$ de una torta, que completa cuesta \$ 20 000.

- Si Juan cuenta con dos veces la cantidad de dinero que tiene Carlos, ¿cuánto dinero tiene Juan?

Conoce

Para saber cuánto dinero tiene Juan, primero se calcula cuánto tiene Carlos. Para ello, se hallan los $\frac{3}{4}$ de \$ 20 000, que corresponde al valor de la fracción de torta que puede comprar Carlos. Al hacer el cálculo, se sabe que Carlos tiene \$ 15 000, y dado que Juan tiene el doble, cuenta con \$ 30 000. En la solución del problema se halló un valor desconocido a partir de algunas condiciones.

Las **ecuaciones** son igualdades en las cuales se desconocen uno o varios términos, denominados **variables** o **incógnitas**. Para representar las variables se emplean letras minúsculas.

Ejemplo 1

La igualdad $\frac{2}{3} + x = \frac{11}{3}$ es una ecuación en la que a la incógnita se le ha llamado x, y debe ser tal que sumada con $\frac{2}{3}$ dé $\frac{11}{3}$ como resultado.

En este caso, el valor de x es $\frac{9}{3}$, ya que $\frac{2}{3} + \frac{9}{3} = \frac{11}{3}$.

Se dice entonces que la solución de la ecuación es $x = \frac{9}{3} = 3$.

Ejemplo 2

Catalina tomó una bolsa de harina y usó $\frac{1}{3}$ de su contenido para preparar galletas; luego empleó 1,5 kg para hacer una torta y aún le quedaron 2,5 kg. ¿Cuánta harina había en la bolsa inicialmente?

Para resolver el problema se debe plantear una ecuación, en la que hay un término desconocido (x) que indica el peso inicial de la bolsa de harina.

$x - \frac{1}{3}x - 1{,}5 = 2{,}5$ ← Se plantea la ecuación.

$\frac{2}{3}x - 1{,}5 = 2{,}5$ ← Se calcula $x - \frac{1}{3}x = \frac{3x - 1x}{3} = \frac{2x}{3}$

$\frac{2}{3}x - 1{,}5 + 1{,}5 = 2{,}5 + 1{,}5$ ← Se adiciona en ambos lados de la ecuación el opuesto aditivo de $(-1{,}5)$.

$\frac{2}{3}x = 4$ ← Se opera a ambos lados de la ecuación.

$\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}x = \frac{3}{2} \cdot 4$ ← Se multiplica a ambos lados de la ecuación por el inverso multiplicativo de $\frac{2}{3}$.

$x = \frac{12}{2} = 6$ ← Se resuelven las operaciones indicadas.

La bolsa inicialmente contenía 6 kilogramos de harina.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a. $x + \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$

b. $\frac{5}{3} = \frac{3}{7} + y$

c. $\frac{2}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - z$

d. $m - \frac{1}{7} = \frac{3}{5}$

2 Halla el valor de x en cada caso.

a. $5{,}6x + 1{,}7 = 32{,}76$

b. $4{,}3x - 4{,}2 = 5{,}4$

c. $1{,}8x = 42{,}6$

d. $\frac{x}{2{,}3} = -18$

Razonamiento

3 Identifica el error en cada caso y corrígelo.

a.
$$x - 6{,}2 = -8$$
$$x - 6{,}2 - 6{,}2 = -8 - 6{,}2$$
$$x = -14{,}2$$

b.
$$-2x + 4{,}5 = 7$$
$$-2x + 4{,}5 - 4{,}5 = 7 - 4{,}5$$
$$-2x = 2{,}5$$
$$-2x \cdot (-2) = 2{,}5 \cdot (-2)$$
$$x = -5$$

c.
$$x + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$
$$x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{5}{8} + \frac{1}{2}$$
$$x = \frac{9}{8}$$

4 Marca verdadero (V) o falso (F), según corresponda.

Ecuación	Solución	V	F
$x + \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$	$x = \frac{7}{6}$		
$\frac{6}{4}a + \frac{2}{10} = 4$	$a = \frac{38}{15}$		
$\frac{d}{3} - \frac{2}{10} = \frac{2}{3}$	$d = \frac{13}{15}$		
$y - \frac{1}{4} = \frac{17}{20}$	$y = \frac{11}{10}$		

Tabla 3.25

Resolución de problemas

5 Lee y resuelve.

a. Juliana pensó en un número, lo multiplicó por $-\frac{4}{6}$ y al resultado le sumó $\frac{4}{9}$. Si obtuvo $\frac{2}{27}$, ¿cuál fue el número que pensó Juliana?

b. Mario pensó un número y lo multiplicó por $\frac{2}{5}$ para obtener $\frac{5}{9}$. ¿Qué número pensó Mario?

c. Si al triple de un número se le suma su mitad, se obtiene 60. ¿Cuál es el número?

d. Francisco utilizó $\frac{3}{5}$ de la superficie de un terreno para sembrar hortalizas. ¿Qué parte del terreno está sin sembrar?

Evaluación del aprendizaje

i Escribe una ecuación para cada enunciado.

a. Un número menos $\frac{3}{4}$ es igual a 4.

b. La cuarta parte de un número aumentado en $\frac{5}{9}$ es igual a $\frac{1}{4}$.

c. El triple de un número es $\frac{8}{27}$.

d. Un número más $\frac{4}{5}$ es igual a 2.

ii Relaciona cada ecuación con su solución.

a. $x + 1{,}8 = 5{,}3$ ( ) $8{,}1$

b. $x - \frac{1}{3} = -\frac{4}{5}$ ( ) $3{,}5$

c. $2x + 2{,}1 = 18{,}3$ ( ) $-\frac{7}{15}$

d. $\frac{3}{4}x + 2 = \frac{1}{8}$ ( ) $-\frac{5}{2}$

e. $x - 4 = \frac{1}{3}$ ( ) $-20{,}3$

f. $2 + x = -18{,}3$ ( ) $\frac{13}{3}$

12 Inecuaciones

Saberes previos

En cada caso escribe tres números racionales que cumplan la condición.

a. Menores que -7.

b. Mayores que $\frac{5}{6}$.

c. Estén entre -3 y 3.

d. Mayores que $\frac{1}{3}$.

e. Menores que $-2{,}8$.

Analiza

El triple de un número más 5 es menor que 2.

- ¿Cuál es el número?

Conoce

Si se considera a x como el número desconocido, el problema se puede expresar mediante la siguiente **inecuación**.

$$3x + 5 < 2$$

La anterior inecuación se resuelve de la siguiente manera:

$3x + 5 < 2$ ← Inecuación

$3x + 5 + (-5) < 2 + (-5)$ ← Se adiciona en ambos lados de la inecuación el opuesto aditivo de 5.

$3x < -3$ ← Propiedad invertiva de la adición.

$x < -1$ ← Se divide por 3 en ambos lados de la inecuación y se aplica la propiedad modulativa de la multiplicación.

Una **desigualdad** es un enunciado que indica la relación de orden entre dos expresiones matemáticas. Se simboliza con los signos ($<$, $>$, $\leqslant$ y $\geqslant$). Una **inecuación** es una desigualdad en la que se desconoce uno de sus términos. El término desconocido o incógnita se representa mediante una letra.

Ejemplo 1

Expresiones como las siguientes son inecuaciones.

$$4x + 5 < -3 \qquad \frac{1}{3}x - \frac{1}{2} > 15 \qquad -11x - 19 \leq -\frac{1}{4}$$

Si a, b y c son números reales se aplican estas propiedades:

- Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.
- Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
- Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
- Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

Ejemplo 2

Observa cómo se resuelve la inecuación $5(x - 3) > -9$.

$5(x - 3) > -9$ ← Inecuación

$5x - 15 > -9$ ← Se eliminan signos de agrupación multiplicando por 5 cada término que hay dentro del paréntesis.

$5x - 15 + 15 > -9 + 15$ ← Se suma 15 a cada miembro de la inecuación.

$5x > 6$ ← Propiedad invertiva de la adición.

$\frac{1}{5} \cdot 5x > \frac{1}{5} \cdot 6$ ← Se multiplica por $\frac{1}{5}$ cada miembro de la inecuación.

$x > \frac{6}{5}$ ← Se efectúan las operaciones indicadas.

Existen infinidad de valores que satisfacen esta inecuación, pues son todos los números mayores que seis quintos.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Escribe cinco soluciones de cada inecuación.

a. $x - 1 < 9$

b. $2x \geq 15$

c. $0 \geq x + 7$

d. $-8x + 3 > 19$

Comunicación

2 Resuelve cada inecuación.

a. $7x - 6 < +1$

b. $1 - 4x > 2$

c. $\frac{7x - 4}{3} \geq 2$

d. $\frac{2x + 3}{5} < -4$

3 Supón que las dos balanzas están equilibradas.

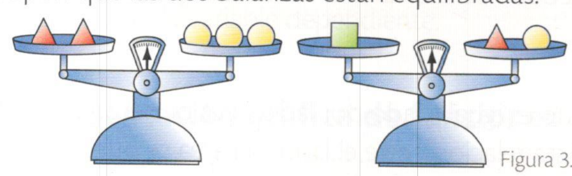


Figura 3.20

a. ¿Cuántas bolas equilibran esta tercera balanza?

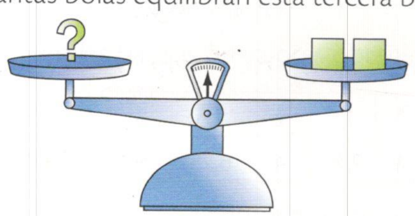


Figura 3.21

b. ¿Cuántas bolas en el platillo izquierdo inclinan la balanza hacia la derecha?

c. ¿Cuántas bolas en el platillo izquierdo inclinan la balanza hacia la izquierda?

Ejercitación

4 Escribe una inecuación que cumpla las condiciones dadas en cada caso.

a. Una de sus soluciones es $m = -15$.

b. Una de sus soluciones es $t = \frac{8}{3}$.

c. Una de sus soluciones es $r = 8$ y su miembro derecho es $3 + r$.

d. Una de sus soluciones es $y = -1$ y su miembro izquierdo es $2y - 5$.

Resolución de problemas

5 Al duplicar mi dinero quedé con menos de \$ 780 000. ¿Cuanto dinero podría haber tenido antes de duplicarlo?

6 Andrés pagó por su mascota y las vacunas \$ 75 000. Si las vacunas costaron más de \$ 230 000, ¿cuánto pudo haber pagado por la mascota?

Evaluación del aprendizaje

i Encuentra los valores de x que satisfacen cada inecuación.

a. $2x - 5 < -3$

b. $3 - 2x > -25$

c. $-7 \leqslant 12x - 5$

d. $-6 \geqslant -18x - 1$

ii Escribe dos números que satisfagan las dos condiciones dadas en cada caso.

a. $x - 5 < 10$; $x + 3 > 2$

b. $-x < 0$; $x - 3 < 5$

c. $\frac{x}{2} \leqslant 9$; $\frac{-x}{3} - 1 < 4$

d. $\frac{-2x + 1}{2} + 1 \geqslant 3$; $0 < -x$

Estilos de vida saludable

La radiación solar hacia el mediodía es mayor que el triple de la radiación solar que se da entre las 8:00 a.m. y 9:00 a.m. que corresponde a 226 W/m². Escribe la inecuación correspondiente a la situación.

- ¿A qué hora crees que es apropiado tomar el sol y por qué?

13 Funciones

Saberes previos

En la Tabla 3.26 se presentan los datos sobre la variación de la temperatura de una taza de té respecto al tiempo.

Tiempo (minutos)	0	2	4	6	8	10
Temperatura (°C)	88	80	72	64	56	48

Tabla 3.26

a. ¿Qué sucede con la temperatura a medida que avanza el tiempo?

b. ¿Es posible predecir en qué tiempo la taza de té tendrá una temperatura de 0 °C?

Analiza

Raúl necesita sacar fotocopias para un trabajo de biología.

- Si por cada fotocopia paga $60, ¿cómo puede determinar cuánto debe pagar por cierta cantidad de fotocopias?

Conoce

12.1 Fórmulas, tablas y gráficas

Una forma de responder la pregunta consiste en registrar en una tabla como la siguiente la relación entre el número de fotocopias y el costo a pagar.

Número de fotocopias	1	2	3	4	5	6	7	8
Costo ($)	60	120	180	240	300	360	420	480

Tabla 3.27

En la Tabla 3.27 se observa que para averiguar el costo a pagar por cualquier número de fotocopias, basta con multiplicar el número de fotocopias por el costo de una. Con lo anterior se obtiene la fórmula $y = 60 \cdot x$, donde x indica el número de fotocopias.

Si una magnitud depende de otra, se puede expresar esta dependencia mediante una **fórmula**, una **tabla** o una **gráfica**.

La magnitud que se fija previamente es la **variable independiente**.

La magnitud que se deduce de la otra es la **variable dependiente.**

Ejemplo 1

El área de un cuadrado es igual a lado por lado. El valor del área depende de la medida del lado. Esta relación entre el lado y el área se puede expresar de varias maneras:

Con una fórmula: $A = l^2$

Con una tabla:

Lado (cm)	1	1,5	2	2,5	3	…	5
Área (cm^2)	1	2,25	4	6,25	9		25

Tabla 3.28

Con una gráfica:

La variable lado (l) corresponde a la variable independiente, y la variable área (A) corresponde a la variable dependiente. La gráfica se muestra en la Figura 3.22.

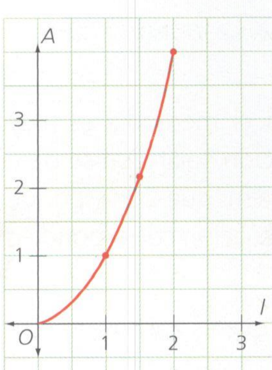


Figura 3.22

Ejemplo 2

El Ministerio de Salud ha hecho un estudio sobre el peligro de consumir tabaco. Los resultados se muestran en la Tabla 3.29.

Número de cigarrillos diarios	3	5	10	15	20
Índice de mortalidad	0,2	0,3	0,6	0,8	1,2

Tabla 3.29

Las magnitudes *Índice de mortalidad* y *Número de cigarrillos diarios* están correlacionadas y son dependientes entre sí, ya que un incremento de la segunda lleva a un aumento de la primera.

12.2 Concepto de función

Una **función** es una relación entre un conjunto, llamado **dominio**, y otro conjunto, llamado **rango**, de forma que a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento del rango.

- El dominio de una función es el conjunto de los valores que se asignan a x (variable independiente).
- El rango de una función es el conjunto de los valores que toma la función y (variable dependiente).

Ejemplo 3

En la Tabla 3.31 se registran algunos valores para una función que asigna a cada número su mitad; esto es, $f(x) = \frac{x}{2}$.

x	2	3	4	5	6
$f(x)$	1	1,5	2	2,5	3

Tabla 3.30

En este caso, x es la variable independiente y $f(x)$ (que también se puede notar como y) es la variable dependiente.

12.3 Representación gráfica de funciones

Para representar gráficamente una función se siguen estos pasos.

1. Se construye una tabla de valores.
2. Se representan las parejas de valores obtenidos sobre el plano cartesiano y se unen, si es el caso.

Ejemplo 4

Una función f asigna a cada número entero su doble más 1: $f(x) = 2x + 1$. En la Tabla 3.31 figuran algunos valores de la función y la Figura 3.23 muestra su representación.

x	y
-3	-5
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5
3	7

Tabla 3.31

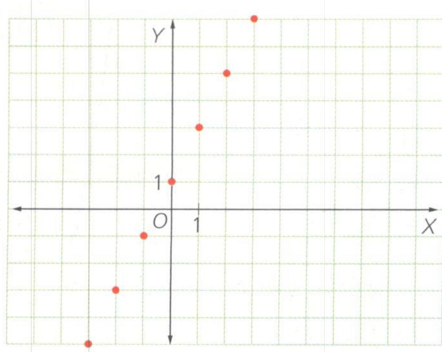


Figura 3.23

Como f está definida solo para los números enteros, no se unen los puntos.

13 Funciones

MatemaTICS

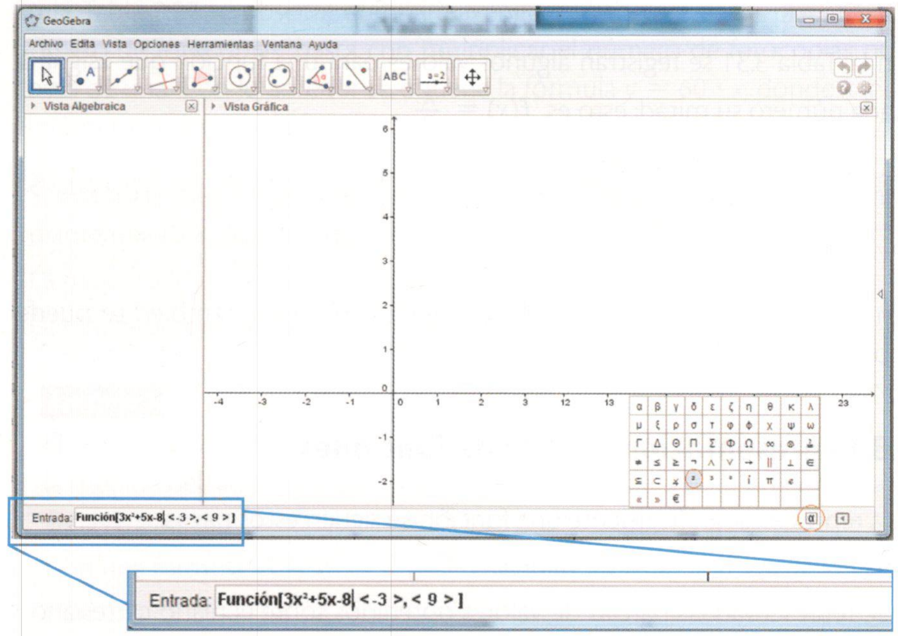
Usa GeoGebra para graficar funciones

- En GeoGebra es posible trazar la gráfica de una función entre dos valores dados de x. Observa cómo trazar la gráfica de la función $f(x) = 3x^2 + 5x - 8$ para valores de x en el intervalo $[-3, 9]$.

En la barra de entrada, escribe la palabra Función (con acento) y selecciona la opción:

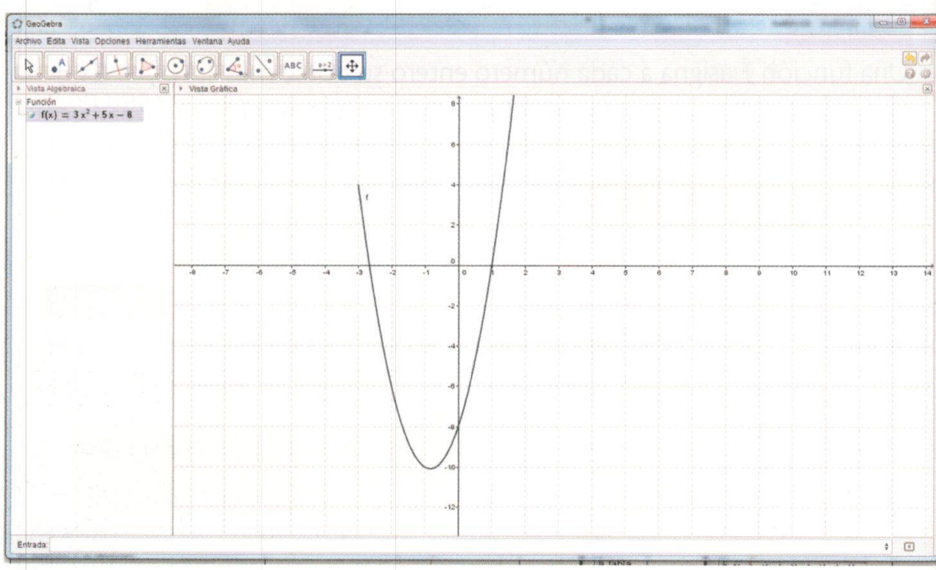
Función[<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>]

Reemplaza la expresión <Función> por $3x^2 + 5x - 8$. El exponente 2 se obtiene haciendo clic en el icono $\boxed{\alpha}$ de la barra de entrada y luego en el número 2 que se observa en el recuadro que se despliega allí.



Escribe el extremo inferior y superior del intervalo en el cual se va a trazar la gráfica de la función. La entrada debe quedar como se muestra en el pantallazo.

Presiona la tecla Enter. En la vista gráfica de GeoGebra obtendrás la gráfica de la función en el intervalo $[-3, 9]$ que se muestra a la derecha.



Traza en GeoGebra la gráfica de cada función en el intervalo dado.

a. $f(x) = x^2 + 3x + 3$ en $[1, 6]$

b. $f(x) = -2x^2 + x - 1$ en $[-3, 3]$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Observa la Tabla 3.32, donde se registra la temperatura de una persona a lo largo de un día.

Hora	0	4	8	12	16	20	24
Temperatura (°C)	38	36	36,5	36	38	39	38

Tabla 3.32

a. ¿Cuál es la variable dependiente?

b. ¿Entre qué horas varió más la temperatura?

Ejercitación

2 Completa la Tabla 3.33, que relaciona el costo de una carrera de taxi según su recorrido. La tarifa es de \$ 800 por tomar el taxi y \$ 1 200 por cada kilómetro avanzado.

Kilómetros recorridos (x)	1	2	3	5	7	10
$800 + 1\,200x$	2 000					

Tabla 3.33

Razonamiento

3 Escribe la fórmula asociada a la Tabla 3.34.

x	−2	−1	0	1	2	6
y	−6	−3	0	3	6	18

Tabla 3.34

4 Observa los siguientes cuerpos geométricos.

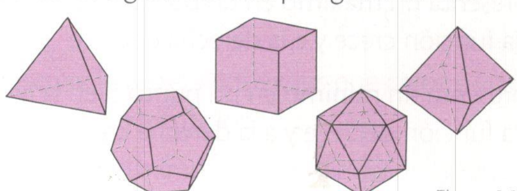


Figura 3.24

a. Copia y completa la Tabla 3.35.

	Vértices	Aristas	Caras
Tetraedro			
Cubo			
Octaedro			
Dodecaedro			
Icosaedro			

Tabla 3.35

b. Escribe una fórmula que relacione el número de vértices, aristas y caras de estos cuerpos.

Resolución de problemas

5 La Figura 3.25 representa una etapa ciclística. A cada distancia del punto de salida le corresponde una determinada altitud.

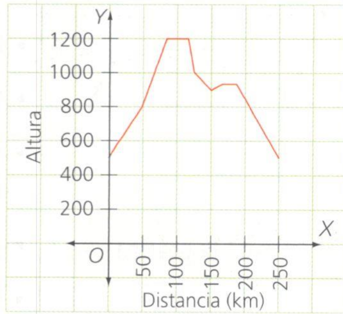


Figura 3.25

¿Cuándo se alcanza la mayor altitud?

Evaluación del aprendizaje

i La función para convertir una temperatura de grados centígrados (x) a grados Fahrenheit (y) es $y = 1{,}8x + 32$.

a. Completa la Tabla 3.36.

x	−20	−10	0	20	30	50
y						

Tabla 3.36

b. Haz la representación gráfica de la función.

ii Dos frascos de duraznos cuestan \$ 7 400.

a. ¿Cuál es la fórmula de la función que relaciona el precio con el número de frascos comprados?

b. ¿Cuánto cuestan siete frascos de duraznos?

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Los proyectos de educación para la sexualidad dan herramientas para que los jóvenes tomen decisiones frente al uso de métodos para prevenir embarazos e infecciones de transmisión sexual.

- Averigua las cifras de embarazos en adolescentes y determina si hay relación entre nivel educativo y la cantidad de embarazos.

14 Análisis de gráficas

Saberes previos

En la Figura 3.26 se muestra la representación de una función.

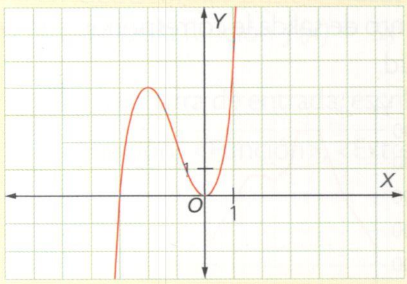


Figura 3.26

- Describe cómo varía la gráfica.

Analiza

La siguiente gráfica muestra la temperatura de una ciudad durante el mes de septiembre.

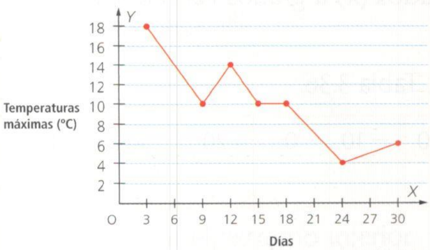


Figura 3.27

- ¿Qué variaciones experimentó?

Conoce

13.1 Crecimiento y decrecimiento

En la Figura 3.27 se puede observar que:

- El tercer día se alcanzaron 18 °C; después, la temperatura máxima fue bajando hasta el día 9 cuando llegó a 10 °C.
- Del día 9 al 12, la temperatura aumentó.
- Del día 12 al 15, la temperatura descendió de nuevo.
- Durante los tres días siguientes (15 a 18), la temperatura no experimentó ningún cambio.
- Entre los días 18 y 24, la temperatura volvió a descender.
- A partir del día 24, la temperatura aumentó hasta el último día del mes.

Entre los días 9 y 12 la gráfica de la **función** es **creciente**, ya que cuando aumenta la variable independiente (días), la variable dependiente (temperatura) también aumenta. La función también crece del día 24 al 30.

Entre los días 1 y 9 la gráfica de la **función** es **decreciente**, ya que cuando aumenta la variable independiente, la variable dependiente disminuye. La función también **decrece** entre los días 12 y 15 y entre los días 18 y 24.

Una función es **creciente** si al aumentar la variable independiente, la variable dependiente también aumenta. Una función es **decreciente** si al aumentar la variable independiente, la variable dependiente disminuye.

13.2 Máximos y mínimos

Una función continua presenta un **máximo** en un punto si en la gráfica, a la izquierda de ese punto la función crece y a la derecha decrece.

Una función continua presenta un **mínimo** en un punto si en la gráfica, a la izquierda de ese punto la función decrece y a la derecha crece.

Ejemplo 1

La gráfica de la temperatura de la Figura 3.27 tiene máximos y mínimos.

- Durante los tres días anteriores al 12 la temperatura fue aumentando, y en los días posteriores fue disminuyendo. Se dice que la función presenta un **máximo** en el punto $x = 12$.
- Durante los días anteriores al 9 y al 24, la temperatura fue disminuyendo, y los días posteriores a estos fue aumentando. Por tanto, se dice que la función presenta puntos mínimos en:

$$x = 9 \text{ y } x = 24$$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Indica si son crecientes o decrecientes las siguientes funciones.

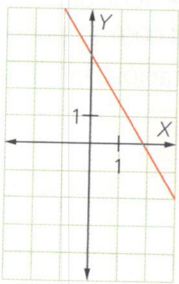
a. 

Figura 3.28

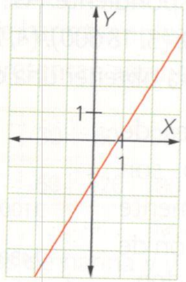
b. 

Figura 3.29

2 Explica si son crecientes o decrecientes las funciones asociadas a las siguientes situaciones.

a. El precio de una llamada telefónica según su duración.

b. La gasolina que contiene el tanque de un carro según los kilómetros recorridos.

3 Observa la Figura 3.30.

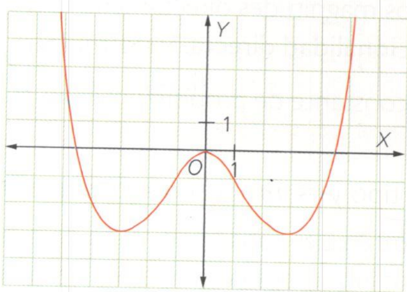


Figura 3.30

a. Describe los intervalos en los que crece y en los que decrece la función.

b Señala los máximos y los mínimos de la función.

c. ¿Qué valor toma la función en dichos puntos?

Modelación

4 Dibuja una función continua que solo sea decreciente en el intervalo comprendido entre $x = 0$ y $x = 6$.

5 Dibuja la gráfica de una función continua que presente un mínimo en el punto de coordenadas $(-2, 0)$ y un máximo en $(1, 5)$.

6 Dibuja la gráfica de una función que no tenga ni máximos ni mínimos.

Resolución de problemas

7 La Figura 3.31 muestra la altura a la que estaba el agua en un depósito desde el día 1 hasta el día 7.

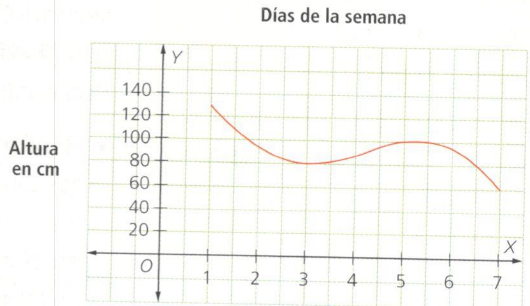


Figura 3.31

a. ¿Qué día alcanzó la máxima altura? ¿Qué altura alcanzó el agua en ese instante?

b. ¿Cuándo alcanzó la mínima altura? ¿Qué nivel de agua había?

Evaluación del aprendizaje

Observa la gráfica de la Figura 3.32.

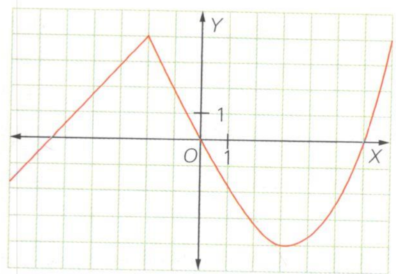


Figura 3.32

a. ¿Cómo varía la función en los puntos menores que -2?

b. ¿Qué sucede con la función cuando toma valores entre -2 y 3?

c.¿El punto $x = 3$, es un máximo o un mínimo de la función? Explica.

Educación ambiental

La Figura 3.33 muestra la proyección del reciclaje de empaques Tetra Pak en Colombia ¿Qué conclusión puedes sacar de esta?

Figura 3.33

15 Funciones de proporcionalidad directa

Saberes previos

Analiza y responde.

a. ¿Varía la cantidad de gasolina consumida por una moto con la distancia recorrida?

b. ¿De qué manera varían las magnitudes cantidad de gasolina consumida y distancia recorrida? Explica.

Analiza

Yolanda quiere representar en un plano cartesiano la información registrada en la Tabla 3.37.

Cantidad de galones de gasolina	Precio ($)
1	6 200
2	12 400
3	18 600
4	24 800
5	31 000

Tabla 3.37

- ¿Cuál es la expresión asociada a los datos de la tabla y qué tipo de gráfica se obtiene al representar dichos datos en el plano cartesiano?

Conoce

Para representar la información de la tabla, Yolanda debe considerar las parejas ordenadas cuyo primer componente es la cantidad de galones de gasolina y el segundo, el precio correspondiente. Así, las parejas que debe ubicar en el plano son (1, 6 200), (2, 12 400), (3, 18 600), (4, 24 800) y (5, 31 000). Es preciso que use una escala adecuada para obtener una clara representación de los datos.

- El número de galones de gasolina y su costo son magnitudes directamente proporcionales. La razón de proporcionalidad es 6 200.
- La expresión algebraica que representa la situación es $y = 6\,200 \cdot x$, donde x es el número de galones de gasolina y y es su precio en pesos.

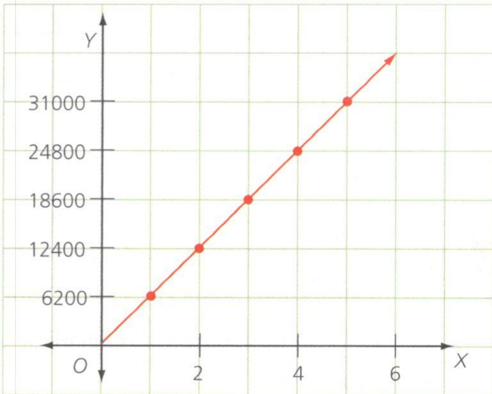


Figura 3.34

- La representación gráfica de esta función es una recta que pasa por el origen de coordenadas (Figura 3.34).

Las funciones que relacionan dos magnitudes directamente proporcionales se llaman **funciones de proporcionalidad directa**. Su fórmula es: $y = m \cdot x$

El valor de m corresponde a la constante de proporcionalidad entre las dos magnitudes que se relacionan.

Las gráficas de las funciones de tipo $y = m \cdot x$ son rectas que pasan por el origen de coordenadas.

Ejemplo 1

Jorge compró un queso en el supermercado y leyó en la información de la etiqueta que cada kilogramo de queso cuesta $ 27 360. Jorge establece que las magnitudes *Precio* y *Peso* son directamente proporcionales. Él representa con x el peso de los quesos en kilogramos y con y su precio en pesos, y relaciona las dos magnitudes mediante la expresión: $y = 27\,360 \cdot x$

Para hallar el precio de 2,5 kg de queso, él reemplaza x por 2,5 y obtiene: $y = 27\,360 \cdot 2{,}5 = 68\,400$. Así que 2,5 kilos de queso cuestan $ 68 400.

Jorge construye la Tabla 3.38 para trazar la gráfica de la función $y = 27\,360 \cdot x$.

Peso (kg)	0	0,5	1	1,5	2	2,5
Precio ($)	0	13 680	27 360	41 040	54 720	68 400

Tabla 3.38

Una vez ubicados cada par de puntos de la tabla en el plano y unidos mediante una recta continua, Jorge obtiene una recta que pasa por el origen de coordenadas (Figura 3.35).

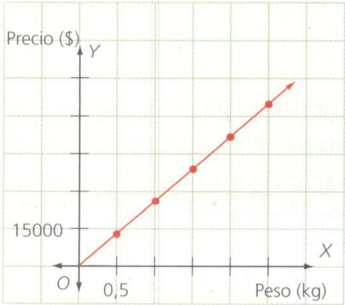


Figura 3.35

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 2

Para preparar una torta, la receta indica que se añaden dos gramos de chocolate por cada gramo de harina que se emplee.

En esta situación la cantidad de chocolate que hay que añadir es directamente proporcional a la cantidad de harina empleada, y la razón de proporcionalidad es 2. En la Tabla 3.39 se presentan algunos valores.

Harina (g)	1	30	60	90	100
Chocolate (g)	2	60	120	180	200

Tabla 3.39

Si se llama x a la cantidad de gramos de harina y y a la cantidad de gramos de chocolate, la expresión que representa los datos de la tabla es $y = 2 \cdot x$.

La gráfica de esta función es una recta que pasa por el origen de coordenadas (Figura 3.36).

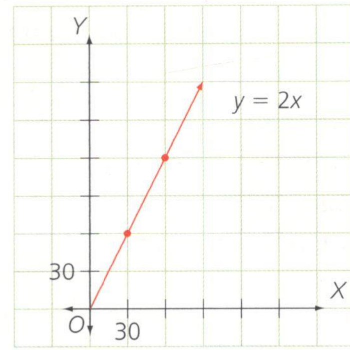


Figura 3.36

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Representa las siguientes funciones.

a. $y = x$
b. $y = -x$
c. $y = 4x$
d. $y = -4x$
e. $y = 3x$
f. $y = -3x$

Comunicación

2 Lee y resuelve.

a. El sueldo de un trabajador es de \$ 5 600 por hora trabajada. Determina el sueldo del trabajador en función de las horas trabajadas.

b. Juan lee cuatro páginas diarias de un libro. Indica el tiempo que tarda en leer un libro en función del número total de páginas.

3 Observa la Tabla 3.40, la cual muestra la distancia recorrida por un carro en un tiempo determinado a una velocidad constante de 85 km/h.

Tiempo	0	1	2	3	4
Distancia	0	85	170	255	340

Tabla 3.40

a. Representa los datos gráficamente.

b. Escribe la función que relaciona la distancia recorrida por el carro con el tiempo que tarda en alcanzarla.

Razonamiento

4 Escribe una función cuya razón de proporcionalidad sea una fracción. Luego, halla cuatro valores para trazar un bosquejo de la gráfica de la función.

5 En una frutería una manzana cuesta \$ 450.

a. Haz una tabla de valores que exprese el precio de 1, 2, 3, 4 y 5 manzanas.

b. Representa gráficamente la función.

Evaluación del aprendizaje

i Completa la Tabla 3.41 en tu cuaderno.

x	-3	-2	-1	0	1	2
y		-1				1

Tabla 3.41

a. Escribe la fórmula de la función que relaciona las dos magnitudes.

b. Representa gráficamente la función.

ii Un grifo de un tanque tiene un caudal de 6 dm^3 por minuto.

a. Construye una tabla de valores de la función tiempo-capacidad.

b. Representa gráficamente la función.

c. Halla la expresión algebraica de la función.

16 Funciones de proporcionalidad inversa

Saberes previos

Se tienen 45 L de yogur para envasar en recipientes de distinta capacidad.

Capacidad del recipiente (L)	1	1,5		5	9
Número de recipientes			15	9	

Tabla 3.42

- Si se aumenta la capacidad de los recipientes, ¿cómo varía el número de recipientes utilizados?

Analiza

David tiene varios grifos en su finca que vierten la misma cantidad de agua por hora. Uno solo de estos tarda 8 horas en llenar una piscina.

- ¿Cuál es la fórmula que expresa cómo obtener el tiempo de llenado de la piscina en función del número de grifos utilizados?

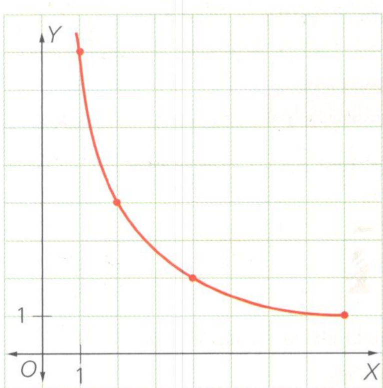


Figura 3.37

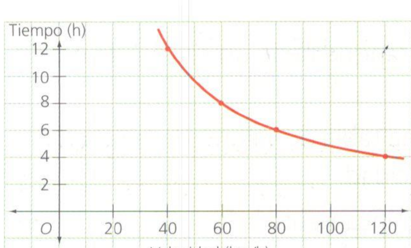


Figura 3.38

Conoce

El número de grifos y el tiempo que tardan en llenar la piscina son magnitudes inversamente proporcionales. Si se representa con x el número de grifos y con y el número de horas que se tarda en llenar la piscina, se verifica que $x \cdot y = 8$. Por tanto, la fórmula que expresa el tiempo de llenado en función del número de grifos utilizados es $y = \dfrac{8}{x}$.

Las funciones que relacionan dos magnitudes inversamente proporcionales se denominan **funciones de proporcionalidad inversa**. Su expresión algebraica es de la forma: $x \cdot y = k$, o bien, $y = \dfrac{k}{x}$. El valor de k corresponde a una constante de proporcionalidad.

Ejemplo 1

Para representar la función, que relaciona el número de grifos y el número de horas que tardan en llenar la piscina, se pueden seguir estos pasos.

1. Se construye la Tabla de valores 3.43.

x	1	2	4	8
y	8	4	2	1

Tabla 3.43

2. Al representar los valores de la tabla como puntos en el plano, se unen estos puntos con una línea curva. En la Figura 3.37 se presenta la gráfica correspondiente.

Ejemplo 2

Un automóvil recorre una pista circular de 480 km a velocidad constante.

La velocidad y el tiempo son magnitudes inversamente proporcionales. En este caso, la razón de proporcionalidad es 480.

La Tabla 3.44 muestra cuánto tiempo emplearía el automóvil en recorrer la pista a una velocidad de 40, 60, 80 y 120 kilómetros por hora.

Velocidad (km/h)	40	60	80	120
Tiempo (horas)	12	8	6	4
Distancia (km)	480	480	480	480

Tabla 3.44

Si se llama x a la velocidad y y al tiempo, la fórmula que relaciona las dos magnitudes es $x \cdot y = 480$, o bien, $y = \dfrac{480}{x}$.

Al representar los valores de la tabla como puntos en el plano estos se unen con una línea curva, pues la velocidad varía en forma continua (Figura 3.38).

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Indica cuáles de las funciones son de proporcionalidad inversa. Justifica tu respuesta.

a. $y = \frac{3}{2}x$

b. $y = -\frac{12}{x}$

c. $y = -x + 3$

d. $y = \frac{1}{x}$

Comunicación

2 Representa gráficamente la función $y = \frac{5}{x}$. Para ello, elabora dos tablas de valores, una con valores positivos de x y otra con valores negativos, y luego representa los puntos de ambas en los mismos ejes de coordenadas.

3 Escribe la función asociada a la siguiente situación: Un curso de séptimo ha ganado un premio de \$ 150 000. ¿Cómo se distribuye el premio en partes iguales si hubiera 2, 3, 5, 10, 15, 30 o x estudiantes?

Razonamiento

4 Un cliente encargó a Ricardo un corte de tela rectangular de 16 m^2.

a. ¿De cuántas formas diferentes puede cortar la pieza? ¿Qué relación hay entre los dos lados del rectángulo?

b. Si un lado mide 5 m, ¿cuánto medirá el otro lado?

c. Representa la función que relaciona los dos lados del rectángulo.

5 Representa la función $y = \frac{1}{x}$ elaborando una tabla de valores en la que x solo tome valores positivos y otra en la que solo tome valores negativos. ¿Qué relación hay entre las representaciones gráficas correspondientes a cada una de las tablas?

Resolución de problemas

6 Se quiere repoblar con 6 000 árboles una zona boscosa que sufrió un incendio forestal. Si se sabe que seis personas necesitan 120 horas para plantar todos los árboles, ¿cuántas horas hacen falta para plantarlos si colaboran 60 voluntarios?

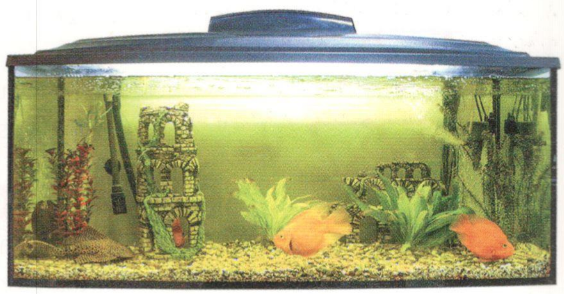
a. Haz una tabla de valores que relacione el número de personas con el tiempo que tardan en plantar los árboles.

b. Escribe la expresión que representa los datos de la tabla anterior.

c. Dibuja la gráfica de la función.

Evaluación del aprendizaje

i Una familia tiene un acuario y pretende alimentar durante 30 días a los 50 peces que viven allí. Para ello, compran un pedido de alimento.



a. Si cuando llega el pedido se dan cuenta de que son en realidad 75 peces, ¿cuánto tiempo les durará la comida?

b. ¿Cuál es la función que expresa la relación entre el tiempo que durará la comida y el número de peces del acuario?

ii El producto de dos números es 18.

a. Escribe la función correspondiente a tal enunciado.

b. Construye una tabla de valores y representa gráficamente la función asociada a la situación.

17 Regularidades y sucesiones

Saberes previos

Observa la secuencia gráfica. Indica cuál de los dibujos de la parte inferior debe ir en el lugar del signo de interrogación.

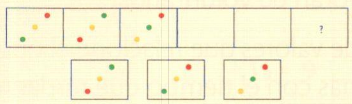


Figura 3.39

Analiza

En la Figura 3.40 se muestra una secuencia de triángulos construidos con palillos.

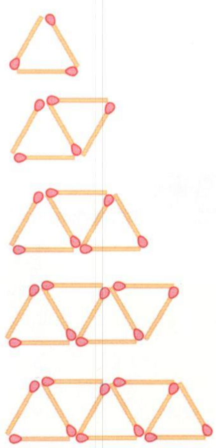


Figura 3.40

- ¿Cuántos palillos se necesitarán para construir una figura que tenga diez triángulos y una con n triángulos?

Conoce

17.1 Regularidad

Para determinar cuántos palillos se necesitan para construir una figura que tenga diez triángulos y una con n triángulos, se construye la Tabla 3.45.

Número de triángulos	1	2	3	4	5	...	10	...	n
Número de palillos	3	5	7	9	11	...	?	...	?

Tabla 3.45

Se observa que el número de palillos sigue una secuencia. Para añadir un nuevo triángulo se necesitan dos palillos más. Así, para construir diez triángulos se necesitan tres palillos para el triángulo inicial, y luego, dos palillos por cada uno de los nueve triángulos restantes, es decir:

$$3 + 2 \cdot 9 = 21$$

Para construir n triángulos, se necesitan tres palillos para el triángulo inicial y luego dos palillos por cada uno de los $n - 1$ triángulos restantes, es decir:

$3 + 2(n - 1)$ ← Se resuelven paréntesis multiplicando 2 por cada término interior.

$3 + 2n - 2$ ← Se suman los términos que no tienen letra o variable.

$2n + 1$

Una secuencia de números presenta **regularidad** si, a la vista de unos cuantos de estos, se pueden obtener los siguientes.

Ejemplo 1

En la Tabla 3.46 se observa el número de diagonales de algunos polígonos de acuerdo con el número de lados de los mismos.

Número de lados	3	4	5	6	7	8	9
Diagonales	0	2	5				

Tabla 3.46

Para completar la tabla se lleva a cabo el siguiente razonamiento:

Si un polígono tiene n vértices, el número de diagonales que se pueden construir por cada vértice es $n - 3$. Como el polígono tiene n vértices, el anterior valor se multiplica por n, así: $n(n - 3)$. Además, cada diagonal corresponde a dos vértices. Por ello, se divide la anterior cantidad entre dos y se obtiene $\frac{n(n-3)}{2}$.Con esta fórmula se puede completar la Tabla 3.47, así:

Número de lados	3	4	5	6	7	8	9
Diagonales	0	2	5	9	14	20	27

Tabla 3.47

Ejemplo 2

Un número triangular es aquel que puede ser recompuesto en la forma de un triángulo equilátero. En la Figura 3.41 se representan los cinco primeros números triangulares.

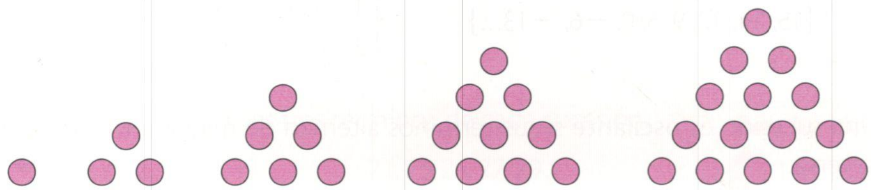


Figura 3.41

Los cinco primeros números triangulares son 1, 3, 6, 10 y 15 y corresponden al número de puntos que forma cada triángulo equilátero. Para hallar el n-ésimo número triangular se utiliza la fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$. Así, el número triangular 24 es

$$\frac{24\,(24+1)}{2} = 300$$

17.2 Sucesiones

Las secuencias infinitas de números se conocen como **sucesiones**.

Una sucesión de números reales se representa por

$$\{a_1, a_2, a_3..., a_n...\} \text{ o por } \{\boldsymbol{a_n}\}$$

Cada número se denomina **término** y se designa por una letra y un número llamado **índice**, que indica el lugar que ocupa en la sucesión. Así, a_1 es el primer término; a_2, el segundo, etc. A $\boldsymbol{a_n}$ se le conoce como **enésimo término**, o término general, y representa un término cualquiera de la sucesión.

Ejemplo 3

Observa cómo se halla el siguiente término en cada secuencia de números.

a. $\{10, 7, 4, 1, -2...\}$ **b.** $\{64, 32, 16, 8, 4...\}$

a. Cada término se obtiene sustrayendo 3 al anterior, el siguiente es -5.

b. Cada término se halla dividiendo el anterior por 2, el siguiente es 2.

Dependiendo del comportamiento de sus términos, las sucesiones infinitas pueden ser crecientes, decrecientes, oscilantes, alternadas o constantes.

Una sucesión es **creciente** si cada término es mayor o igual que el anterior.

Ejemplo 4

Son sucesiones crecientes:

$\{4, 8, 8, 12, 12, 12, 16, 16, 16, 16...\}$ $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13...\}$

17 Regularidades y sucesiones

Una sucesión es **decreciente** si cada término es menor o igual que el anterior.

Ejemplo 5

Los siguientes son ejemplos de sucesiones decrecientes:

$\{15, 14, 12, 9, 5, 0, -6, -13...\}$ $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10} ...\right\}$

Una sucesión es **oscilante** si sus términos alternan de mayor a menor o viceversa.

Ejemplo 6

La sucesión $\{2, 1, 4, 2, 3, 2, 5...\}$ es oscilante, pues al comparar sus términos se observa que el segundo es menor que el primero, pero el tercero es mayor que el segundo, etc.

Una sucesión es **alternada** si se alternan los signos de sus términos.

Ejemplo 7

Observa los términos de la sucesión:

$$\{-1, 2, -3, 4, -5...\}$$

Esta sucesión es alternada, pues el primer término es negativo; el segundo, positivo; el tercero, negativo, etc.

Una sucesión es **constante** cuando todos sus términos son iguales.

Ejemplo 8

La siguiente es una sucesión constante.

$$\{-3, -3, -3, -3, -3...\}$$

Ejemplo 9

Observa cómo se hallan los dos términos siguientes de cada sucesión.

a. 4, 8, 16, 32, 64... **b.** $7, \frac{7}{2}, \frac{7}{4}, \frac{7}{8}, \frac{7}{16}...$

a. Como cada término se obtiene multiplicando por 2 el anterior, los dos términos que siguen son 128 y 256.

b. Los dos términos son $\frac{7}{32}$ y $\frac{7}{64}$, ya que cada uno se halla multiplicando por $\frac{1}{2}$ el anterior.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Escribe los siguientes cinco términos de cada sucesión.

a. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\ldots$ b. $-4, -2, 0\ldots$

Razonamiento

2 Halla los siguientes tres términos de cada sucesión.

a. 12, 12, 12, 12, 12… b. 21, 23, 25, 27, 29…

c. 80, 70, 60, 50, 40… d. $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2\ldots$

3 Escribe el término que falta en cada sucesión.

a. 17, 15, 13, ☐, 9, 7… b. 60, 56, ☐, 48, 44…

c. $\frac{3}{5}, \frac{9}{5}$, ☐, $\frac{81}{5}\ldots$ d. 16, −8, ☐, −2, 1…

4 Las figuras 3.42 a 3.44 se construyeron con cerillas.


Figura 3.42

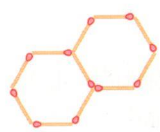


Figura 3.43

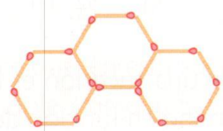


Figura 3.44

a. ¿Cuántas cerillas se necesitan para formar una figura con 15 hexágonos?

b. ¿Cuántas cerillas se necesitan para formar una figura con *n* hexágonos?

5 Escribe el término que falta en cada sucesión.

a. 8, 10, 12, ☐, 16… b. 35, ☐, 25, 20, 15…

c. 0, 3, ☐, 9, 12… d. $5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}$, ☐, $\frac{5}{81}\ldots$

6 Escribe los cinco primeros elementos de las sucesiones que determinan respectivamente el número de triángulos verdes y azules en la Figura 3.45.

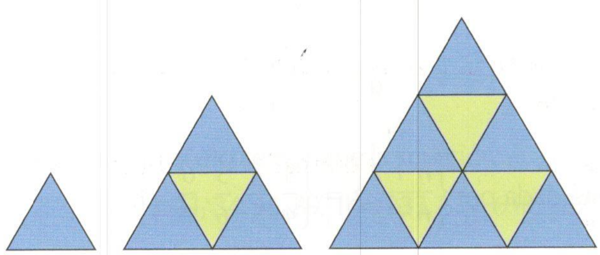


Figura 3.45

7 Averigua y escribe el término que falta en las siguientes sucesiones:

a. $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}$, ☐, $\frac{16}{3}, \frac{32}{3}\ldots$

b. −9, −6, −3, ☐, 3…

Resolución de problemas

8 Las abejas construyen panales con formas hexagonales. El segundo hexágono que construyen lo hacen utilizando un lado del primero.

A partir del tercer hexágono, lo construyen utilizando siempre dos lados de hexágonos ya construidos.

Si se entiende como unidad de cera la cantidad de este material necesaria para construir un lado de un hexágono, se verificará que:

- Para construir un panal de una celda se necesitan seis unidades de cera.
- Para construir un panal de dos celdas se necesitan once unidades de cera.
- Para construir un panal de tres celdas se necesitan 15 unidades de cera.

¿Cuántas celdas tendrá un panal que precisa de 51 unidades de cera para su construcción?

Evaluación del aprendizaje

✓ Encuentra el término general de cada sucesión estudiando sus regularidades.

a.

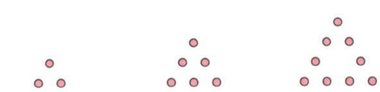

$a_1 = 3$ $a_2 = 6$ $a_3 = 9$

Figura 3.46

b.

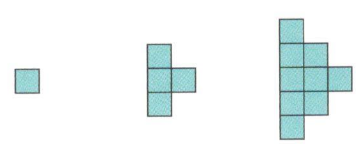

$b_1 = 1$ $b_2 = 4$ $b_3 = 9$

Figura 3.47

c.

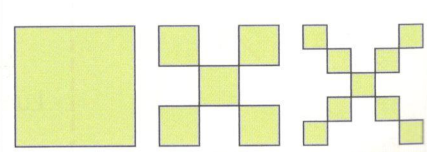

$c_1 = 1$ $c_2 = 5$ $c_3 = 9$

Figura 3.48

18 Término general de una sucesión

Pensamiento variacional

Saberes previos

Para cada sucesión numérica, escribe una expresión algebraica que la represente.

a. 4, 8, 12, 16, 20...

b. $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81} \ldots$

c. 3, 5, 7, 9, 11...

Analiza

El término n-ésimo de una sucesión está dado por $\frac{(-1)^n}{2^n}$.

- Halla los 10 primeros términos de la sucesión.

Conoce

Para hallar los diez primeros términos de la sucesión, se reemplaza $\frac{(-1)^n}{2^n}$ por los números naturales desde 1, así:

$$a_1 = \frac{(-1)^1}{2^1} = -\frac{1}{2} \qquad a_6 = \frac{(-1)^6}{2^6} = \frac{1}{64}$$

$$a_2 = \frac{(-1)^2}{2^2} = \frac{1}{4} \qquad a_7 = \frac{(-1)^7}{2^7} = -\frac{1}{128}$$

$$a_3 = \frac{(-1)^3}{2^3} = -\frac{1}{8} \qquad a_8 = \frac{(-1)^8}{2^8} = \frac{1}{256}$$

$$a_4 = \frac{(-1)^4}{2^4} = \frac{1}{16} \qquad a_9 = \frac{(-1)^9}{2^9} = -\frac{1}{512}$$

$$a_5 = \frac{(-1)^5}{2^5} = -\frac{1}{32} \qquad a_{10} = \frac{(-1)^{10}}{2^{10}} = \frac{1}{1024}$$

Los diez primeros términos de la sucesión son:

$$\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \frac{1}{64}, -\frac{1}{128}, \frac{1}{256}, -\frac{1}{512}, \frac{1}{1024}\right\}$$

El **término general** de una sucesión es la expresión algebraica que permite calcular cualquier término en función del índice.

Ejemplo 1

La expresión general para hallar el n-ésimo término de la sucesión de números impares $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\ldots\}$ es $2n - 1$. Así, el término 112 de esta sucesión es el número impar 223 porque

$$2n - 1 = 2(112) - 1 = 223$$

Ejemplo 2

Para encontrar los cuatro primeros términos de la sucesión cuyo término general está dado por $\left\{\frac{n+2}{n+3}\right\}$ se sustituye n por 1, 2, 3 y 4, así:

$$a_1 = \frac{1+2}{1+3} = \frac{3}{4} \qquad a_2 = \frac{2+2}{2+3} = \frac{4}{5}$$

$$a_3 = \frac{3+2}{3+3} = \frac{5}{6} \qquad a_4 = \frac{4+2}{4+3} = \frac{6}{7}$$

Luego, la sucesión está dada por $\left\{\frac{n+2}{n+3}\right\} = \left\{\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7} \ldots\right\}$.

Ejemplo 3

La sucesión {2, 3, 2, 3, 2, 3...} tiene la propiedad de que sus términos son 2 y 3 únicamente; 2 aparece en las posiciones impares: $n = 1, 3, 5...$, mientras que el número 3 aparece en las posiciones pares: $n = 2, 4, 6...$, por tanto se puede decir que dependiendo si es par o impar el valor de la sucesión es 2 o 3. Esto se escribe así:

$$a_n = \begin{cases} 2 \text{ si } n \text{ es impar} \\ 3 \text{ si } n \text{ es par} \end{cases}$$

18. Sucesiones recurrentes

Una **sucesión** es **recurrente** si sus términos, a partir de uno dado, se definen en función de los términos anteriores de acuerdo con una expresión algebraica conocida, denominada **fórmula de recurrencia**.

Ejemplo 4

Observa cómo se encuentran los primeros términos de la sucesión que cumple

$$a_1 = 5 \text{ y } a_n = a_{n-1} + 3$$

Con la expresión anterior se deduce que, en esta sucesión, cada término se obtiene a partir del anterior sumándole 3 unidades. De esta forma:

$$a_2 = a_1 + 3 = 5 + 3 = 8; \; a_3 = a_2 + 3 = 8 + 3 = 11;$$
$$a_4 = a_3 + 3 = 11 + 3 = 14$$

Por tanto, la sucesión es {5, 8, 11, 14...}.

18.2 La sucesión de Fibonacci

La sucesión de Fibonacci es una secuencia de números enteros descubierta por matemáticos indios hacia el año 1135 y difundida en Europa gracias a Fibonacci (Leonardo de Pisa). La sucesión se define mediante la siguiente fórmula de recurrencia:

$$a_1 = 1, a_2 = 1 \text{ y } a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2;$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$$

Si se continúa el proceso se obtiene la sucesión:

{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987...}

En la Figura 3.49 se observa la sucesión.

Espiral de Fibonacci

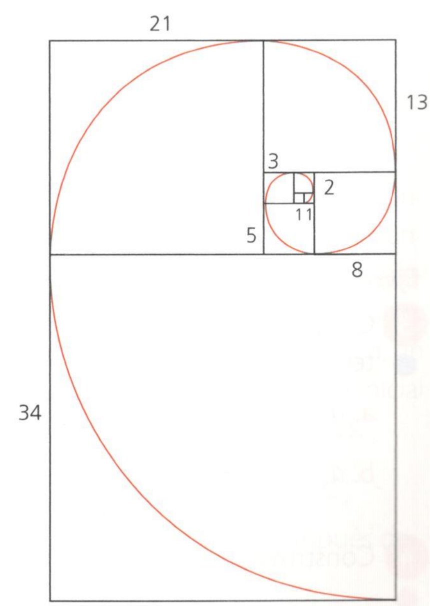


Figura 3.49

18 Término general de una sucesión

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Determina los tres primeros términos y el centésimo término de cada sucesión.

a. $a_n = 4n + 1$

b. $a_n = 3n + 2$

c. $a_n = \frac{(-1)}{n^3}$

d. $a_n = \frac{1}{n^2}$

e. $a_n = (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$

f. $a_n = \frac{(-1)^{n+2}}{n}$

g. $a_n = n^2 + 1$

h. $a_n = 10$

2 Halla la expresión general del n-ésimo término de cada una de las siguientes sucesiones.

a. 3, 6, 9, 12, 15…

b. 5, −25, 125, −625…

c. $1, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{7}{16}, \frac{9}{25}\ldots$

d. $-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}\ldots$

e. 0, 2, 0, 2, 0…

f. 1, 4, 7, 10…

Ejercitación

3 Calcula los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones recurrentes.

a. $a_1 = -3; \quad a_n = 2a_{n-1} + 2$

b. $a_1 = 5; \quad a_2 = -5; \quad a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$

4 Construye la sucesión recurrente definida por:

$a_1 = -2 \qquad a_n = a_{n-1} + 5$

5 Calcula para cada sucesión los términos pedidos.

a. Los seis primeros de $a_n = \frac{n-2}{n+1}$.

b. Los diez primeros de $b_n = 3(n+1)^2 + 1$.

c. c_6 y c_{20} en $c_n = n^2 - n + 3$

d. d_3 y d_{10} en $d_n = +\sqrt{n^2 - 13n + 30}$

e. Los cuatro primeros, e_5, e_{10} y e_{100}, en

$e_n = \frac{2n^2}{n-1}$.

6 Construye las sucesiones recurrentes dadas por:

a. $a_1 = 2; \quad a_n = a_{n-1} - 4$

b. $a_1 = 6; \quad a_n = a_{n-1} + 2$

c. $a_1 = 2; \quad a_2 = 3; \quad a_n = 5a_{n-1} - a_{n-2}$

d. $a_1 = 1; a_2 = 2; a_3 = 3; a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

Comunicación

7 Dadas las sucesiones:

$a_n = 4n - 3 \qquad b_n = (-1)^n \cdot 2n \qquad c_n = n^2 + 2$

a. Escribe los cinco primeros términos de cada sucesión.

b. Halla el término general de las sucesiones:

$(a_n + b_n) \qquad (b_n c_n)$

$3a_n \qquad a_n(b_n + c_n)$

8 Analiza y responde. ¿Qué puede decirse de una sucesión cuyo término general puede expresarse así?

a. $a_n = a_{n-1} + 10$

b. $a_n = a_{n-1} - 10$

c. $a_n = a_{n-1} \cdot 10$

d. $a_n = \frac{a_{n-1}}{10}$

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

9 Escribe los diez primeros términos de una sucesión cuyo primer término es 2 y los restantes se obtienen multiplicando por 5 y sustrayéndole 3 al término anterior.

10 Observa las sucesiones dadas.

$a_n = \{1, 3, 5, 7...\}$

$b_n = \{2, 4, 6, 8...\}$

$c_n = \{-15, -10, -5, 0...\}$

Halla:

a. $a_n + b_n$

b. $2a_n - c_n$

c. $(a_n - c_n)b_n$

Razonamiento

11 Determina si los números $1, \frac{1}{2}, \frac{8}{5}, \frac{11}{7}$ son términos de la sucesión $a_n = \frac{3n-1}{n+3}$.

Modelación

12 Demuestra que:

a. Los primeros cuatro términos de la sucesión $a_n = n^2$ son

$$1, 4, 9, 16...$$

b. Los primeros cuatro términos de la sucesión

$$a_n = n^2 + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$

también son

$$1, 4, 9, 16...$$

Ejercitación

13 Halla los primeros 10 términos de la sucesión definida por

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2} & \text{si } a_n \text{ es un número par} \\ 3a_n + 1 & \text{si } a_n \text{ es un número impar} \end{cases}$$

y $a_1 = 11$. Haz lo mismo si $a_1 = 25$. Luego, haz una conjetura acerca de este tipo de sucesión. Intenta otros valores para a_1.

Razonamiento

14 Encuentra una fórmula para el n-ésimo término de la siguiente sucesión.

$$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$$

Resolución de problemas

15 Alcira deposita \$ 2 000 000 en un CDT que paga 2,4% de interés anual, capitalizado mensualmente. La cantidad en la cuenta después de n meses está dada por la sucesión

$$a_n = 2\,000\,000\left(1 + \frac{0{,}024}{12}\right)^n$$

a. Encuentra los primeros seis términos de la sucesión.

b. Halla la cantidad en la cuenta después de 3 años.

Evaluación del aprendizaje

i Al finalizar cada mes, Andrés deposita \$ 100 000 en una cuenta que paga 5% de interés anual, capitalizado mensualmente. La cantidad de interés que ha acumulado después de n meses está dada por la sucesión

$$a_n = 100\,000\left(\frac{1{,}005^n - 1}{0{,}005} - n\right)$$

a. Encuentra los primeros seis términos de la sucesión.

b. Halla el interés que ha acumulado después de 5 años.

ii Un biólogo está tratando de hallar la concentración óptima de sal para el crecimiento de cierta especie de molusco. Empieza con una solución de salmuera que tiene 4 g/L de sal y aumenta la concentración en un 10% al día. Denota con C_0 la concentración inicial y con C_n la concentración después de n días.

a. Encuentra una definición recursiva de C_n.

b. Encuentra la concentración de sal después de 8 días.

Practica más

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Razones y proporciones

Comunicación

1 Observa la Figura 3.49 y escribe tres razones que se puedan establecer.

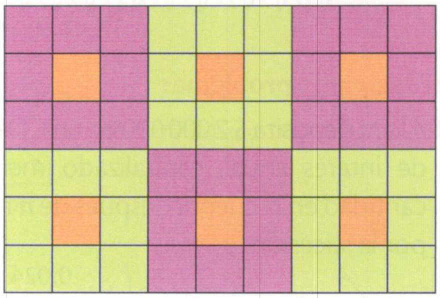


Figura 3.49

Ejercitación

2 Encuentra el término desconocido de cada proporción.

a. $\frac{5}{7} = \frac{75}{x}$ b. $\frac{x}{2} = \frac{8}{16}$ c. $\frac{2}{6} = \frac{x}{9}$

d. $\frac{5}{x} = \frac{6}{24}$ e. $\frac{12}{4} = \frac{9}{x}$ f. $\frac{8}{3} = \frac{x}{15}$

Proporcionalidad directa e inversa

Razonamiento

3 Determina el tipo de correlación que existe entre cada par de magnitudes. Justifica tus respuestas.

a. Cantidad de monedas en una alcancía y peso de la alcancía.

b. Kilos de harina y número de galletas.

c. Cantidad de videos almacenados en una memoria USB y espacio libre en la memoria.

d. Kilómetros recorridos en un automóvil y cantidad de gasolina empleada.

Resolución de problemas

4 Resuelve cada una de las siguientes situaciones.

a. Felipe dibujó en papel un árbol de 15 m de alto con una altura de 2,5 cm. Si dibuja un edificio con una altura de 6,7 cm, ¿cuál es su altura real?

b. Una fotocopiadora reproduce una imagen 102 veces en 2 min. ¿Cuántas imágenes reproducirá en 5 min?

c. Carlos recibe $ 225 000 por trabajar 18 horas a la semana. Si esta semana trabajó siete horas menos, ¿cuánto dinero recibió?

Funciones

Razonamiento

5 Completa las tablas 3.48 y 3.49 Luego, representa gráficamente cada función en tu cuaderno.

a.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y = 2x + 1$							

Tabla 3.48

b.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y = x^2 + 1$							

Tabla 3.49

Comunicación

6 Completa la Tabla 3.50 a partir de la Figura 3.50.

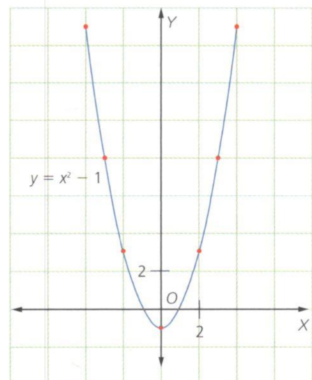


Figura 3.50

x	y
−4	
−3	
−2	
−1	
0	
1	
2	
3	
4	

Tabla 3.50

Resolución de problemas

7 En un estacionamiento se observa el letrero:

Tarifa para autos:
$ 50 por minuto

a. Completa la Tabla 3.51.

Tiempo (min)	1	2	3	4	5	10	15
Valor ($)	50						

Tabla 3.51

b. Determina si esta situación corresponde a una función o no.

c. Escribe la expresión algebraica asociada a esta situación y traza la gráfica correspondiente.

d. Determina los intervalos donde la función crece y donde decrece.

e. Halla los puntos máximos y mínimos.

Resolución de **problemas**

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Estrategia: Deducir una fórmula

Problema

En la Tabla 3.52 se registra la cantidad de litros de agua que vierte una llave con el paso del tiempo.

Minutos (t)	Litros de agua (L)
3	39
5	65

Tabla 3.52

¿Cuántos litros de agua verterá la llave en siete minutos? ¿Cuántos verterá en 45 minutos?

1. Comprende el problema

- ¿Qué relación existe entre las magnitudes tiempo y cantidad de litros de agua?

  R: Las magnitudes son directamente proporcionales.

- ¿Qué se pide averiguar?

  R: La cantidad de litros de agua que vierte la llave en siete y en 45 minutos.

2. Crea un plan

- Halla la razón de proporcionalidad. Expresa, mediante una fórmula, la relación entre las dos magnitudes y calcula la cantidad de litros que vierte la llave.

3. Ejecuta el plan

- Determina la razón de proporcionalidad.

$$\frac{39}{3} = \frac{65}{5} = 13$$

- Plantea una fórmula que relacione los litros de agua (L) que vierte la llave con el tiempo (t) dado.

$$L = 13 \cdot t$$

- Reemplaza t por 7 y por 45 en la fórmula anterior.

$$L = 13 \cdot 7 = 91 \qquad L = 13 \cdot 45 = 585$$

R: La llave verterá 91 L de agua en siete minutos y 585 L en 45 minutos.

4. Comprueba la respuesta

- Reemplaza t por 28 y verifica que en 28 min la llave verterá 364 L de agua.

Aplica la estrategia

1. Las magnitudes de la Tabla 3.53 son directamente proporcionales.

X	1	3	5	6	9
Y	a	18	30	36	b

Tabla 3.53

¿Cuál es la fórmula que relaciona las magnitudes X y Y? ¿Qué valor corresponde a las letras a y b?

a. Comprende el problema

....

....

b. Crea un plan

....

....

c. Ejecuta el plan

....

....

d. Comprueba la respuesta

....

....

Resuelve otros problemas

2. En un curso hay cinco niñas por cada cuatro niños. Si el total de niñas del curso es 15, ¿cuántos estudiantes hay en total?

3. Una máquina empaca 24 jugos en 20 min. ¿Cuántos jugos empaca en una hora?

Formula problemas

4. Plantea y resuelve un problema que involucre la siguiente información.

"Al calcular la cuarta parte de un número, se obtiene el 25%"

Enriquece tu vocabulario

- Presente a los estudiantes diferentes significados de la palabra *función*. Por ejemplo: actividad particular que realiza una persona. Compare esta definición con el significado en matemáticas.

Evaluación del aprendizaje

Razones y proporciones

Ejercitación

1 Escribe la razón que se asocia a cada situación.

ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

Situación	Razón
Por cada cuatro galones de gasolina, el automóvil recorre 192 kilómetros.	
Una máquina produce 45 dulces amarillos por cada 60 rojos.	
En un centro comercial, por cada siete adultos ingresan dos niños.	
En una receta, por cada dos cucharadas de mantequilla se utilizan doce cucharadas de harina.	

Tabla 3.54

2 Halla el término desconocido en cada proporción.

ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $\frac{20}{5} = \frac{24}{x}$

b. $\frac{12}{4} = \frac{y}{64}$

c. $\frac{a}{22} = \frac{12}{18}$

d. $\frac{17}{b} = \frac{51}{3}$

Proporcionalidad directa e inversa

Comunicación

3 Identifica el tipo de correlación que existe entre las magnitudes registradas en cada tabla y complétalas.

ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. Relación entre el número de vueltas dadas a una cancha de fútbol y el tiempo empleado.

Número de vueltas	Tiempo (min)
4	16
8	32
16	

Tabla 3.55

b. Relación entre el número de obreros que se necesitan para construir un edificio y número de días empleados.

Número de obreros	Días empleados
40	8
32	

Tabla 3.56

Razonamiento

4 Relaciona las expresiones equivalentes.

ACTIVIDAD PARA RELACIONAR

a. 20% de 300 ◯ 9
b. 30% de 150 ◯ 400
c. 60% de 900 ◯ 360
d. 80% de 500 ◯ 60
e. 10% de 650 ◯ 45
f. 5% de 180 ◯ 540
g. 50% de 720 ◯ 65

Resolución de problemas

5 Una máquina produce 1 350 botellas en 10 horas

a. ¿Cuántas botellas fabrica la máquina en 17 horas?

b. Si un día la máquina solo funciona 5,2 horas, ¿cuántas botellas fabrica?

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Proporcionalidad compuesta

6 En una fábrica confeccionan 3 200 camisetas trabajando 10 horas diarias durante 10 días. ¿Cuánto tardarán en completar un pedido de 6 000 camisetas trabajando 12 horas diarias?

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

7 En una empresa tienen 6 máquinas tejedoras y tardan 6 horas en hacer 144 sacos. Si se ponen en funcionamiento 8 máquinas y se quieren hacer 1 200 sacos, ¿cuántas horas tardarán?

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lenguaje algebraico

Comunicación

8 Relaciona cada enunciado con su correspondiente expresión en lenguaje algebraico.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

a. El cuadrado de un número menos su triple. ◯ $\frac{2}{4}x + 7$

b. Un número impar. ◯ $x^2 - 3x$

c. Los dos cuartos de un número más siete unidades. ◯ $2x + 1$

9 Un tanque contiene 49 L de agua y cada hora se vierten en este 0,5 litros de agua. Expresa con lenguaje matemático la información.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Ecuaciones e inecuaciones

Razonamiento

10 Resuelve. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

a. $3x + 3 = 24$ b. $15m - 8 = 42$

c. $36 - 3x > 12$ d. $\frac{4}{5}x - 13 < 125$

Funciones

11 Realiza una representación gráfica de la función asociada a la siguiente tabla en la que figuran algunos valores de la función (considera a x real). ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	6	1	−2	−3	−2	1	6

Tabla 3.57

12 Determina si las funciones asociadas a las siguientes situaciones son crecientes o decrecientes. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. Juan paga $ 200 por cada paquete de galletas que compra en la tienda.

b. Duración de una construcción según el número de trabajadores.

c. Número de tornillos de iguales características fabricados en un tiempo determinado.

Resolución de problemas

13 En la tabla se registra la distancia recorrida por un automóvil y el tiempo empleado en recorrerla a una velocidad constante. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Distancia recorrida (km)	Tiempo empleado (h)
40	1
80	2
120	3
160	4
200	5
240	6

Tabla 3.58

a. ¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál es la variable dependiente?

b. Si el automóvil empleó 10 h en un recorrido, ¿cuántos km recorrió?

c. ¿Cuál es la función asociada a la situación?

14 Indica si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

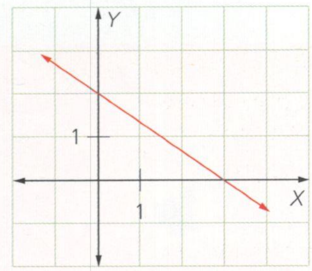


Figura 3.50

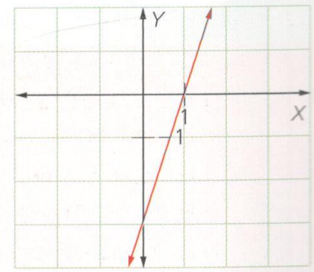


Figura 3.51

15 Un centro de modas lleva un control de la cantidad de la tela que utiliza en la confección de camisetas.. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Cantidad de tela (m)	Camisetas confeccionadas
3	7
6	
9	
12	

Tabla 3.59

a. Completa la Tabla 3.59.

b. Escribe la fórmula de la función que relaciona las dos magnitudes.

c. ¿Cuántos metros de tela se requieren para confeccionar 112 camisetas?

d. Determina si la función es creciente o decreciente.

Regularidades y sucesiones

Razonamiento

16 Elige la respuesta correcta. SELECCIÓN MÚLTIPLE

Para el viaje de excursión, un estudiante decide guardar el primer día $ 500, al segundo día $ 1 000, al tercer día $ 1 500, y así sucesivamente. ¿Cuánto dinero tendrá luego de 20 días?

a. $ 10 000   b. $ 100 000

c. $ 105 000   d. $ 150 000

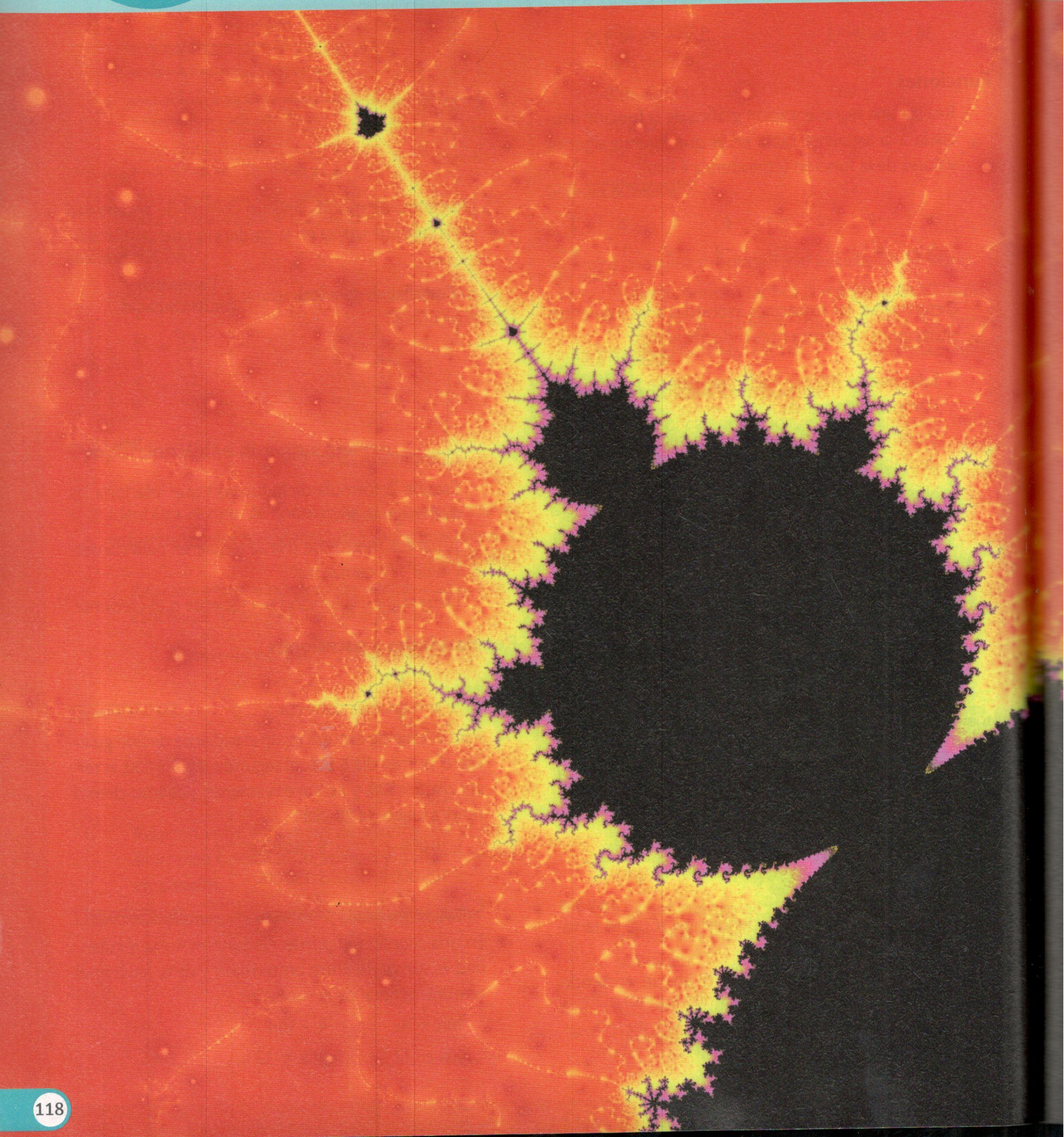
17 Señala la respuesta correcta. SELECCIÓN MÚLTIPLE

En una sucesión, el primer término es 4 y la regularidad es sumar 16 entre un término y otro, ¿cuál es el término general de la sucesión?

a. $16n + 4$ b. $4 + 16n$

c. $16x - 12$ d. $16x + 12$

4 Geometría



Ya sabemos

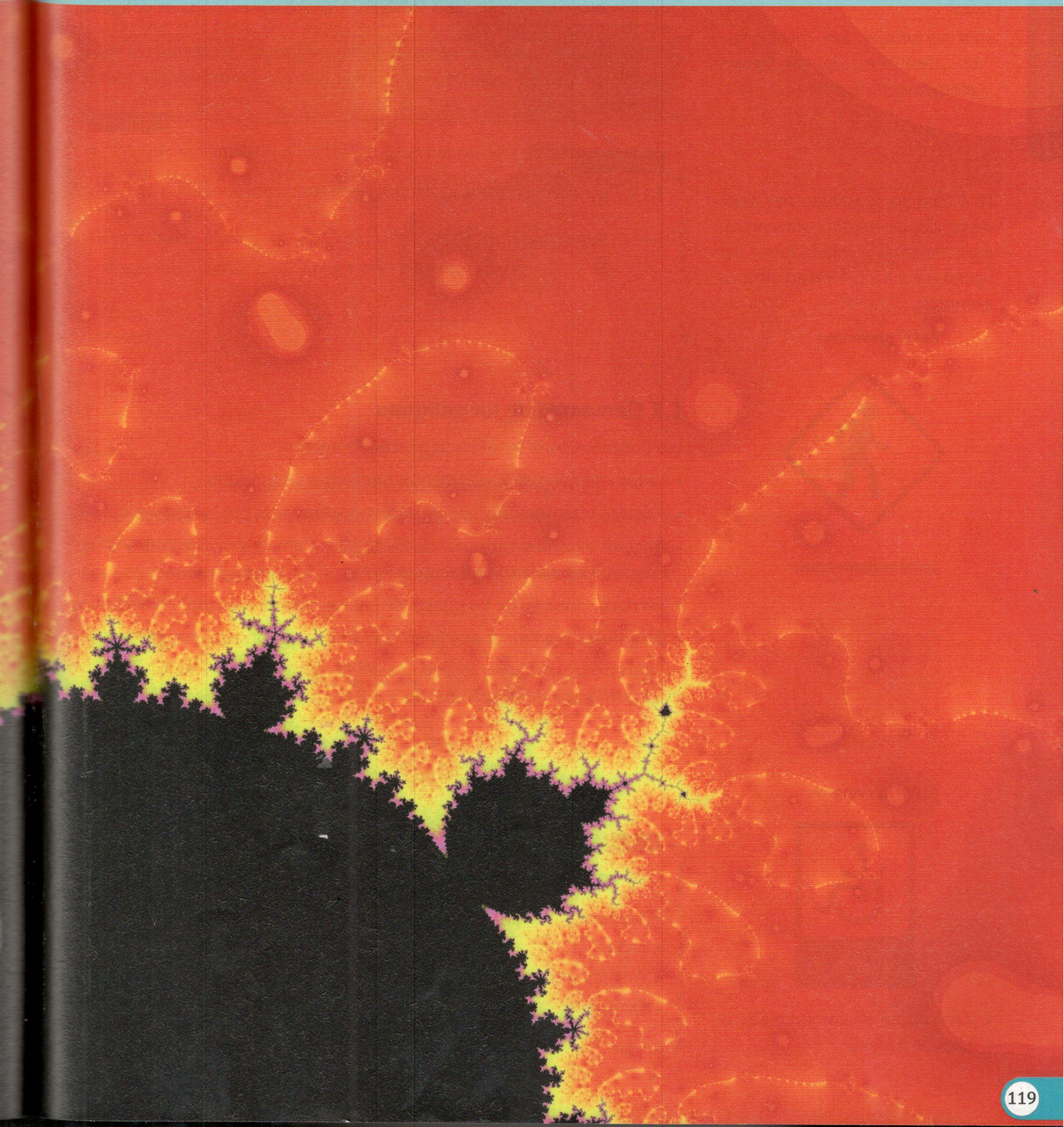
- Identificar características de localización de objetos en una representación cartesiana.

Vamos a aprender

- A clasificar polígonos, a reconocer figuras congruentes y semejantes y a aplicar transformaciones a una figura en el plano.

Nos sirve para

- Reconocer y diferenciar los conceptos de reflexión, traslación y rotación de una figura en el plano.



1 Polígonos

Saberes previos

Responde las preguntas.

- ¿Qué señales de tránsito conoces?
- En las señales que mencionaste, ¿reconoces algunas figuras geométricas? ¿Cuáles?

Analiza

En Colombia se utilizan tres tipos de señales de tránsito: preventivas, reglamentarias e informativas. Las figuras 4.1 a 4.3 presentan algunos ejemplos.

Señal preventiva

Figura 4.1

Señal reglamentaria

Figura 4.2

Señal informativa

Figura 4.3

- ¿Qué tienen en común estas señales de tránsito?

Conoce

La señal preventiva tiene forma de rombo, la reglamentaria tiene forma octagonal y la señal informativa es rectangular.

De acuerdo con lo anterior, estas señales de tránsito tienen forma de **polígonos**.

Un **polígono** es una figura plana en la que ningún par de segmentos se interseca, excepto en sus extremos, y ningún par con un extremo común es colineal.

Ejemplo 1

En la Figura 4.4 se presentan algunos ejemplos de polígonos.

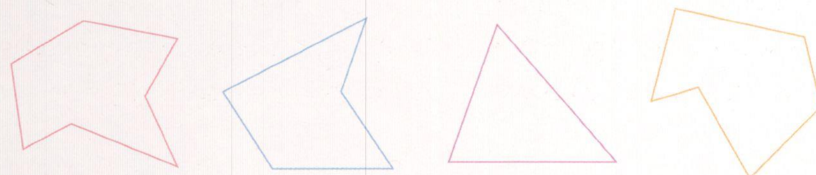


Figura 4.4

1.1 Elementos de un polígono

Los polígonos constan de los siguientes elementos.

- **Lados**: cada uno de los segmentos que forman el polígono.
- **Ángulos internos**: cada uno de los ángulos formados por lados consecutivos.
- **Ángulos externos**: cada uno de los ángulos formados por un lado y la prolongación de un lado consecutivo.
- **Vértices**: cada uno de los puntos de intersección de dos lados consecutivos.
- **Diagonales**: segmentos que unen dos vértices no consecutivos.

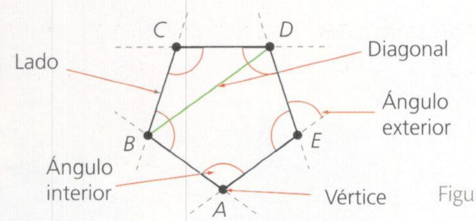


Figura 4.5

Ejemplo 2

En el polígono *ADCB* de la Figura 4.6 se identifican estos elementos:

- Vértices: *A*, *B*, *C* y *D*
- Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$
- Ángulos internos: $\measuredangle A$, $\measuredangle B$, $\measuredangle C$ y $\measuredangle D$
- Diagonales: $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$

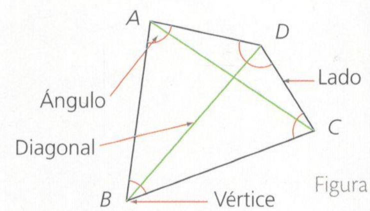


Figura 4.6

1.2 Clasificación de polígonos según su forma

Los polígonos se clasifican según su forma en cóncavos y convexos.

- Un polígono es **cóncavo** si al menos uno de sus ángulos internos es mayor que 180° y al trazar las diagonales alguna queda en el exterior del polígono.
- Un polígono es **convexo** si ninguno de sus ángulos internos es mayor que 180° y al trazar sus diagonales, estas quedan totalmente contenidas en el interior del polígono.

Ejemplo 3

- El polígono *ABCDEFG* de la Figura 4.7 es cóncavo, pues la medida del ángulo *F* es mayor que 180° y hay dos diagonales que están en el exterior del polígono. Estas son $\overline{AE}$ y $\overline{GE}$.
- Por su parte, el polígono *PQRS* de la Figura 4.8 es convexo, ya que todas sus diagonales quedan en el interior del polígono. Estas son $\overline{PR}$ y $\overline{SQ}$.

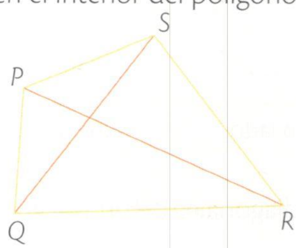


Figura 4.8

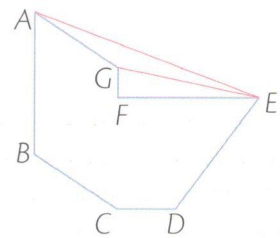


Figura 4.7

Los polígonos también pueden clasificarse en regulares e irregulares.

- Los **polígonos regulares** tienen todos sus lados congruentes y sus ángulos de la misma medida.
- Los **polígonos irregulares** son aquellos polígonos que no cumplen las condiciones anteriores.

Ejemplo 4

- En la Figura 4.9 se presentan algunos polígonos regulares. Cada polígono tiene todos sus lados congruentes y todos sus ángulos de igual medida.

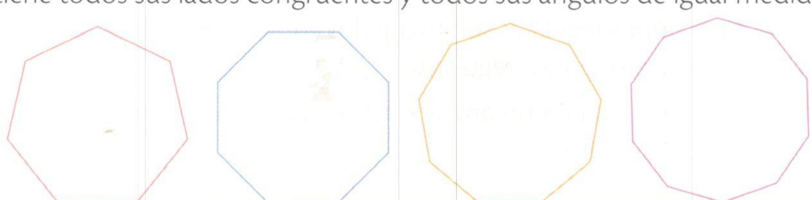


Figura 4.9

- Los polígonos de la Figura 4.10 son todos irregulares.

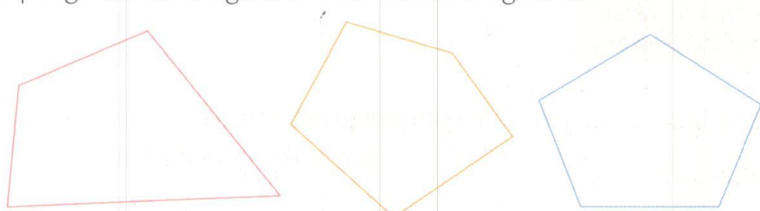


Figura 4.10

1.3 Clasificación de polígonos según su número de lados

Según su número de lados, los polígonos se clasifican como se muestra en la Tabla 4.1.

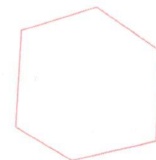
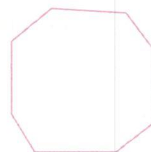
Triángulo	Cuadrilátero	Pentágono	Hexágono
			
Tres lados	Cuatro lados	Cinco lados	Seis lados
Heptágono	**Octágono**	**Nonágono**	**Decágono**
			
Siete lados	Ocho lados	Nueve lados	Diez lados

Tabla 4.1

Para calcular la cantidad de diagonales de un polígono de n lados, se utiliza la fórmula $\frac{n \cdot (n - 3)}{2}$.

La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados se puede determinar mediante la fórmula $(n - 2) \cdot 180°$.

Cada uno de los ángulos interiores de un polígono regular de n lados mide $\frac{(n - 2) \cdot 180°}{n}$.

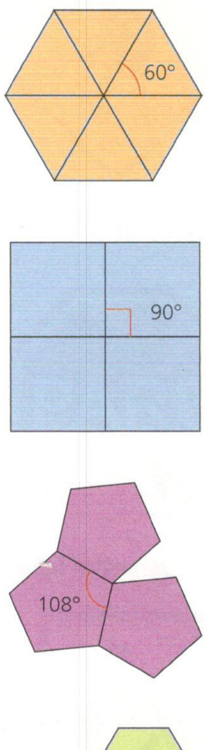


Figura 4.11

Ejemplo 5

Es posible recubrir el plano con un polígono regular cuando la medida de cada uno de sus ángulos interiores es divisor de 360°.

Algunos polígonos regulares son triángulos equiláteros, cuadrados, pentágonos regulares y hexágonos regulares.

Al calcular la medida de un ángulo interior de cada uno, se encuentran los resultados de la Tabla 4.2.

Polígono regular	Triángulo equilátero	Cuadrado	Pentágono regular	Hexágono regular
Medida de cada ángulo interior	60°	90°	108°	120°

Tabla 4.2

Por consiguiente, se puede recubrir el plano con todos estos polígonos, excepto con el pentágono regular, ya que 108° no es divisor de 360° (Figura 4.11).

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Determina cuáles de las figuras 4.12 a 4.15 son polígonos y cuáles no.

a.

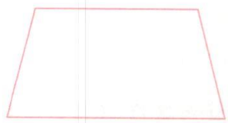


Figura 4.12

b.

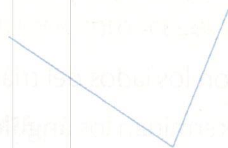


Figura 4.13

c.

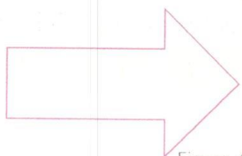


Figura 4.14

d.

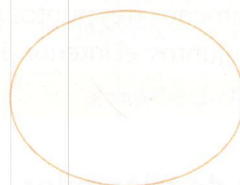


Figura 4.15

2 Observa la Figura 4.16 e identifica sus elementos.

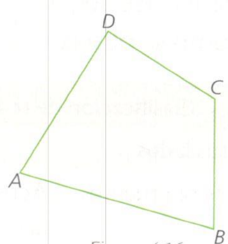


Figura 4.16

3 Clasifica los polígonos de las figuras 4.17 a 4.20 en convexos o cóncavos, según corresponda.

a.

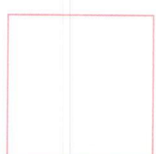


Figura 4.17

b.

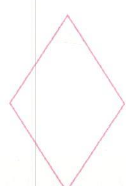


Figura 4.18

c.

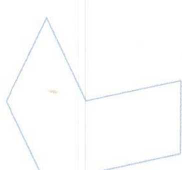


Figura 4.19

d.

Figura 4.20

Razonamiento

4 Responde.

a. ¿Cuál es la suma de la medida de los ángulos interiores de un decágono?

b. ¿Cuánto mide cada ángulo interior de un nonágono regular?

Resolución de problemas

5 Construye un cuadrado sobre cada uno de los lados de un hexágono regular. Une los vértices sueltos mediante segmentos. ¿Qué obtienes?

Evaluación del aprendizaje

Según la medida de sus lados, un triángulo es isósceles si tiene dos lados congruentes, equilátero si tiene sus tres lados congruentes, y escaleno si los tres lados tienen distinta medida.

Según la medida de sus ángulos, un triángulo es rectángulo si tiene un ángulo recto, acutángulo si tiene sus tres ángulos agudos y obtusángulo si tiene un ángulo obtuso.

- Clasifica cada triángulo según la medida de sus lados y de sus ángulos.

a.

Figura 4.21

b.

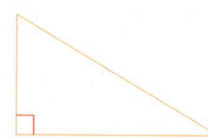


Figura 4.22

c.

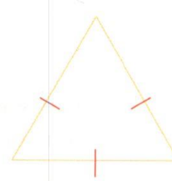


Figura 4.23

d.

Figura 4.24

Educación ambiental

Organiza una campaña en tu colegio sobre el uso adecuado de los residuos sólidos. Para esto elabora diferentes carteles en forma de polígonos con mensajes que lleven a la concientización sobre el reciclaje, la reutilización y la reducción de residuos.

2 Triángulos

Saberes previos

Construye en tu cuaderno triángulos con las siguientes características.

- Lados de medidas 8 cm, 3 cm y 5 cm.
- Ángulos de medidas 80°, 60°, 40°.
- Lados de medidas 8 cm, 6 cm y 10 cm.
- Ángulos de medidas 25°, 120°, 35°.

Después forma grupo con dos compañeros más y comparen los triángulos. ¿Tienen la misma forma? ¿Tienen el mismo tamaño? Escriban una conclusión.

Analiza

Observa el triángulo de la Figura 4.25.

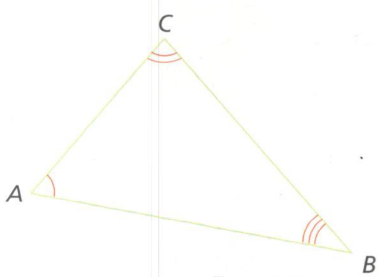


Figura 4.25

- ¿Cómo puedes comprobar que el triángulo de la figura no es isósceles?
- ¿Por qué se puede afirmar que es un triángulo acutángulo?

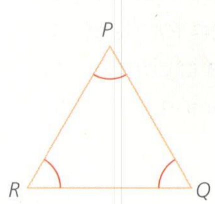


Figura 4.26

Conoce

En el $\triangle ABC$ de la Figura 4.25, se identifican los siguientes elementos.

- Los puntos de intersección A, B y C de los segmentos son los **vértices** del triángulo.
- Los tres **segmentos** son los lados del triángulo: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.
- Cada par de lados determinan los **ángulos interiores** $\measuredangle A$, $\measuredangle B$ y $\measuredangle C$.

El **triángulo** ABC es el conjunto formado por tres segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ que unen, respectivamente, tres puntos A, B, C no colineales. Estos dividen el plano en tres subconjuntos: el interior del triángulo, el exterior del triángulo y el mismo triángulo.

2.1 Clasificación de triángulos

Los triángulos pueden clasificarse según la longitud de sus lados o según la medida de sus ángulos, como se observa en la Tabla 4.3.

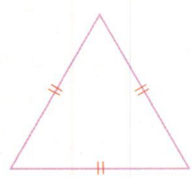
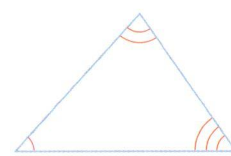
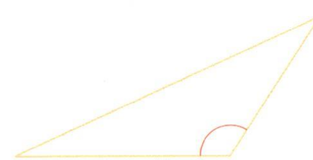
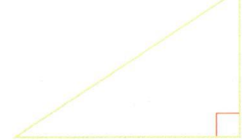
Clasificación de triángulos	
Según la longitud de sus lados	**Según la medida de sus ángulos**
Equilátero: sus tres lados son congruentes. 	**Acutángulo:** sus tres ángulos son agudos. 
Isósceles: tiene un par de lados congruentes.	**Obtusángulo:** tiene un ángulo obtuso. 
Escaleno: sus tres lados tienen diferente longitud. 	**Rectángulo:** uno de sus ángulos es recto. 

Tabla 4.3

Por tanto, si se verifica la medida de los lados del triángulo de la Figura 4.25, se podrá comprobar que es un triángulo escaleno. Además, es un triángulo acutángulo porque sus tres ángulos son agudos.
El triángulo de la Figura 4.26 tiene sus tres ángulos congruentes. Ese tipo de triángulo se conoce como **equiangular.** Todo triángulo equiangular es acutángulo.

Ejemplo 1

El triángulo de la Figura 4.27 tiene un ángulo que mide 100°. Por lo tanto, es un triángulo obtusángulo.

El triángulo tiene dos lados congruentes, entonces es isósceles.

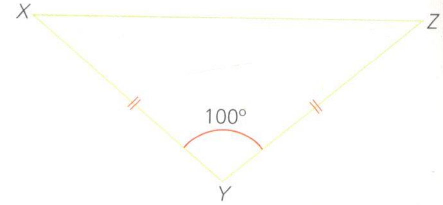


Figura 4.27

2.2 Construcción de triángulos

En la construcción geométrica de triángulos se utilizan instrumentos tales como la regla, el compás y el transportador. A continuación se presenta el paso a paso para construir triángulos a partir de diferentes características.

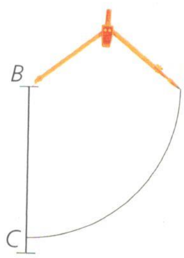
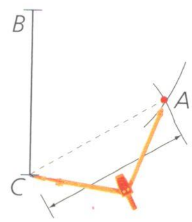
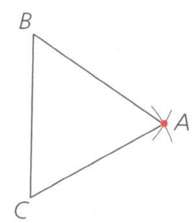
Conociendo los tres lados		
Dados los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ del triángulo. 		
1. Se traza un segmento con la medida de cualquiera de los lados, por ejemplo $\overline{BC}$. Con centro en B se dibuja un arco con una abertura igual a la medida del $\overline{AB}$. 	**2.** Se traza otro arco con centro en C y una abertura igual a la longitud de $\overline{AC}$ que interseque al arco anterior en el punto A. 	**3.** Se trazan los dos lados desde los extremos de $\overline{BC}$ hasta el punto A. 

Tabla 4.4

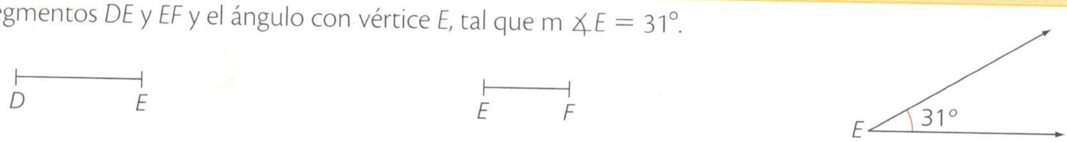
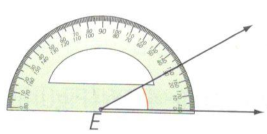
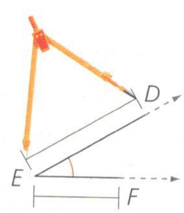
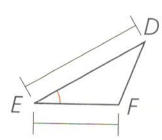
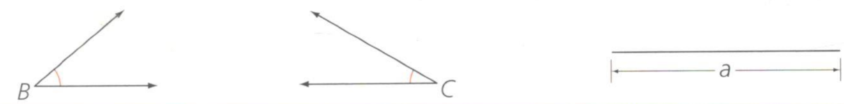
Conociendo dos lados y el ángulo comprendido entre ellos		
Dados los segmentos DE y EF y el ángulo con vértice E, tal que m $\measuredangle E = 31°$. 		
1. Con el transportador se construye el ángulo conocido. 	**2.** Usando el compás se trasladan los lados $\overline{DE}$ y $\overline{EF}$, haciéndolos coincidir con los rayos del ángulo. 	**3.** Se traza el tercer lado uniendo los puntos D y F. 

Tabla 4.5

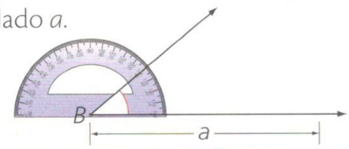
2 Triángulos

Conociendo dos ángulos y el lado común

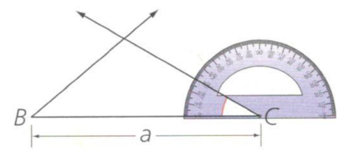
Dados ∡B y ∡C, y un lado a común a ellos.



1. Se traza uno de los ángulos conocidos. Por ejemplo, ∡B, y sobre uno de sus lados se mide la longitud del lado a.



2. En el otro extremo de a se traza el ángulo C.



3. El punto de intersección de los lados no comunes del ∡B y ∡C es el vértice A del triángulo ABC.

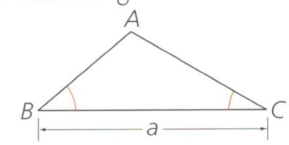


Tabla 4.6

Ejemplo 2

Observa cómo se construye un triángulo de lados 2 cm, 4 cm y 5 cm.

1. Se traza el $\overline{AB}$ de longitud 5 cm. Con el compás se toma la medida de 4 cm y con centro en A se dibuja un arco.

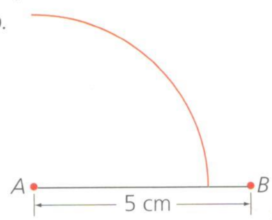


Figura 4.28

2. Con centro en B se dibuja un arco con abertura de 2 cm que interseque el arco anterior.

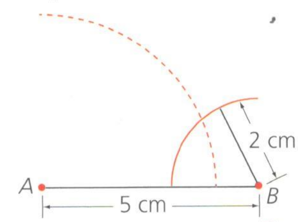


Figura 4.29

3. El punto de intersección de los dos arcos anteriores es el punto C.

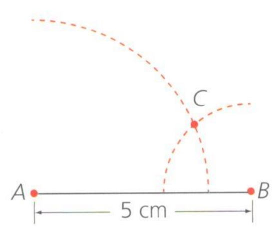


Figura 4.30

4. Se trazan los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

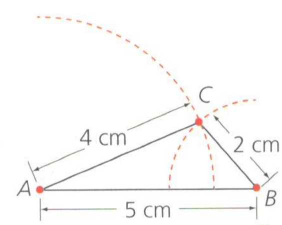


Figura 4.31

Ejemplo 3

Tres segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, tienen respectivamente las siguientes longitudes: 7 cm, 2 cm y 4 cm. ¿Es posible construir un triángulo con esos segmentos?

1. Se traza un segmento AB de longitud 7 cm.
2. Con centro en A se dibuja un arco con abertura de 4 cm (Figura 4.32). Con centro en B, se dibuja un arco con abertura 2 cm (Figura 4.33).

Como los dos arcos anteriores no se intersecan, se concluye que no existe un triángulo con las longitudes dadas.

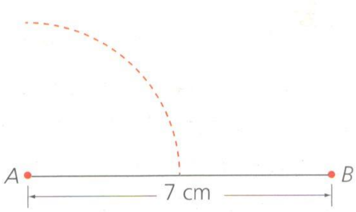


Figura 4.32

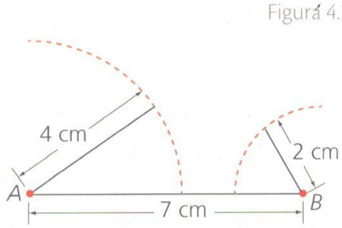


Figura 4.33

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Clasifica los triángulos según la medida de sus lados. Las pequeñas líneas sobre los lados de los triángulos indican que esos segmentos tienen la misma medida.

a.

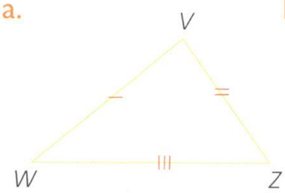


Figura 4.34

b.

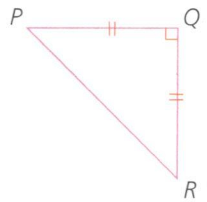


Figura 4.35

c.

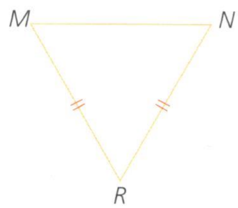


Figura 4.36

d.

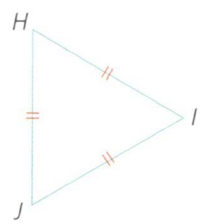


Figura 4.37

2 Clasifica los siguientes triángulos de acuerdo con la medida de sus ángulos.

a.

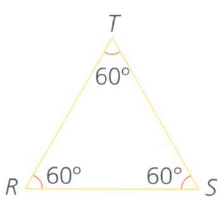


Figura 4.38

b.

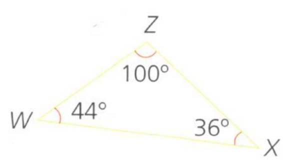


Figura 4.39

c.

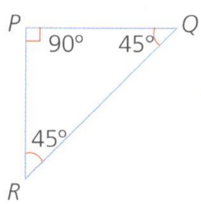


Figura 4.40

d.

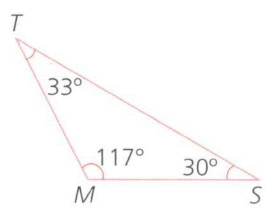


Figura 4.41

3 Escribe si cada afirmación es verdadera o falsa.

a. Si un triángulo es isósceles, es equilátero.

b. Si un triángulo es equilátero, es isósceles.

c. Si un triángulo es rectángulo, es equilátero.

d. Algunos triángulos son rectángulos e isósceles.

e. Ningún triángulo rectángulo es acutángulo.

Razonamiento

4 Encuentra el valor de x en cada caso.

a.

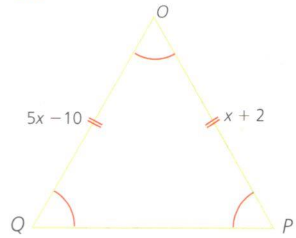


Figura 4.42

b.

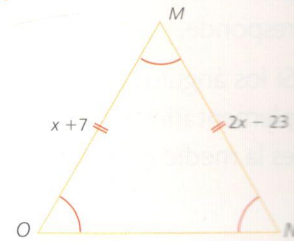


Figura 4.43

5 Halla el valor de las incógnitas en cada figura.

a.

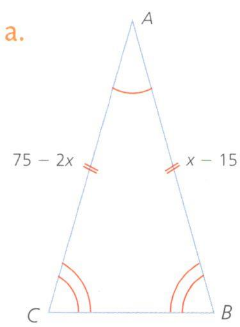


Figura 4.44

b.

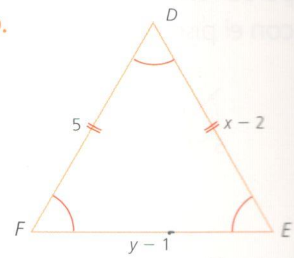


Figura 4.45

6 Construye un triángulo ABC usando los elementos dados en cada caso.

a. $a = 3$ cm, $b = 4$ cm y $c = 3$ cm

b. $a = 6$ cm, $b = 4$ cm y $m\measuredangle C = 56°$

Resolución de problemas

7 Un triángulo rectángulo tiene los dos catetos congruentes. ¿Qué puedes decir de los dos ángulos agudos que tiene ese triángulo?

Evaluación del aprendizaje

Francisco necesita rodear con malla una finca que mide 15 dam en uno de sus lados y 12 dam en otro y que tiene forma triangular. Se sabe que el ángulo comprendido entre este par de lados mide 35°.

a. ¿Cuál es la representación del terreno? Dibújala en tu cuaderno.

b. Usa la regla y luego realiza las conversiones pertinentes para encontrar la longitud del tercer lado.

c. ¿Cuánta malla debe comprar Francisco en total?

3 Propiedades de los triángulos

Saberes previos

¿Recuerdas qué son ángulos complementarios? Consulta. Luego, responde.

Si los ángulos $\measuredangle A$ y $\measuredangle B$ son complementarios y $m\measuredangle A = 32°$, ¿cuál es la medida del $\measuredangle B$?

Analiza

Una escalera está apoyada en una pared formando un ángulo de 60° con el piso (Figura 4.46).

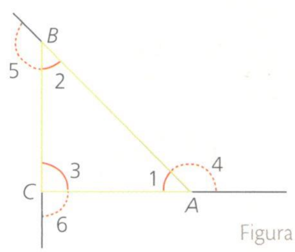


Figura 4.46

- ¿Cuál es medida del ángulo B?

Conoce

El triángulo ABC de la Figura 4.46 es rectángulo ya que $\measuredangle C$ es recto y $\measuredangle A$ mide 60°.

Para calcular la medida del $\measuredangle B$ se puede partir del hecho de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.

$$m\measuredangle A + m\measuredangle B + m\measuredangle C = 180°$$
$$60° + m\measuredangle B + 90° = 180°$$
$$m\measuredangle B = 180° - 150° = 30°$$

3.1 Propiedades relacionadas con los ángulos del triángulo

1. La suma de las medidas de sus ángulos internos es 180°.

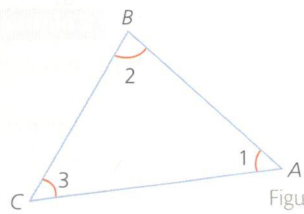


Figura 4.47

$$m\measuredangle 1 + m\measuredangle 2 + m\measuredangle 3 = 180°$$

2. La suma de las medidas de sus ángulos externos es 360°.

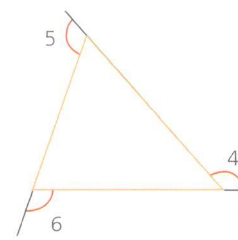


Figura 4.48

$$m\measuredangle 4 + m\measuredangle 5 + m\measuredangle 6 = 360°$$

3. La medida de un ángulo exterior es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes a dicho ángulo.

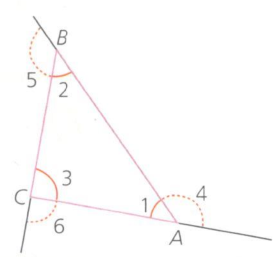


Figura 4.49

$$m\measuredangle 4 = m\measuredangle 2 + m\measuredangle 3$$

4. Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a esos lados son congruentes.

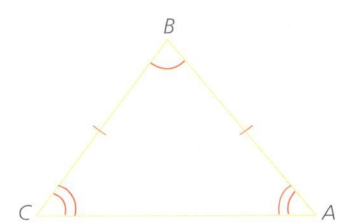


Figura 4.50

Si $\overline{AB} \cong \overline{BC}, m\measuredangle A = m\measuredangle C$

Ejemplo 1

En el triángulo CBX:

$m\measuredangle X + m\measuredangle C + m\measuredangle B = 180°$

Entonces,

$m\measuredangle X + 100° + 36° = 180°$

Luego, $m\measuredangle X = 44°$.

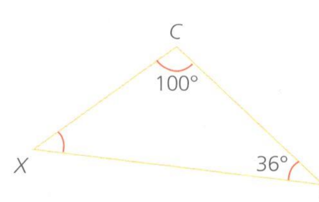


Figura 4.51

3.2 Propiedades relacionadas con los lados del triángulo

1. En un triángulo, la medida de uno de los lados es menor que la suma de los otros dos y mayor que la diferencia.

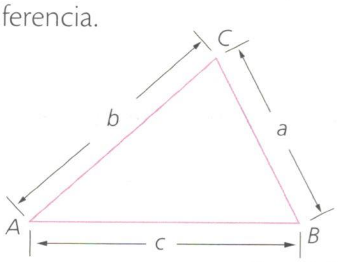


Figura 4.52

$a < b + c$ y $a > b - c$

2. En un triángulo, al lado mayor se opone el ángulo mayor.

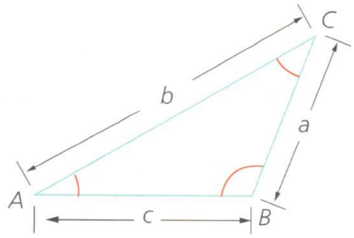


Figura 4.53

Como b es mayor que a y c, entonces $\measuredangle B$ es mayor que $\measuredangle A$ y $\measuredangle C$.

Ejemplo 2

Es posible construir un triángulo cuyos lados midan 7 cm, 5 cm y 3 cm, dado que se cumplen las siguientes relaciones:

$a < b + c$	$b < a + c$	$c < a + b$
$7 < 5 + 3$	$5 < 7 + 3$	$3 < 7 + 5$
$7 < 8$	$5 < 10$	$3 < 12$

Ejemplo 3

Observa cómo se halla el valor de x en la Figura 4.54.

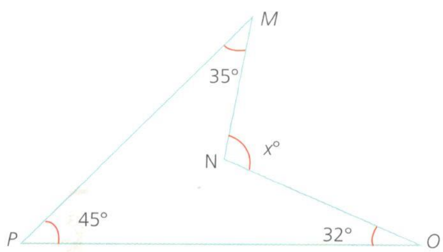


Figura 4.54

Al prolongar el segmento MN se obtienen dos triángulos (Figura 4.55).
Como $\measuredangle y$ es externo al triángulo MQP, entonces $y = 45° + 35° = 80°$.
Además, en el $\triangle NOQ$, $x = 80° + 32° = 112°$.

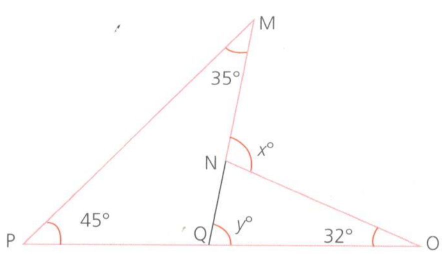


Figura 4.55

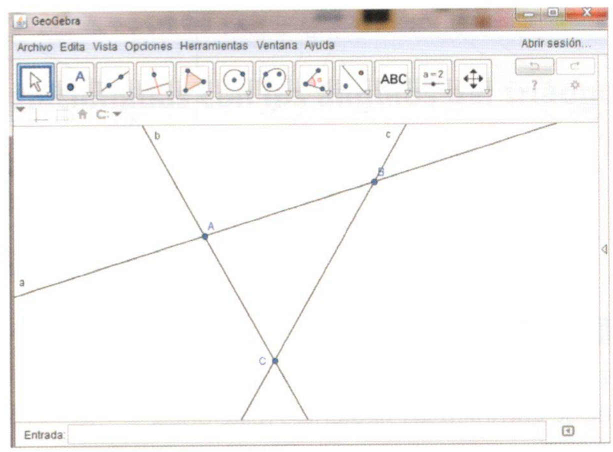
3 Propiedades de los triángulos

MatemaTICS

Construcción de ángulos interiores y exteriores de un triángulo con GeoGebra

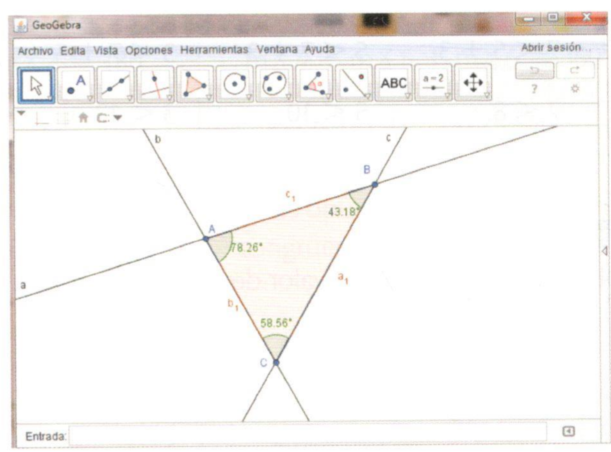
Geogebra es un *software* que permite construir triángulos y observar sus propiedades. A continuación se explica cómo construir un triángulo y obtener la medida de los ángulos internos.

Construcción de un triángulo a partir de tres rectas. Selecciona en el menú la opción y construye tres rectas que se intersequen, generando un triángulo.

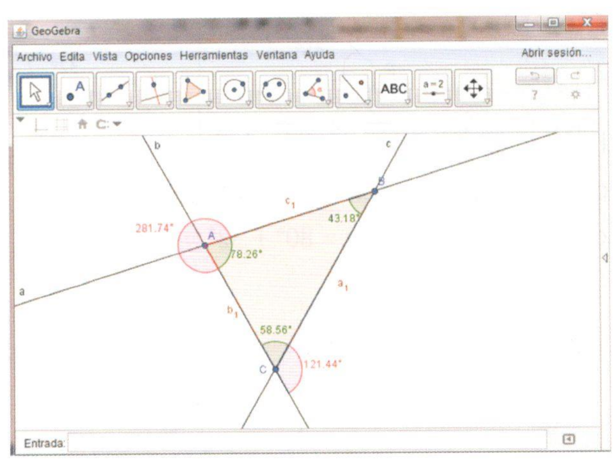


Construcción de los ángulos internos de un triángulo. En la herramienta Ángulo haz clic en *B*, *C* y *A*; luego en *C*, *A* y *B*; y por último, en *A*, *B* y *C*. De esta forma obtendrás los ángulos internos del triángulo.

Si observas la construcción, la suma de los tres ángulos es 180°. De esta manera se cumple la Propiedad 1 de los triángulos.



Construcción de ángulos exteriores. Puedes construir ángulos exteriores con la opción Ángulo y hacer clic en las dos rectas que quieres que aparezca el ángulo. En el ejemplo se muestran algunos.



Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Halla el valor de x en cada caso.

a.

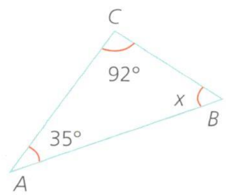


Figura 4.56

b.

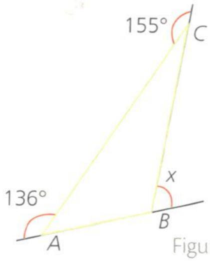


Figura 4.57

c.

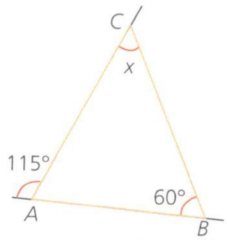


Figura 4.58

d.

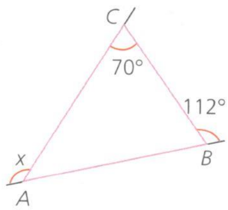


Figura 4.59

e.

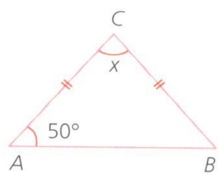


Figura 4.60

f.

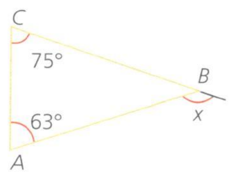


Figura 4.61

2 Determina cuál es el lado más corto en cada uno de los triángulos de la Figura 4.62. Explica tu respuesta.

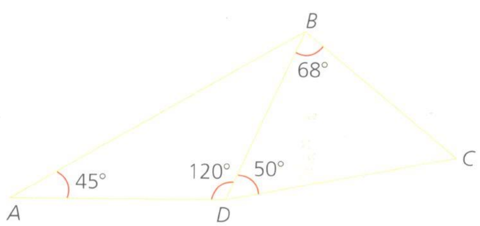


Figura 4.62

3 Halla el valor de x en la Figura 4.63.

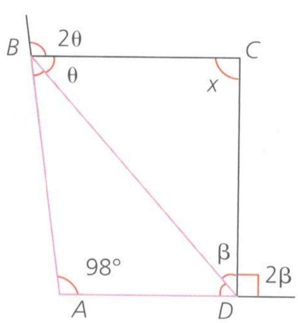


Figura 4.63

Razonamiento

4 Escribe verdadero o falso según corresponda.

a. En el triángulo formado por los segmentos $a = 3$ cm, $b = 4$ cm y $c = 5$ cm, el ángulo con mayor abertura es el opuesto al lado b.

b. Es posible construir un triángulo cuyos lados midan 8 cm, 3 cm y 7 cm.

c. En un triángulo, los ángulos interiores pueden medir 45°, 32° y 50°.

d. Es posible construir un triángulo cuyos lados midan 5 cm, 11 cm y 6 cm.

e. Los ángulos exteriores de un triángulo miden 120°, 100° y 110°, respectivamente.

Resolución de problemas

5 Los ángulos de la base del triángulo ABC que se muestra en la Figura 4.64 son congruentes; el ángulo A mide 58°. ¿Cuánto mide el ángulo BDC, si D es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos B y C?

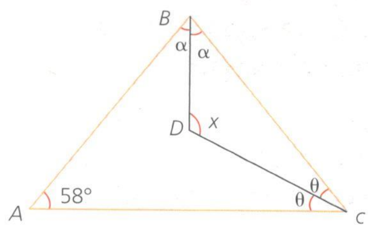


Figura 4.64

Evaluación del aprendizaje

El ángulo B del triangulo ABC de la Figura 4.65 mide 40°. ¿Cuánto mide el ángulo AEC si E es el punto de intersección de las bisectrices del ángulo interior A y el ángulo exterior C?

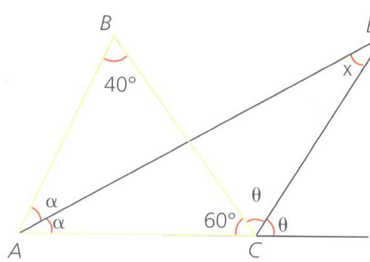


Figura 4.65

4 Teorema de Pitágoras

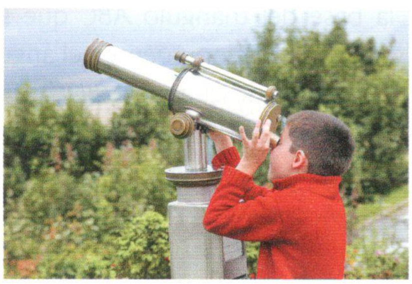
Saberes previos

Construye en tu cuaderno un triángulo cuyos lados midan: 6 cm, 8 cm y 10 cm. Luego, con el transportador calcula, lo más exacto posible, la medida de los ángulos.

Clasifica el triángulo que construiste según la longitud de sus lados y la medida de sus ángulos.

Analiza

Andrés tiene un telescopio con el que observa aves en el bosque. Este solo le permite visualizarlas claramente hasta 50 m.



- Si Andrés se encuentra a 25 m de un árbol y el ave que quiere ver se encuentra en su nido a una altura de 35 m, ¿puede verla en detalle con su telescopio?

Conoce

Para saber si el telescopio de Andrés le deja ver con precisión el ave, es necesario hallar la distancia que lo separa de ella. La Figura 4.66 muestra que, en este caso, se debe hallar la medida de la diagonal de un rectángulo o, lo que es equivalente, la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

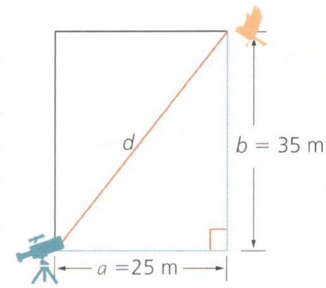


Figura 4.66

Cuando se conocen las medidas de dos lados de un **triángulo rectángulo**, se puede calcular la medida del lado que falta empleando el **teorema de Pitágoras**.

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la medida de la hipotenusa h es equivalente a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos a y b (Figura 4.67). Esto es $h^2 = a^2 + b^2$

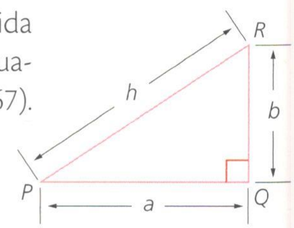


Figura 4.67

Ejemplo 1

Aplica el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de la diagonal d de la Figura 4.66, y determina si es posible que Andrés vea en detalle el ave con su telescopio.

$$d^2 = a^2 + b^2$$

$$d^2 = (25\text{ m})^2 + (35\text{ m})^2$$

$$d^2 = 625\text{ m}^2 + 1\,225\text{ m}^2$$

$$d^2 = 1\,850\text{ m}^2$$

$$d = \sqrt{1850\text{ m}^2} \approx 43{,}01\text{ m}$$

Como 43,01 m $<$ 50 m, el telescopio le permite ver a Andrés el ave con detalle.

Ejemplo 2

Una escalera de 73 dm de longitud está apoyada sobre la pared, como muestra la Figura 4.68. El pie de la escalera dista 55 dm de la pared. Para saber a qué altura sobre el piso se apoya la parte superior de la escalera en la pared, se usa el teorema de Pitágoras.

$(73\text{ dm})^2 = a^2 + (55\text{ dm})^2$, esta ecuación se puede expresar como:

$$a^2 = (73\text{ dm})^2 - (55\text{ dm})^2$$

$$a^2 = 5\,329\text{ dm}^2 - 3\,025\text{ dm}^2$$

$$a = \sqrt{2\,304\text{ dm}^2} \Rightarrow a = 48\text{ dm}$$

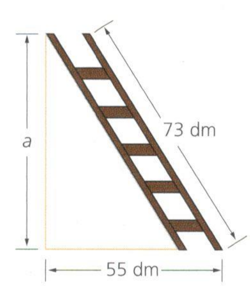


Figura 4.68

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 3

A cierta hora del día, un árbol de 12 m de altura proyecta una sombra de 16 m, como se ve en la Figura 4.69.

Si se supone que el árbol es totalmente vertical, entonces forma con el suelo un ángulo de 90°. Luego, la distancia entre la copa del árbol y su sombra en el suelo sería la hipotenusa del triángulo rectángulo que se forma.

Aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene:

$x^2 = (16\text{ m})^2 + (12\text{ m})^2$

$x^2 = 400\text{ m}^2$

$x = \sqrt{400\text{ m}^2} \Rightarrow x = 20\text{ m}$

Entonces, la distancia desde la sombra de la copa en el suelo hasta la copa del árbol es 20 m.

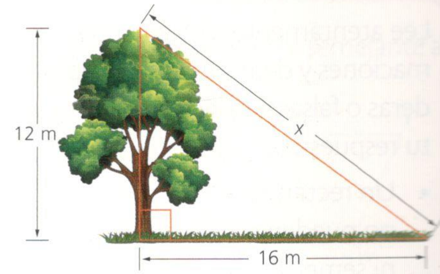


Figura 4.69

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1. Calcula la diagonal de un cuadrado cuyo lado tiene cada una de las siguientes medidas en centímetros.

   a. 4 b. 7 c. 13

2. Halla la medida del lado de un cuadrado cuya diagonal es de 14 cm.

3. Calcula la longitud del lado desconocido.

   a.

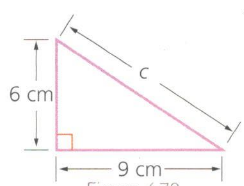


Figura 4.70

   b.

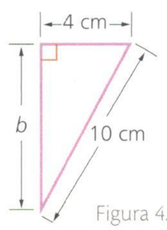


Figura 4.71

4. Calcula el radio de una circunferencia en la que está inscrito un cuadrado cuyo lado mide lo siguiente en decímetros.

   a. 3 b. 9 c. 4

5. En la Figura 4.72 los triángulos $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCD$ y $\triangle ODE$ son todos isósceles y rectángulos.

   Calcula la longitud de la hipotenusa $\overline{OE}$.

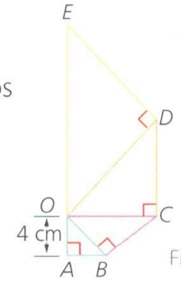


Figura 4.72

Resolución de problemas

6. Halla la medida x en la Figura 4.73.

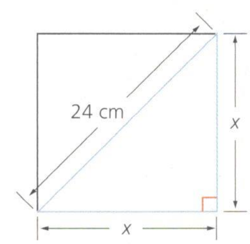


Figura 4.73

7. Una persona está situada a 15 m de la base de un edificio. La distancia que hay de la persona al piso más alto es 25 m. ¿Cuál es la altura del edificio?

Evaluación del aprendizaje

Para una actividad escolar, a Fernanda le encargaron confeccionar doce banderas de Jamaica con las dimensiones que se muestran en la Figura 4.74.

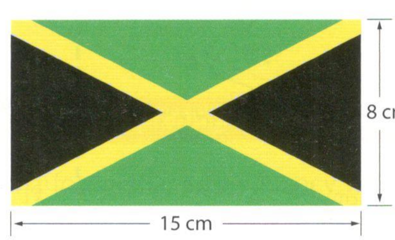


Figura 4.74

a. ¿Cuál es el área de la bandera?

b. ¿Cuál es la longitud de las franjas amarillas?

5 Figuras congruentes y figuras semejantes

Saberes previos

Lee atentamente las siguientes afirmaciones y determina si son verdaderas o falsas. Justifica en cada caso tu respuesta.

- Un rectángulo y un pentágono no pueden ser ni congruentes ni semejantes.
- Dos triángulos obtusángulos pueden ser semejantes pero no congruentes.
- Un triángulo isósceles puede ser congruente con un triángulo equilátero.

Analiza

Calca la Figura 4.75 y compárala con la Figura 4.76.

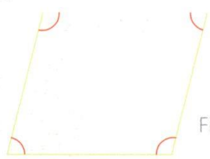


Figura 4.75

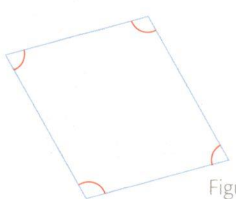


Figura 4.76

- ¿Qué encuentras cuando comparas su forma y tamaño?

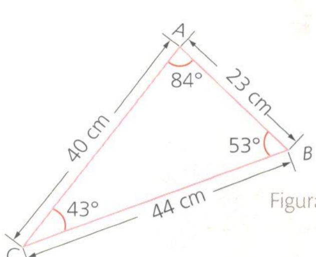


Figura 4.78

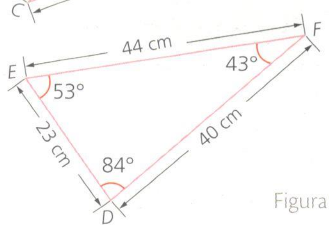


Figura 4.79

Conoce

5.1 Figuras congruentes

Al calcar la Figura 4.75 y superponerla a la Figura 4.76, se observa que coinciden exactamente, excepto en su posición (Figura 4.77).

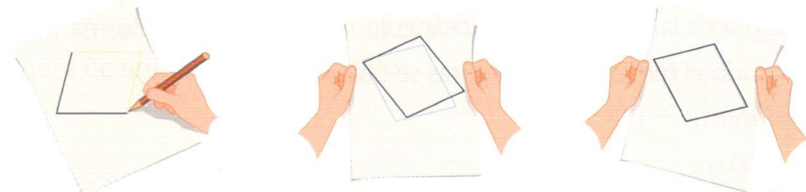


Figura 4.77

Dos **figuras** son **congruentes** si tanto los ángulos correspondientes como los lados correspondientes son congruentes. La relación de congruencia se simboliza con $\cong$.

Ejemplo 1

Los triángulos de las figuras 4.78 y 4.79 son congruentes, ya que:

1. $AB = 23$ cm $= DE$; $BC = 44$ cm $= EF$; $AC = 40$ cm $= DF$. Por lo tanto, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.
2. $m\measuredangle A = 84° = m\measuredangle D$; $m\measuredangle B = 53° = m\measuredangle E$; $m\measuredangle C = 43° = m\measuredangle F$. Entonces, $\measuredangle A \cong \measuredangle D$, $\measuredangle B \cong \measuredangle E$ y $\measuredangle C \cong \measuredangle F$.

5.2 Figuras semejantes

Dos **figuras** son **semejantes** si los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales. El cociente entre los lados correspondientes se llama **razón de semejanza**. Se designa por la letra ***k***.

Ejemplo 2

Observa por qué los cuadriláteros de las figuras 4.80 y 4.81 son semejantes.

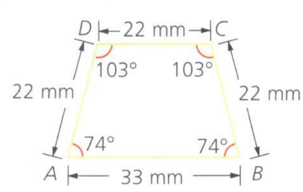


Figura 4.80

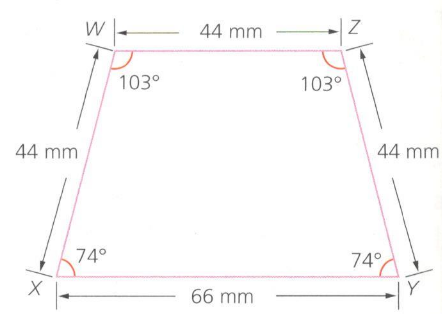


Figura 4.81

Al analizar la información representada en las figuras se concluye que los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales. La razón de semejanza es $\frac{1}{2}$.

$$\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{CD}{ZW} = \frac{DA}{WX} = \frac{1}{2}$$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Construye en tu cuaderno cada polígono y traza otro congruente a ese en diferente posición. Describe la manera en que realizas las construcciones.

a.

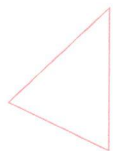


Figura 4.82

b.

Figura 4.83

c.

Figura 4.84

d.

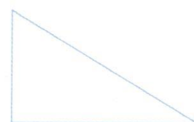


Figura 4.85

2 Identifica cuál de las figuras de la parte inferior no tiene una pieza congruente en el rompecabezas.

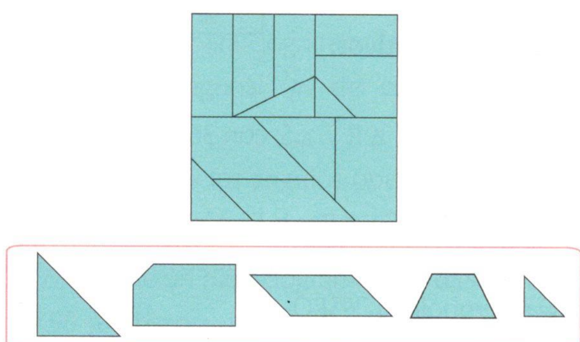


Figura 4.86

3 Halla la medida de los lados de un triángulo semejante a otro cuyos lados miden 5 cm, 9 cm y 12 cm, con razón de semejanza igual a 3.

4 Lee y halla lo que se indica en cada caso.

Un rectángulo de 8 cm de altura y 20 cm de base es semejante a otro rectángulo de 6 cm de altura.

a. La razón de semejanza.

b. La base del otro rectángulo.

c. Las áreas de ambos rectángulos.

Razonamiento

5 Construye cuadrados de diferentes medidas e indica si son semejantes. Justifica tu respuesta.

6 Determina si el paralelogramo *ABCD* es semejante al paralelogramo *XYWZ*.

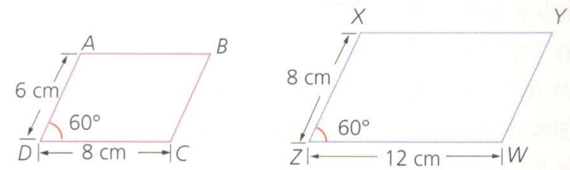


Figura 4.87

7 Indica si el cuadrilátero de la Figura 4.88 es congruente con el cuadrilátero de la Figura 4.89.

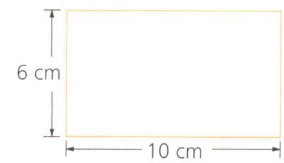


Figura 4.88

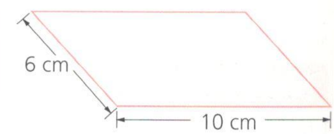


Figura 4.89

Resolución de problemas

8 Halla el valor de *x* en cada caso, si se sabe que son semejantes los triángulos de cada par.

a.

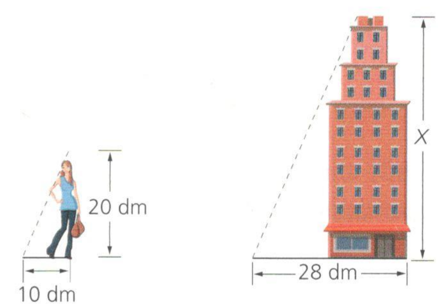


Figura 4.90

b.

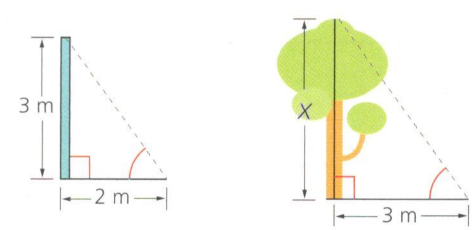


Figura 4.91

Evaluación del aprendizaje

En una fotografía, Luis y Nancy miden 2,7 cm y 2,5 cm, respectivamente. En la realidad, Nancy tiene una altura de 162,5 cm.

a. ¿A qué escala está hecha la foto?

b. ¿Qué estatura tiene Luis en realidad?

6 Cuadriláteros

Saberes previos

Reúnete con un compañero. Escriban en sus cuadernos las diferencias y similitudes que encuentran en un cuadrado, un rectángulo y un rombo; ten en cuenta características como medida de los lados, de los ángulos opuestos y adyacentes, de las diagonales, lados paralelos, entre otras. Compartan sus respuestas con el resto del grupo.

Analiza

Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados.

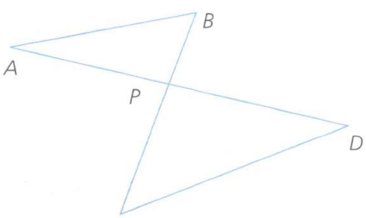


Figura 4.92

- ¿Se puede afirmar que *ABCD* es un cuadrilátero?

Conoce

Un polígono está formado por segmentos que no se intersecan más que en los extremos y, si dos de ellos tienen un extremo común, no son colineales.

La Figura 4.92 está formada por cuatro segmentos, donde $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ se intersecan en *P*, que no corresponde a los extremos de estos segmentos. Por lo tanto, la figura *ABCD* no es un cuadrilátero.

Un **cuadrilátero** es un polígono de cuatro lados. En este se identifican pares de **lados opuestos** (que no tienen puntos en común) y pares de **lados consecutivos** (que tienen un punto en común, el vértice).

Ejemplo 1

En el cuadrilátero de la Figura 4.93 se identifican los siguientes elementos:

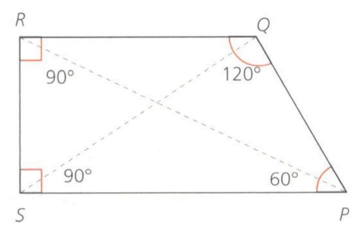


Figura 4.93

- Los **vértices**: *P*, *Q*, *R* y *S*
- Los **lados**: $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$ y $\overline{SP}$
- Las **diagonales**: $\overline{PR}$ y $\overline{QS}$
- Los **lados opuestos:** $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$, $\overline{QR}$ y $\overline{PS}$
- Algunos pares de **lados consecutivos:** $\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$, $\overline{RS}$ y $\overline{SP}$
- Los **ángulos interiores**: $\measuredangle P$, $\measuredangle Q$, $\measuredangle R$ y $\measuredangle S$; con 360° como la suma de sus medidas.
- Los **ángulos opuestos** ($\measuredangle S$ y $\measuredangle Q$, $\measuredangle R$ y $\measuredangle P$) y los **ángulos consecutivos** ($\measuredangle S$ y $\measuredangle P$ son un ejemplo de algunos de los que se muestran en la figura.).

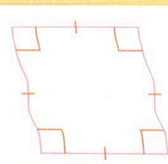
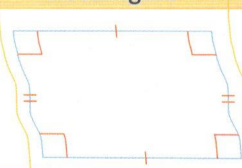
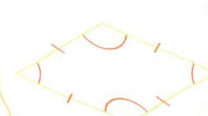
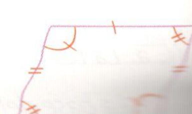
El cuadrilátero *PSRQ* se simboliza □*PSRQ*.

Los cuadriláteros se clasifican en **paralelogramos**, **trapecios** y **trapezoides**.

6.1 Paralelogramos

Un **paralelogramo** es un cuadrilátero cuyos pares de lados opuestos son paralelos.

Los cuadriláteros de la Tabla 4.7 son paralelogramos.

Cuadrado	Rectángulo	Rombo	Romboide
			
Todos sus lados son congruentes y todos sus ángulos son rectos.	Todos sus ángulos son rectos.	Todos sus lados son congruentes.	Los ángulos y los lados opuestos son respectivamente congruentes.

A continuación se presenta el paso a paso para construir un paralelogramo con regla y compás.

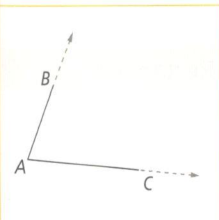
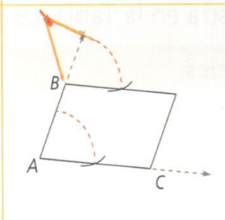
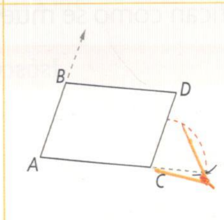
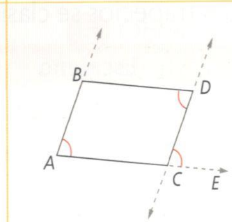
1. Traza un ángulo A y, señala sobre los lados del ángulo los puntos B y C.	2. Se construye un segmento paralelo a AC que pase por B.	3. Se construye un segmento paralelo a AB que pase por C. Llama D al punto de corte de los segmentos.	4. Con el transportador comprueba que los ángulos BDC y BAC son congruentes. Realiza el mismo procedimiento y verifica que los ángulos ABD y ACD también son congruentes.
			

Tabla 4.8

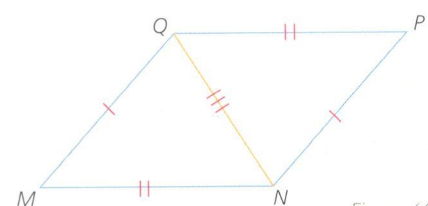


Figura 4.94

6.2 Propiedades de los paralelogramos

1. La diagonal de un paralelogramo define dos triángulos congruentes. En la Figura 4.94, la diagonal $\overline{QN}$ del paralelogramo *NMQP* determina que $\triangle MQN \cong \triangle PQN$.

2. Los lados opuestos y los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.

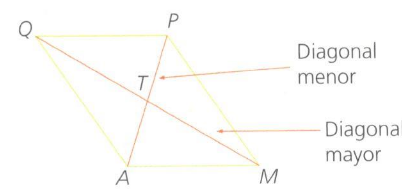


Figura 4.95

3. Las diagonales de un paralelogramo se intersecan en su punto medio. En la Figura 4.95 se observa que las diagonales $\overline{MQ}$ y $\overline{PA}$ se intersecan en *T*. De acuerdo con esta propiedad, se tiene que $\overline{AT} \cong \overline{PT}$ y $\overline{MT} \cong \overline{QT}$.

4. Pares de ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios. Es decir, la suma de sus medidas es igual a 180°. En la Figura 4.96:

$$m\measuredangle D + m\measuredangle E = 180° \qquad m\measuredangle F + m\measuredangle G = 180°$$
$$m\measuredangle E + m\measuredangle F = 180° \qquad m\measuredangle G + m\measuredangle D = 180°$$

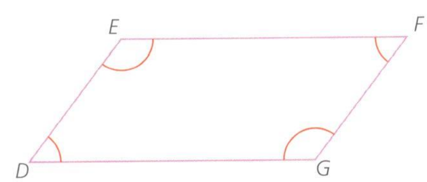


Figura 4.96

Ejemplo 2

La Figura 4.97 muestra el paralelogramo *PQSR* con $m\measuredangle P = 120°$. Como el ángulo *Q* es suplementario con el ángulo *P*, entonces:

$$m\measuredangle Q = 180° - 120° = 60°$$

El ángulo *S* es el suplemento del ángulo *Q*; por tanto:

$$m\measuredangle S = 180° - 60° = 120°$$

Como los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes, se tiene que:

$$m\measuredangle R = m\measuredangle Q = 60°$$

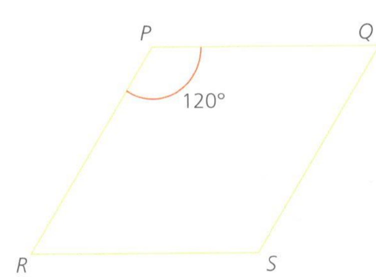


Figura 4.97

6.3 Trapecios

El **trapecio** es un cuadrilátero que tiene exactamente dos lados paralelos denominados **bases**. A la distancia entre las bases se le conoce como **altura**.

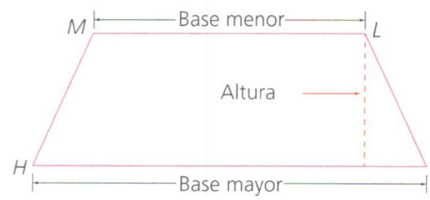


Figura 4.98

Los trapecios se clasifican como se muestra en la Tabla 4.9.

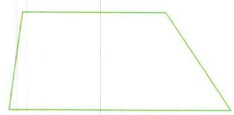
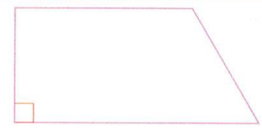
Escaleno	Isósceles	Rectángulo
		
Sus cuatro lados son de diferente medida.	Sus lados no paralelos son congruentes.	Dos de sus ángulos son rectos.

Tabla 4.9

6.4 Trapezoides

Los **trapezoides** son cuadriláteros que no tienen pares de lados paralelos.

Los trapezoides se clasifican como se muestra en la Tabla 4.10.

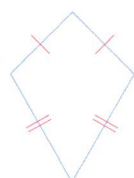
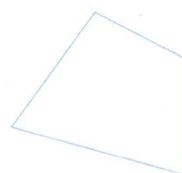
Trapezoide simétrico	Trapezoide asimétrico
	
Tiene dos pares de lados congruentes.	Sus cuatro lados tienen distinta medida.

Tabla 4.10

Ejemplo 3

En la Figura 4.99 se observan dos trapecios isósceles con sus diagonales.

Las diagonales de los trapecios tienen la misma medida; por esto se puede establecer que: "En todo trapecio isósceles las diagonales son congruentes".

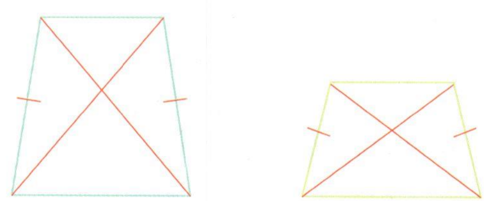


Figura 4.99

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Clasifica estas figuras según el tipo de cuadrilátero al que corresponda cada una.

a.

Figura 4.100

b.

Figura 4.101

c.

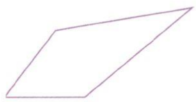


Figura 4.102

d.

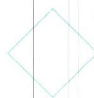


Figura 4.103

e.

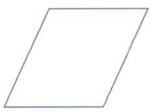


Figura 4.104

f.

Figura 4.105

g.

Figura 4.106

h.

Figura 4.107

Razonamiento

2 Analiza y responde.

a. ¿Cuáles de los paralelogramos tienen diagonales congruentes?

b. ¿Cuántas diagonales se pueden trazar en un paralelogramo?

c. ¿Cuáles de los paralelogramos tienen diagonales perpendiculares?

d. ¿Todo cuadrado es un rectángulo?

e. ¿Algún rombo es cuadrado?

f. ¿Todo rombo es cuadrado?

Ejercitación

3 Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Dibuja las figuras que creas pertinentes.

a. En todo paralelogramo siempre se cumple que los ángulos consecutivos son suplementarios.

b. Al unir los puntos medios de los lados de un rombo, se obtiene un cuadrado.

c. Si en un cuadrilátero las diagonales son perpendiculares, el cuadrilátero es un cuadrado.

d. Todos los ángulos de un cuadrado miden 90°.

e. Las diagonales de un rectángulo son perpendiculares entre sí.

Modelación

4 Dibuja cuadriláteros que cumplan las condiciones.

a. Las diagonales son congruentes y perpendiculares.

b. Todos sus ángulos miden 90° y sus lados miden 3 cm.

c. Una de las diagonales determina dos triángulos equiláteros.

d. Tres lados son congruentes.

Comunicación

5 Observa la Figura 4.108, que está formada por el cuadrilátero *DFEB* y el triángulo *ADB*. ¿Cuánto miden el ángulo *E* y el ángulo *D*?

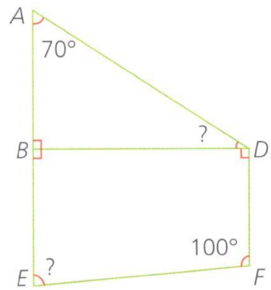


Figura 4.108

Resolución de problemas

6 Halla la medida del ángulo *x*.

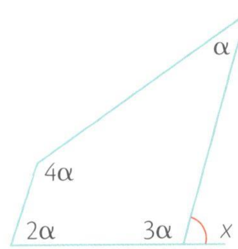


Figura 4.109

Evaluación del aprendizaje

✓ Observa en la Figura 4.110 el plano de una casa y escribe el nombre del cuadrilátero que representa a cada lugar.

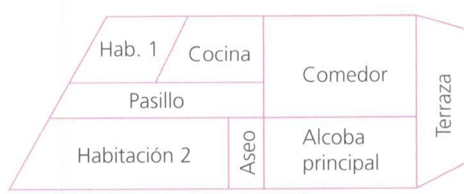


Figura 4.110

7 Movimientos en el plano

Saberes previos

Indica en cada caso, el movimiento que se realiza en cada situación.

- Un rastrillo cuando ara la tierra.
- Una mecedora cuando se balancea.
- La perilla de estufa cuando se quiere prender un fogón.
- Una puerta cuando se cierra.
- Una silla cuando se desplaza para alejarla de la mesa.

Analiza

Juana observó en la decoración de una alfombra lo siguiente:

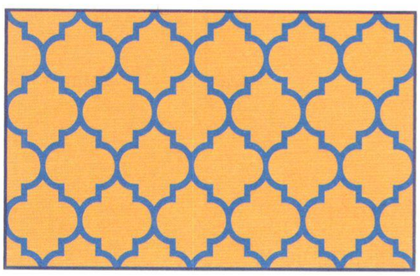


Figura 4.111

- ¿Cómo crees que se logró ese diseño en la alfombra?

Conoce

El motivo decorativo (Figura 4.111) que observó Juana en la alfombra se obtuvo trasladando hacia la derecha la figura de borde azul, sin dejar huecos y sin solaparlos; esta es una técnica utilizada para recubrir el plano.

Los **movimientos en el plano** son transformaciones de las figuras geométricas que conservan su forma y su tamaño. La **traslación**, la **rotación** y la **reflexión** son movimientos en el plano.

7.1 Traslación

La **traslación** es el movimiento de una figura sobre el plano a lo largo de una línea recta, que sigue la **dirección** y el **sentido** indicados por un vector. Este movimiento no cambia la forma ni el tamaño de la figura.

Ejemplo 1

La Figura 4.112 muestra que el polígono *ABCD* se trasladó siete unidades hacia la derecha.

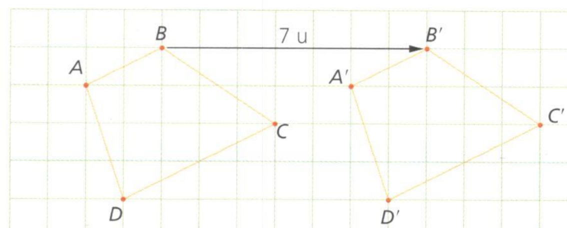


Figura 4.112

Ejemplo 2

Para trasladar el cuadrado *ABCD* de la Figura 4.113, se debe tener en cuenta la longitud, la dirección y el sentido de la traslación indicados por el vector v ($\vec{v}$).

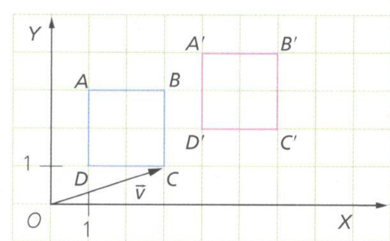


Figura 4.113

El vector v indica que el movimiento de cada punto debe ser de tres unidades a la derecha y una unidad hacia arriba. De esa manera se obtienen los vértices del polígono trasladado $A'B'C'D'$.

Otra forma de realizar la traslación del polígono *ABCD* es trazando segmentos de la misma longitud paralelos al vector v desde cada uno de los vértices del cuadrado, determinando así los puntos $A'B'C'D'$ (Figura 4.114).

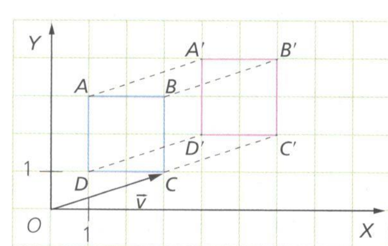


Figura 4.114

El cuadrado $A'B'C'D'$ obtenido es la imagen del cuadrado *ABCD* mediante una traslación.

7.2 Rotación

La **rotación** es el movimiento de una figura sobre el plano alrededor de un punto fijo llamado **centro de rotación** y con un **ángulo de giro** en sentido positivo (movimiento contrario al de las manecillas del reloj) o negativo (en el mismo sentido al de las manecillas del reloj).

Ejemplo 3

Para rotar el $\triangle ABC$, 90° en el sentido de las manecillas del reloj y alrededor del punto (0, 0), se realiza el siguiente procedimiento:

1. Se trazan segmentos que unan el centro de rotación (0, 0) con cada uno de los vértices del polígono; luego, con el compás se trazan arcos que tengan centro en (0, 0) y pasen por cada uno de los vértices del triángulo (Figura 4.115).

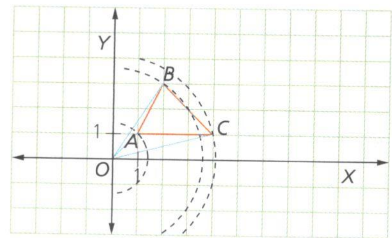


Figura 4.115

2. Se mide la amplitud del ángulo en el sentido indicado con respecto a los segmentos trazados en el paso 1 y se trazan nuevos segmentos que corten los arcos en A', B' y C'.

   En este caso, $OA \cong OA'$, $OB \cong OB'$ y $OC \cong OC'$. Finalmente, se traza el $\triangle A'B'C'$, que es la imagen del $\triangle ABC$ mediante la rotación dada.

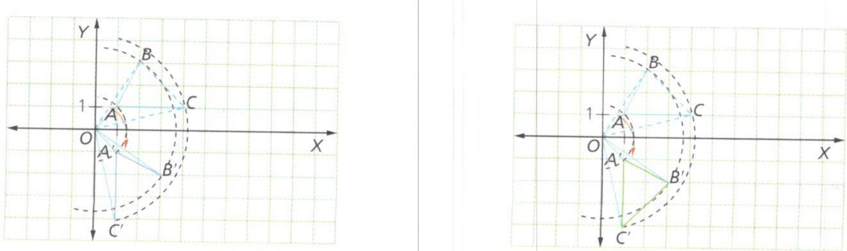


Figura 4.116

7.3 Reflexión

La **reflexión** de una figura respecto a un eje es una transformación geométrica que a cada punto P de la figura le hace corresponder un punto P' al otro lado del **eje de reflexión** y a la misma distancia de este.

Ejemplo 4

El triángulo ABC de la Figura 5.117 se refleja con respecto al eje X así:

1. Se traza una recta perpendicular al eje de reflexión que pase por el vértice A.
2. Con el compás, se mide la distancia del vértice A al eje de reflexión y, sobre la perpendicular, se ubica A' al otro lado del eje.
3. Se repite el proceso con cada vértice del polígono para obtener B' y C'.

   Se trazan $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ y $\overline{A'C'}$; de esta forma se obtiene el triángulo $A'B'C'$, que es la imagen del triángulo ABC mediante la reflexión.

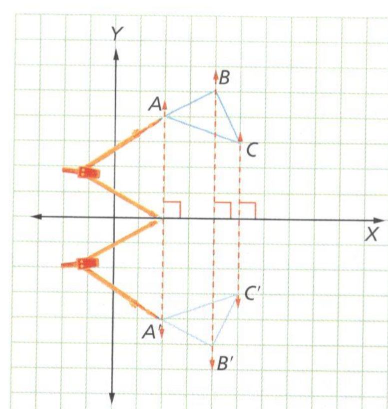


Figura 4.117

7 Movimientos en el plano

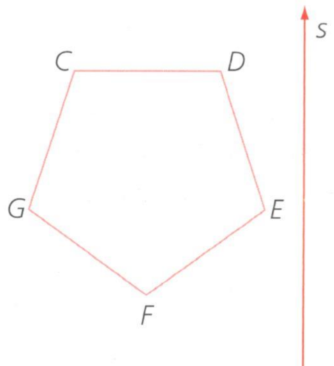


Figura 4.118

Ejemplo 5

Refleja el polígono *CDEFG* de la Figura 4.118 con respecto a la recta *s*.

Al seguir los pasos para reflejar una figura en el plano, se obtiene el polígono *C′D′E′F′G′*, tal como en la Figura 4.119.

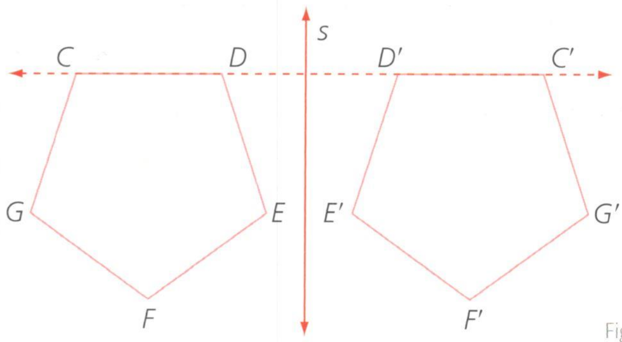
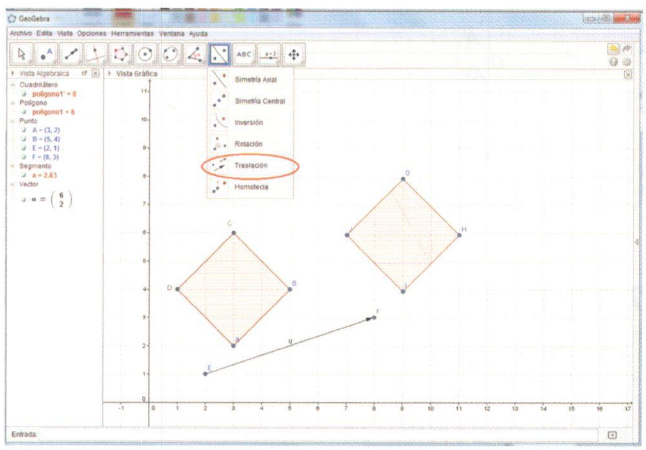


Figura 4.119

MatemaTICS

Traslada y rota polígonos regulares en GeoGebra

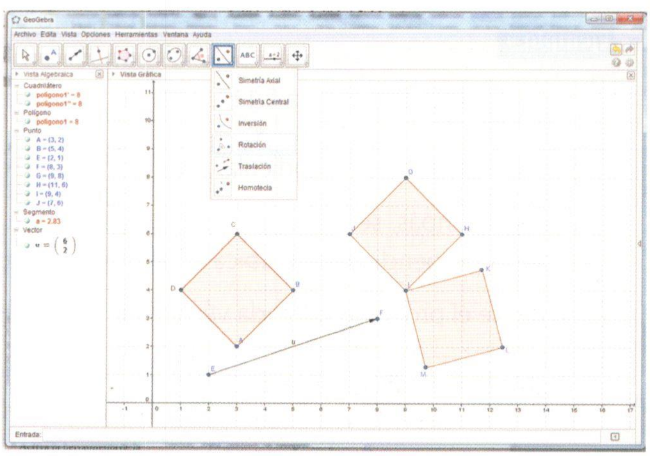
- Para trasladar un cuadrado según un vector y luego rotarlo 120° en sentido negativo alrededor de uno de sus vértices, debes seguir estos pasos.



Haz clic en el icono y selecciona la opción *Polígono regular*. Luego, haz clic en los puntos de coordenadas (3, 2) y (5, 4). En el cuadro de texto que aparece escribe "4" y presiona *OK*. Aparecerá un cuadrado.

Elige el botón , que se observa al hacer clic en , y traza un vector marcando con el cursor su origen y su extremo.

Pulsa el botón *Traslación*, da clic sobre el cuadrado y luego sobre el vector. En la pantalla de GeoGebra se observa el cuadrado trasladado según el vector dado, en este caso el vector *u*. En la pantalla aparecerá el cuadrado obtenido mediante traslación.



Selecciona el botón *Rotación*, luego el cuadrado trasladado y el punto alrededor, del cual se quiere rotar el cuadrado, en este caso el vértice *I*. En el cuadro de texto que aparece, escribe 120° y selecciona la opción *Sentido horario*.

- Traslada un pentágono regular según un vector dado y luego rótalo según las condiciones que elijas.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Observa la Figura 4.120 y determina cuántos metros se trasladó el automóvil y en qué dirección.

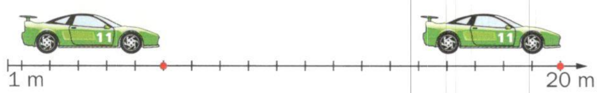


Figura 4.120

2 Traslada el cuadro de la Figura 4.121 cuatro unidades hacia abajo y cuatro unidades hacia la derecha.

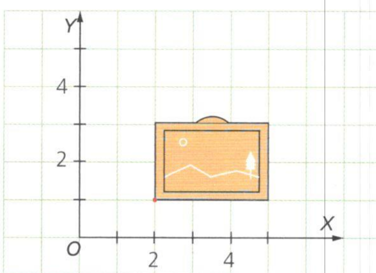


Figura 4.121

3 Amplía la cuadrícula en tu cuaderno. Luego, dibuja la reflexión del polígono de la Figura 4.122 con respecto al segmento *AB*.

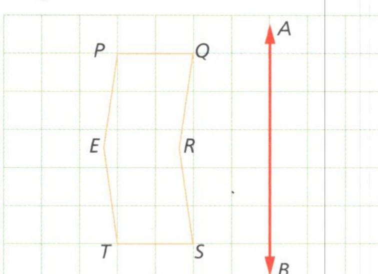


Figura 4.122

4 Realiza sucesivamente los movimientos que se indican en cada caso.

a. Traslada dos unidades hacia la derecha y señala el punto P´. Rota 90° en sentido positivo con centro en *P*′ y refleja con respecto al eje *X*.

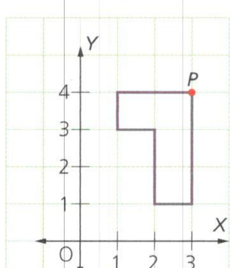


Figura 4.123

b. Refleja con respecto al eje *Y* y señala el punto M¨; traslada cuatro unidades hacia abajo y rota 180° en sentido negativo con centro en *M*′.

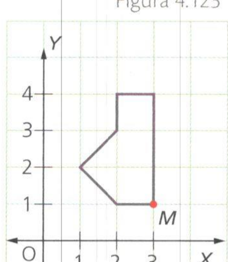


Figura 4.124

Comunicación

5 Escribe falso (F) o verdadero (V) en cada caso, según corresponda.

a. La figura que se obtiene al aplicar una rotación no es congruente con la inicial. ( )

b. Una traslación es un movimiento que se puede realizar en cualquier dirección. ( )

c. Al girar cualquier figura, esta mantiene su forma y su tamaño. ( )

d. En una reflexión, cada punto y su imagen están a la misma distancia del eje de reflexión. ( )

e. La rotación es el movimiento de una figura sobre el plano alrededor de una recta fija llamada eje de rotación. ( )

Resolución de problemas

6 Lee, analiza y responde.

¿Es cierto que si a una figura se le aplica una traslación y luego una rotación, la imagen obtenida es igual a la imagen que se obtiene al aplicar primero la misma rotación y luego la misma traslación?

Evaluación del aprendizaje

Al triángulo *ABC* de vértices $A(2, 2)$, $B(2, -4)$ y $C(6, -1)$ se le aplica una rotación de 90° en sentido positivo, con centro en el origen, y luego una traslación de cinco unidades a la derecha y dos unidades hacia abajo. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del triángulo?

Estilos de vida saludable

Un atleta recorre un polígono de vértices $A(8, 1)$, $B(6, 3)$ y $C(11, 7)$, mientras que otro recorre un polígono de vértices $M(2, 6)$, $N(2, 8)$ y $O(11, 10)$. Construye los polígonos sobre un plano cartesiano.

- ¿Qué atleta hace el mayor recorrido? ¿Crees que los deportistas llevan un estilo de vida saludable?

8 Homotecias

Saberes previos

Analiza y responde.

¿Qué condiciones deben cumplir dos figuras para que sean semejantes?

¿Por qué se puede afirmar que dos triángulos rectángulos cuyas medidas son 3 cm, 4 cm y 5 cm para el primero y 6 cm, 8 cm y 10 cm para el segundo, son semejantes?

Analiza

Natalia escribió en una hoja la letra inicial de su nombre, como se muestra en la Figura 4.125.

Figura 4.125

- Si Natalia amplió su dibujo en la fotocopiadora al 120%, ¿qué crees que observó al comparar las dos hojas?

Conoce

Al comparar la fotocopia con el original, Natalia observó que obtuvo una letra N semejante a la que había dibujado en el papel, es decir, con la misma forma pero con diferente tamaño (en este caso más grande, ya que amplió su dibujo al 120%).

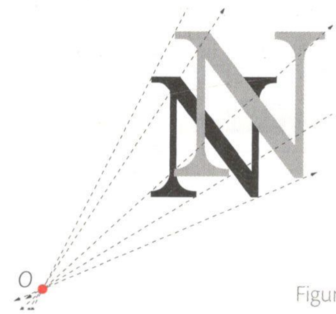


Figura 4.126

Esta transformación recibe el nombre de **homotecia**.

Para encontrar la imagen de una figura aplicando esta transformación, se trazan rayos desde un punto O, a cada uno de los vértices de la figura y se hallan, sobre los rayos las imágenes de cada punto. (Figura 4.126).

Una **homotecia** es una transformación que se realiza sobre una figura en el plano con el fin de obtener figuras semejantes a la dada. Para efectuar una homotecia, se debe elegir un centro denominado **foco** y un **factor de proporcionalidad** o **razón de la homotecia**.

Ejemplo 1

Para obtener un polígono semejante al triángulo *ABC* de la Figura 4.127 mediante una homotecia con centro en el punto *O* y factor de proporcionalidad 2, se realiza el siguiente procedimiento:

1. Se trazan semirrectas desde el foco de la homotecia (*O*) a cada uno de los vértices del triángulo.

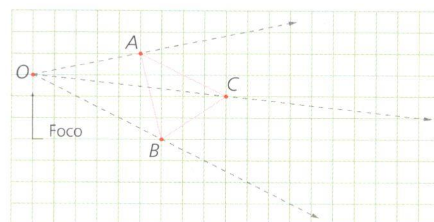


Figura 4.127

2. Se miden las distancias (*d*) del foco a cada uno de los vértices del polígono.

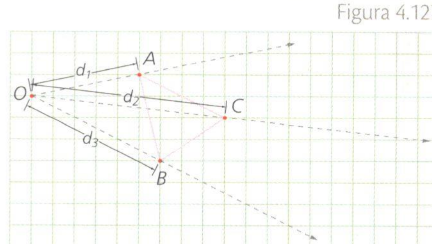


Figura 4.128

3. Se multiplica cada distancia por el factor de proporcionalidad 2. Finalmente, se marcan sobre las semirrectas las distancias obtenidas ($2 \cdot d$) y se traza el polígono imagen.

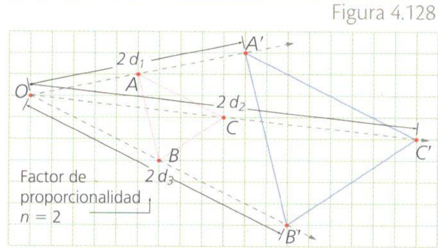


Figura 4.129

Los triángulos $A'B'C'$ y ABC de la Figura 4.129 son semejantes. Como el factor de proporcionalidad es 2, entonces los lados del triángulo $A'B'C'$ miden el doble que los lados del triángulo ABC.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 2

Observa cómo se aplica al triángulo de vértices $A(2, 3)$, $B(2, 1)$ y $C(5, 1)$, una homotecia con centro en el punto $(0, 0)$ y factor de proporcionalidad 2.

Como la razón de homotecia es 2 y el foco está en $(0, 0)$, basta con multiplicar las coordenadas de cada vértice del $\triangle ABC$ por 2 para obtener las coordenadas de los vértices del triángulo semejante.

$$A' = (2 \cdot 2, 2 \cdot 3) = (4, 6)$$
$$B' = (2 \cdot 2, 2 \cdot 1) = (4, 2)$$
$$C' = (2 \cdot 5, 2 \cdot 1) = (10, 2)$$

En la Figura 4.130 se observa el triángulo ABC y su imagen $\triangle A'B'C'$ mediante la homotecia.

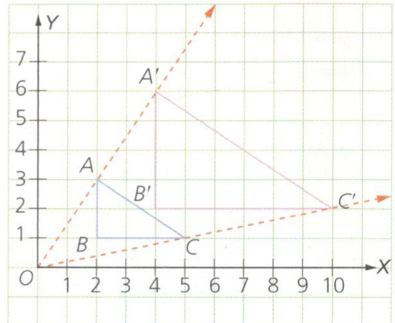


Figura 4.130

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Aplica la homotecia con foco en O y factor de proporcionalidad 2 al triángulo ABC de la Figura 4.131.

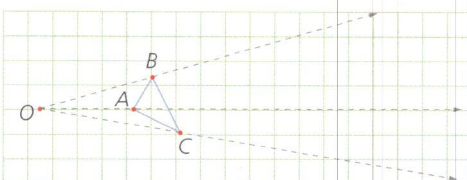


Figura 4.131

$n = 2$

$OA = 2$ cm → $OA' =$ ☐

$OB = 2{,}5$ cm → $OB' =$ ☐

$OC = 3$ cm → $OC' =$ ☐

2 Aplica a cada polígono las homotecias indicadas, con foco en el punto dado.

a.

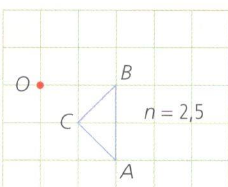


Figura 4.132

b.

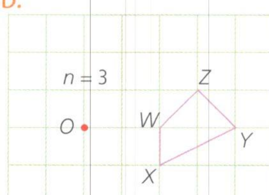


Figura 4.133

c.

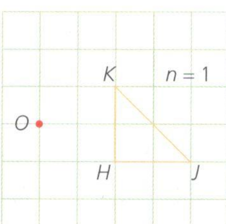


Figura 4.134

d.

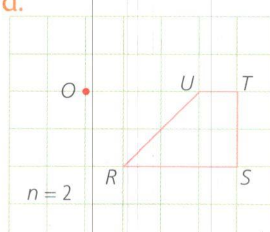


Figura 4.135

3 Aplica una homotecia de centro $(0, 0)$ y factor de proporcionalidad $\frac{1}{2}$ al polígono cuyos vértices son $(2, 2)$, $(2, 6)$, $(6, 2)$ y $(6, 6)$.

Resolución de problemas

4 Un publicista elabora una valla publicitaria en la que aparece una etiqueta en forma de cometa cuyas dimensiones son 12 cm, 12 cm, 15 cm y 15 cm. Si decide presentar en la valla la etiqueta normal, aplicando homotecias en factores de proporcionalidad 0,25; 1,5 y 3, respectivamente, ¿cuál sería la presentación de la etiqueta y sus copias en la valla publicitaria?

Evaluación del aprendizaje

✓ Dibuja en tu cuaderno la figura semejante al hexágono $ABCDEF$ de la Figura 4.136, con factor de proporcionalidad $\frac{3}{2}$ y centro de homotecia el punto O.

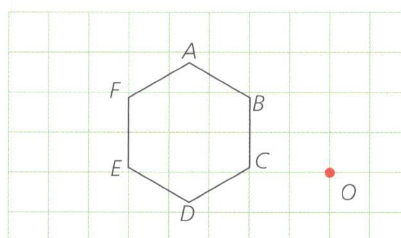
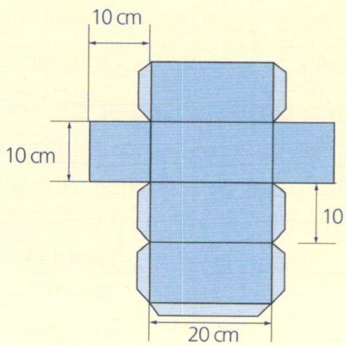


Figura 4.136

9 Poliedros

Saberes previos

Dibuja en tu cuaderno el sólido que se obtiene del siguiente modelo.



Analiza

En las narraciones de partidos de fútbol, usualmente los comentaristas se refieren al balón como "al esférico"; sin embargo, la realidad es que este balón no es totalmente esférico sino que está limitado por polígonos.

- ¿Qué tipo de polígonos forman un balón de fútbol?

Elementos de un poliedro

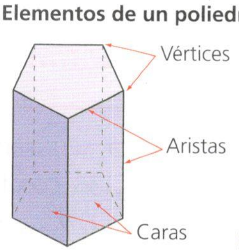
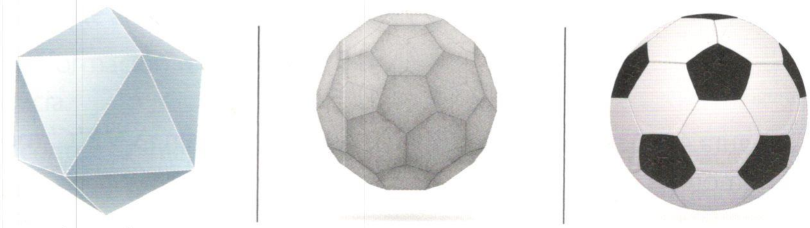


Figura 4.138

Conoce

El balón de fútbol es un cuerpo geométrico de 32 caras poligonales, doce pentágonos regulares y 20 hexágonos regulares, que se curvan cuando el balón está bien inflado. Las 32 caras de este cuerpo se obtienen al truncar un cuerpo geométrico llamado icosaedro, el cual está formado por 20 triángulos equiláteros (Figura 4.137).



Icosaedro — Icosaedro truncado — Balón de fútbol

Figura 4.137

Un **poliedro** es un cuerpo geométrico limitado por cuatro o más polígonos.

En la Figura 4.138 se identifican los elementos de un poliedro.

- Las **caras**, que son los polígonos que lo limitan.
- Las **aristas**, que son los lados de las caras.
- Los **vértices**, que son los puntos donde concurren tres o más caras.
- Los **ángulos diedros**, que son los ángulos que se forman internamente entre doscaras del poliedro.

Los poliedros se clasifican según la medida de sus ángulos en **convexos**, si todas sus caras son polígonos convexos, y en **cóncavos**, si alguna de sus caras es un polígono cóncavo.

Ejemplo 1

En las figuras 4.139 y 4.140 se observan dos poliedros cóncavos, y en las figuras 4.141 y 4.142 dos poliedros convexos.

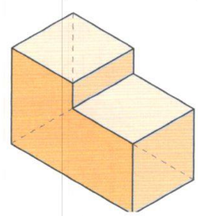


Figura 4.139

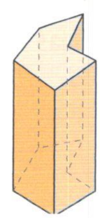


Figura 4.140

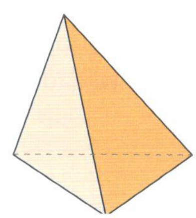


Figura 4.141

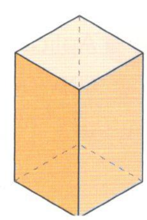


Figura 4.142

En los poliedros convexos existe una relación entre el número c de caras, el número v de vértices y el número a de aristas:

$$c + v = a + 2$$

Esta igualdad se llama **relación de Euler**.

Ejemplo 2

Comprueba que los poliedros de las figuras 4.143 y 4.144 cumplen la relación de Euler.

Poliedro A: $7 + 7 = 12 + 2$

Poliedro B: $9 + 14 = 21 + 2$

A

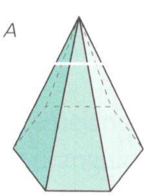


Figura 4.143

B

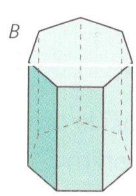


Figura 4.144

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Identifica en tu salón de clase tres objetos que tengan forma de poliedro convexo y comprueba que se cumple la relación de Euler en cada uno de ellos.

2 Indica cuáles de los cuerpos geométricos de las figuras 4.145 a 4.150 son poliedros. En caso de serlo, clasifícalos en cóncavos y convexos.

a.

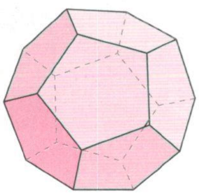


Figura 4.145

b.

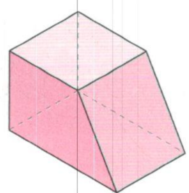


Figura 4.146

c.

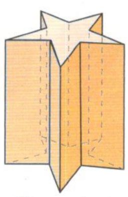


Figura 4.147

d.

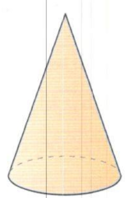


Figura 4.148

e.

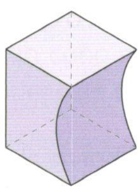


Figura 4.149

f.

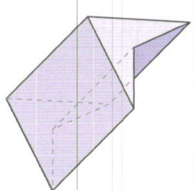


Figura 4.150

3 Completa la Tabla 4.11 con los elementos de poliedros convexos. Utiliza la relación de Euler.

Número de caras	Número de vértices	Número de aristas
6		12
16	10	
5		9
	14	24

Tabla 4.11

Razonamiento

4 Comprueba la relación de Euler para cada poliedro de las figuras 4.151 a 4.153.

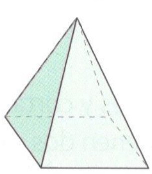


Figura 4.151

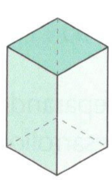


Figura 4.152

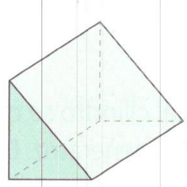


Figura 4.153

Resolución de problemas

5 Carolina recortó una de las esquinas de un cubo para construir un adorno navideño (Figura 4.154).

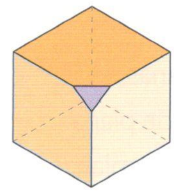


Figura 4.154

Luego, recortó de la misma manera, todas las esquinas del cubo.

a. ¿Cómo estará formado el poliedro obtenido?

b. ¿En el nuevo poliedro se cumple la relación de Euler? Comprueba.

Evaluación del aprendizaje

✓ Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).

a. Un paralelepípedo es un prisma. ( )

b. Las caras laterales de un prisma pueden ser paralelas. ( )

c. En un poliedro, el menor número de aristas que concurren en un vértice es tres. ( )

d. Para cualquier poliedro el número de caras, vértices y aristas siempre es par. ( )

e. En cada vértice de un poliedro siempre concurren el mismo número de aristas. ( )

f. El número de aristas de un poliedro siempre es mayor que el número de vértices. ( )

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Consulta algunos programas dinámicos con los que puedas construir sólidos geométricos. Intenta construir un modelo tridimensional que te represente.

Utiliza tu imaginación para destacar en el modelo, las características que te identifican en tu familia y en tu grupo de compañeros.

10 Cuerpos redondos

Saberes previos

Escribe dos ejemplos de objetos que cumplan las condiciones dadas.

- No tiene caras planas.
- Tiene una superficie plana.
- Tiene dos superficies planas.
- Tiene más de dos superficies planas.

Analiza

Algunas construcciones arquitectónicas y varios objetos de la cotidianidad tienen forma de **cuerpo redondo**.

- ¿Cuáles son los cuerpos redondos más conocidos? ¿Qué construcciones u objetos tienen tales formas?

Conoce

Los cuerpos redondos más conocidos son: el **cilindro**, el **cono** y la **esfera**. En la Tabla 4.12 se observan algunas construcciones y objetos que tienen forma de estos cuerpos redondos.

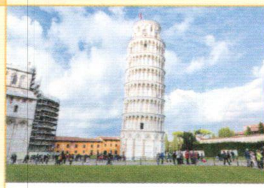
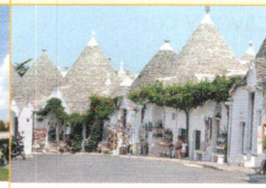
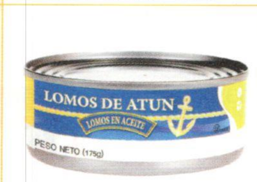
	Cuerpos redondos		
	Cilindro	Cono	Esfera
Construcciones	 Torre de Pisa – Italia	 Los "Trulli" de Alberobello – Italia	 London Eye – Londres
Objetos	 Cajas de atún	 Conos de tránsito	 Balones y pelotas

Tabla 4.12

Los cuerpos redondos son sólidos que tienen al menos una cara curva. También se denominan **sólidos de revolución** porque se generan haciendo girar una figura plana alrededor de una recta que se llama **eje de rotación** o **eje de giro**.

10.1 Cilindro

Un **cilindro recto** es un sólido de revolución que se obtiene al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados.

En la Figura 4.155 se observa el rectángulo $ABCD$ y el cilindro recto que se obtiene al girar el rectángulo alrededor del lado $\overline{CD}$.

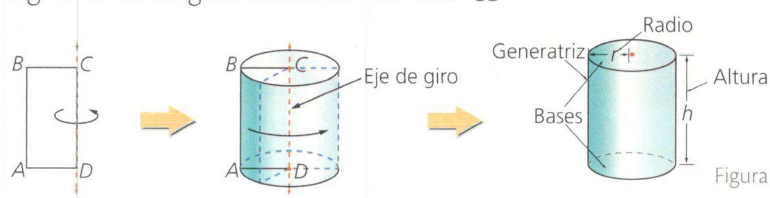


Figura 4.155

En un cilindro se distinguen los siguientes elementos:

- Los círculos que generan los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son las **bases**.
- Los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son los **radios**.
- La distancia entre las bases, que coincide con el lado $\overline{CD}$, es la **altura**.
- El lado $\overline{AB}$ se denomina **generatriz**.

Ejemplo 1

El desarrollo plano del cilindro se obtiene separando las bases y cortando la superficie lateral por la generatriz. En este desarrollo se obtienen dos círculos y un rectángulo (Figura 4.156).

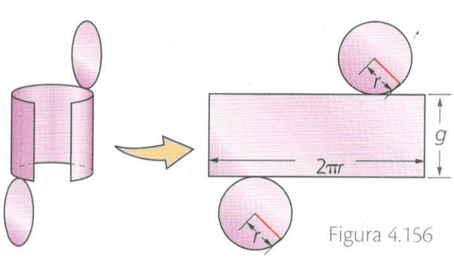


Figura 4.156

10.2 Cono

Un **cono recto** es un sólido de revolución que se obtiene al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

En la Figura 4.157 se observa el triángulo BAC rectángulo en el $\measuredangle A$, que gira alrededor de su cateto $\overline{CA}$.

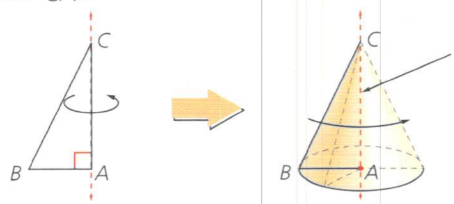


Figura 4.157

En la Figura 4.158 se muestran los elementos de un cono.

- El punto C es el **vértice** del cono.
- El círculo generado por el lado $\overline{AB}$ se llama **base**.
- El lado $\overline{AB}$ es el **radio**.
- La **altura** $\overline{AC}$ es la distancia del vértice a la base.
- La hipotenusa $\overline{BC}$, en cualquiera de sus posiciones, es la **generatriz**.
- La superficie que genera la hipotenusa es la **superficie lateral**.

Elementos de un cono

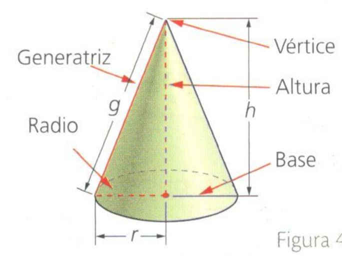


Figura 4.158

10.3 Tronco de cono

Si se corta un cono por un plano paralelo a la base y se quita la parte de arriba se obtiene un **tronco de cono**.

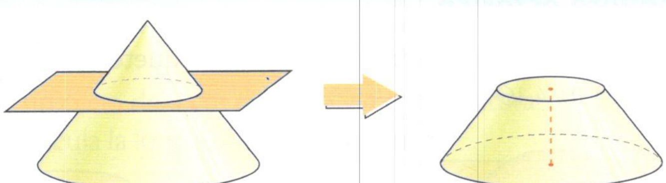


Figura 4.159

El tronco de cono también puede obtenerse al girar un trapecio rectángular alrededor del lado perpendicular a las **bases**.

En la Figura 4.160 se observan las dos bases circulares del tronco de cono obtenido al girar el trapecio $ABCD$ alrededor del lado $\overline{CB}$ (que es la **altura** del tronco), la **generatriz** $\overline{AD}$ y los **radios** de sus bases ($\overline{AB}$ y $\overline{CD}$).

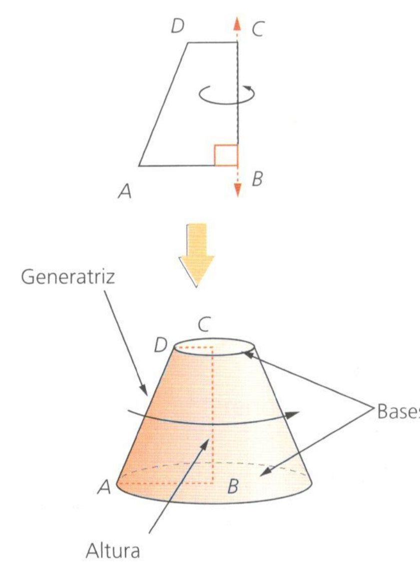


Figura 4.160

Ejemplo 2

Al cortar el cono de la Figura 4.161 con un plano paralelo a la base 2,5 cm abajo del vértice, se obtiene un tronco de altura 5,5 cm, ya que 8 cm − 2,5 cm = 5,5 cm.

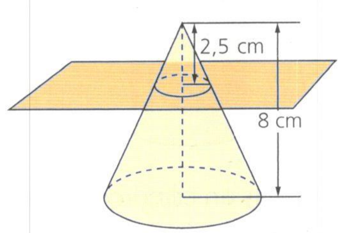


Figura 4.161

10.4 Esfera

Una **esfera** es un sólido de revolución que resulta al girar un semicírculo alrededor de su diámetro.

En la Figura 4.162 se observa cómo se genera una esfera al girar el semicírculo de radio $\overline{OP}$ alrededor de su diámetro $\overline{PP'}$.

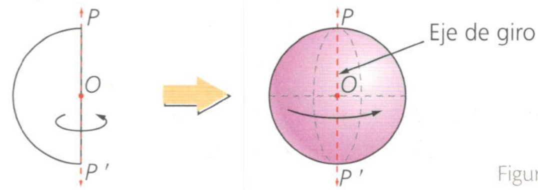


Figura 4.162

Los elementos de una esfera son:

- **Superficie esférica**. Se genera al girar la semicircunferencia alrededor del eje $\overline{PP'}$.
- **Centro de la esfera**. Es el centro del círculo máximo.
- **Radio de la esfera**. Segmento que se obtiene al unir el centro de la esfera con cualquier punto de la superficie esférica.
- **Cuerda**. Segmento que une dos puntos cualesquiera de la superficie esférica.
- **Diámetro**. Cuerda que pasa por el centro de la esfera.
- **Polos**. Puntos de corte del eje de giro con la superficie esférica.

Elementos de una esfera

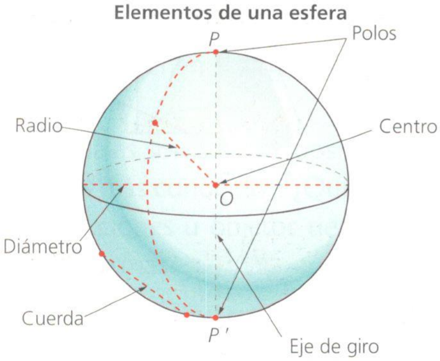


Figura 4.163

10.5 Casquete esférico

Al cortar una esfera por un plano resultan dos **casquetes esféricos**, como se observa en la Figura 4.164

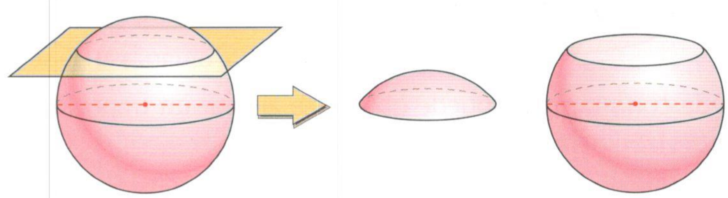


Figura 4.164

Ejemplo 3

Observa los sólidos de revolución de las figuras 4.165 y 4.166.

a.

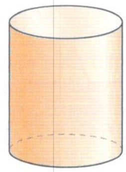


Figura 4.165

b.

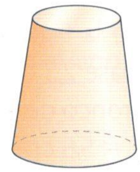


Figura 4.166

a. Es un cilindro, ya que sus bases son círculos congruentes.

b. No es un cilindro, pues sus bases son círculos de distinto radio. El sólido es un tronco de cono.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Dibuja el desarrollo plano de los cilindros de las figuras 4.167 y 4.168 con sus dimensiones.

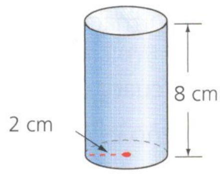


Figura 4.167

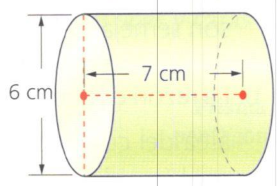


Figura 4.168

2 Se gira un rectángulo de base 7 cm y altura 11 cm tomando como eje de rotación la altura.

a. ¿Qué sólido se forma?

b. ¿Cuánto mide la generatriz?

c. ¿Cuánto mide la longitud de la circunferencia de la base del sólido?

3 Indica cuál de los siguientes desarrollos corresponde a un cono. Explica tu respuesta.

a.

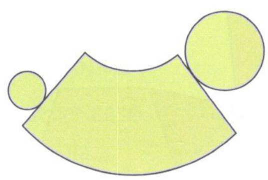


Figura 4.169

b.

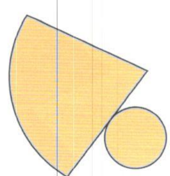


Figura 4.170

Ejercitación

4 Dibuja un cono de 3 cm de radio y 4 cm de altura. Luego, calcula la longitud de la generatriz.

5 Halla la longitud de la circunferencia que se determina en la superficie esférica al cortar una esfera de radio 9 cm con un plano que pasa por el centro.

Comunicación

6 Clasifica cada afirmación como verdadera (V) o falsa (F).

a. Los cilindros no son poliedros.

b. Si se corta un cilindro recto por un plano paralelo a sus bases se obtienen dos conos de la misma altura.

c. En un cono recto, la generatriz, la altura y el radio de la base forman un triángulo rectángulo isósceles.

d. Una esfera tiene infinitos diámetros.

e. Al cortar una esfera por un plano se obtiene una circunferencia.

Resolución de problemas

7 ¿Cuánto mide el diámetro de la circunferencia de la base del cono que se obtiene al girar el triángulo ABC de la Figura 4.171 alrededor del $\overline{CB}$?

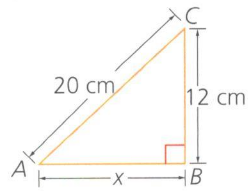


Figura 4.171

Evaluación del aprendizaje

i La galleta que enrolla un cono de helado tiene 14,5 cm de generatriz y 14 cm de altura. Calcula el radio máximo de la bola de helado que se puede poner en este cono.

ii Observa la Figura 4.172 que es un modelo de la Tierra y resuelve.

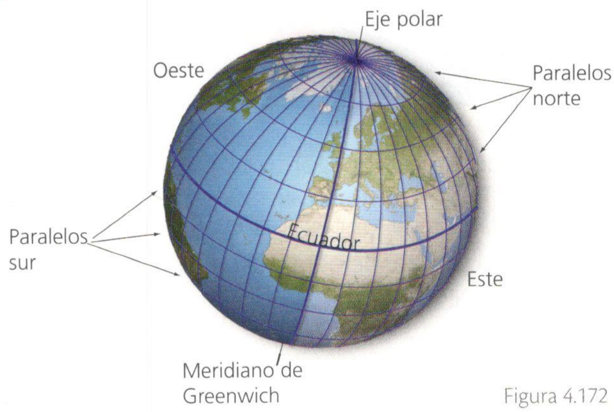


Figura 4.172

a. Indaga cuál es la longitud de la circunferencia de la Tierra en el paralelo del ecuador y en el meridiano de Greenwich. Compara los resultados. ¿Es posible afirmar que la Tierra tiene forma de esfera?

b. Al realizar un corte imaginario por el ecuador, ¿qué sólidos se obtienen?

c. ¿Cuál es el radio de la circunferencia de la Tierra sobre el Ecuador?

d. ¿Cuál es el radio de la circunferencia de la Tierra sobre el meridiano de Greenwich?

Practica más

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Polígonos

Modelación

1 Dibuja en tu cuaderno un polígono que cumpla con las condiciones dadas.

a. Pentágono cóncavo

b. Cuadrilátero con diagonales congruentes

c. Heptágono con dos diagonales perpendiculares

d. Trapezoide simétrico

Ejercitación

2 Observa el vitral y responde las preguntas.

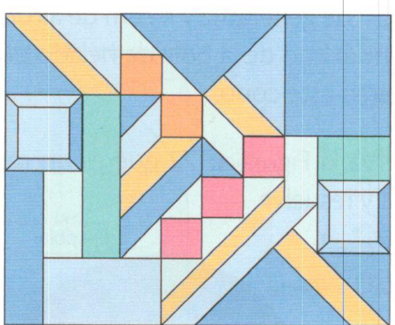


Figura 4.173

a. ¿Qué tipo de polígonos observas en el vitral?

b. ¿Cuántos de los cuadriláteros que componen el vitral son paralelogramos? ¿Cuántos de ellos son trapecios?

Razonamiento

3 Observa los cuadriláteros semejantes $ADCB$ y $EFGB$ de la Figura 4.174 y resuelve.

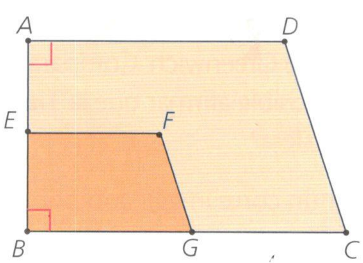


Figura 4.174

a. Calcula la medida de $\overline{FG}$ si $AD = 12$, $EF = 4$ y $DC = 10$.

b. Halla la medida de los ángulos de cada cuadrilátero si $m\measuredangle EFG = 109°$.

Resolución de problemas

4 Soluciona cada una de las situaciones.

a. Andrea afirma que todos los triángulos equiláteros son semejantes. ¿Es cierta su afirmación?

b. La razón de semejanza de dos cuadrados es $\frac{3}{4}$ y el área del cuadrado más pequeño es 36 cm^2. ¿Cuál es el área del cuadrado más grande?

c. Carlos redujo a la mitad la medida del largo y del ancho de una figura rectangular. ¿En cuánto se redujo el área?

Poliedros

Ejercitación

5 Observa en la Figura 4.175 el desarrollo plano de un poliedro. Responde las preguntas.

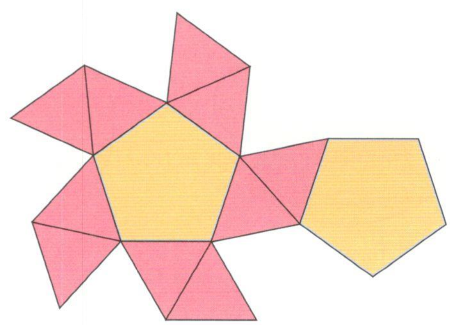


Figura 4.175

a. ¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene el poliedro?

b. ¿El poliedro es convexo o cóncavo? Explica tu respuesta.

Modelación

6 Lee y responde.

En la Figura 4.176, el plano β divide al cubo en dos poliedros congruentes. ¿Cuántos planos diferentes que cumplan la misma condición se pueden dibujar en el cubo?

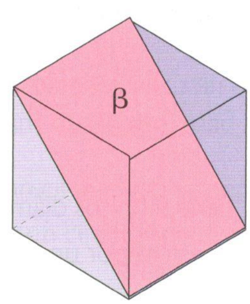


Figura 4.176

Resolución de problemas

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Estrategia: Deducir una formula

Problema

Observa los prismas de la Figura 4.177. A partir de ellos responde: ¿Cuántas aristas, vértices y caras tiene un prisma cuya base tiene *n* lados?

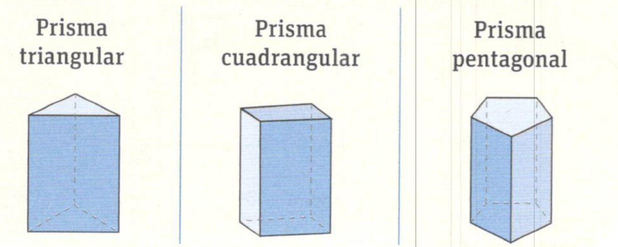


Figura 4.177

1. Comprende el problema

- ¿Cuántos lados tienen las bases de los prismas?

  R: Tienen tres, cuatro y cinco lados, respectivamente.

- ¿Qué ocurre con el número de caras, vértices y aristas de un prisma cuando se aumenta el número de lados de la base?

  R: Los elementos del prisma también aumentan.

2. Crea un plan

- Resuelve casos particulares y registra las soluciones en una tabla.
- Identifica regularidades entre los datos registrados y exprésalas mediante una fórmula.

3. Ejecuta el plan

- Completa la tabla.

Número de lados de la base	Aristas	Vértices	Caras
3	9	6	5
4	12	8	6
5	15	10	7
6	18	12	8

Tabla 4.13

- Identifica patrones entre los datos anteriores.

R: Un prisma de base n lados tiene $3n$ aristas, $2n$ vértices y $n + 2$ caras.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que un prisma cuya base es un dodecágono tiene 36 aristas, 24 vértices y 14 caras.

Aplica la estrategia

1. ¿En cuántas partes queda dividida una hoja de papel si se trazan n rectas que se cortan entre sí en el mismo punto? (Figura 4.178)

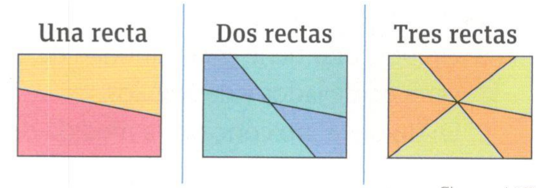


Figura 4.178

a. Comprende el problema

....

b. Crea un plan

....

c. Ejecuta el plan

....

d. Comprueba la respuesta

....

Resuelve otros problemas

2. Observa el desarrollo de un dado en la Figura 4.179.

   ¿Cuánto suman los números que se ubican en las caras opuestas de un cubo?

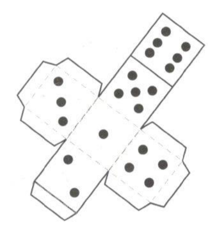


Figura 4.179

Formula problemas

3. Inventa un problema que involucre a la Figura 4.180.

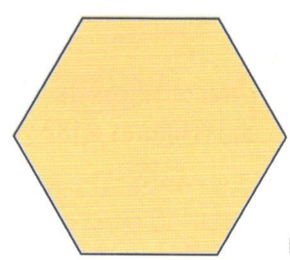


Figura 4.180

Enriquece tu vocabulario

- Escribe algunas semejanzas y diferencias que hay entre polígonos y poliedros.

Evaluación del aprendizaje

Polígonos

Razonamiento

1 Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta. VERDADERO/FALSO

a. Un cuadrado es un rectángulo. ( )

b. Un polígono tiene igual cantidad de vértices, de lados y de ángulos. ( )

c. En un polígono cóncavo, la medida de cada uno de sus ángulos interiores es menor que 180°. ( )

d. Todos los polígonos regulares son convexos. ( )

Triángulos

Razonamiento

2 Observa el triángulo de la Figura 4.181. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

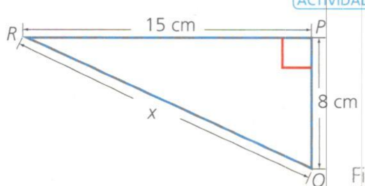


Figura 4.181

a. Según la longitud de sus lados, ¿qué clase de triángulo es?

b. Según la medida del ángulo *P*, ¿qué clase de triángulo es?

c. Calcula el valor de *x*.

Comunicación

3 Construye en tu cuaderno, con regla y compás, triángulos que cumplan las condiciones dadas. PREGUNTA ABIERTA

a. Un triángulo ABD de lados 10 cm, 8 cm y 7 cm.

b. Un triángulo MNF de tal forma que AB = 7 cm, BC = 5 cm y m ∡MNF = 30°.

Razonamiento

4 Escribe las características de los cuadriláteros que se presentan en las figuras 4.182 y 4.183. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a.

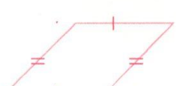


Figura 4.182

b.

Figura 4.183

5 Construye en tu cuaderno el paralelogramo DEFG, con regla y compás, si se sabe que los segmentos DE y GF son paralelos. PREGUNTA ABIERTA

Figuras congruentes y figuras semejantes

Modelación

6 Construye en tu cuaderno un polígono congruente y uno semejante a cada polígono de las figuras 4.184 y 4.185. Utiliza regla y transportador para determinar las medidas de sus elementos. PREGUNTA ABIERTA

a.

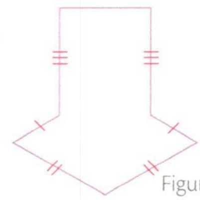


Figura 4.184

b.

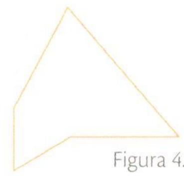


Figura 4.185

Comunicación

7 Explica si son o no congruentes los polígonos que se muestran en la Figura 4.186. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

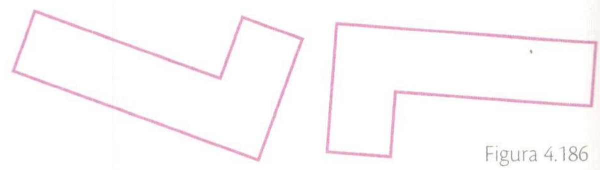


Figura 4.186

Resolución de problemas

8 Alfredo tiene un terreno en forma de romboide en el que sembrará árboles de naranjas y manzanas. Si divide el terreno por su diagonal, ¿son iguales las áreas de los terrenos obtenidos? Explica tu respuesta.

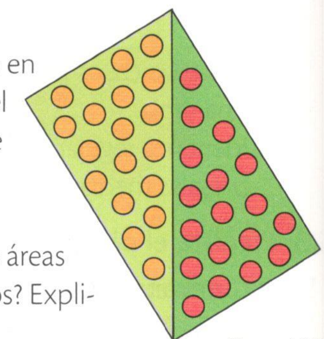


Figura 4.187

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Modelación

9 Dibuja en la cuadrícula un polígono semejante al polígono *ABCDEF* con razón de semejanza $k = 2$. ACTIVIDAD DE REFUERZO

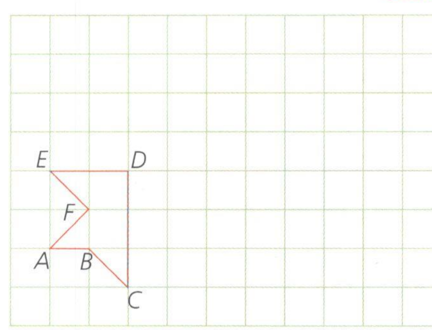


Figura 4.188

Movimientos en el plano

Ejercitación

10 Traslada el rectángulo dos unidades hacia arriba y una unidad hacia la derecha. Luego, responde. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

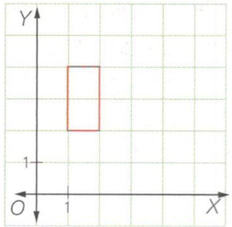


Figura 4.189

¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del rectángulo trasladado?

11 Dibuja la reflexión del siguiente polígono con respecto a la recta l. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

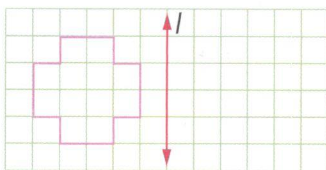


Figura 4.190

Homotecias

Ejercitación

12 Dibuja en tu cuaderno la homotecia del cuadrilátero cuyos vértices son (0, 1), (2, 0), (3, 3) y (0, 3), con factor de proporcionalidad 1,5 y centro en (4, 2). ACTIVIDAD DE REFUERZO

Poliedros

Razonamiento

13 Determina cuáles de los siguientes poliedros son regulares y cuáles no. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

a.

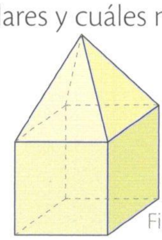


Figura 4.191

b.

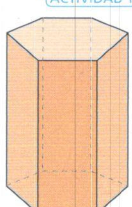


Figura 4.192

c.

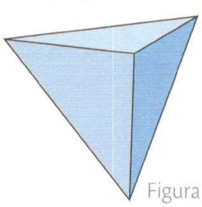


Figura 4.193

d.

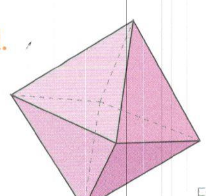


Figura 4.194

Ejercitación

14 Determina el número de caras, vértices y aristas de los siguientes poliedros. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a.

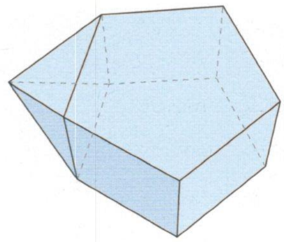


Figura 4.195

b.

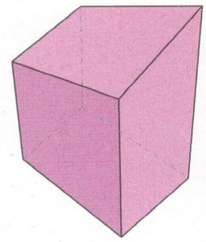


Figura 4.196

Cuerpos redondos

Razonamiento

15 Determina si los siguientes desarrollos corresponden a cilindros o no. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a.

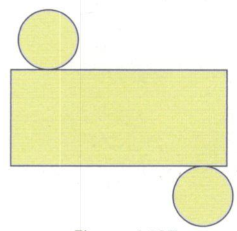


Figura 4.197

b.

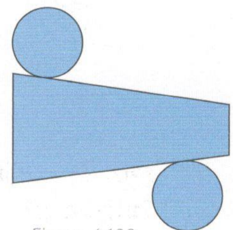


Figura 4.198

Resolución de problemas

16 Calcula la altura de un cono de 15 cm de generatriz y 4 cm de radio. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

17 Halla la longitud de la cuerda $\overline{AB}$. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

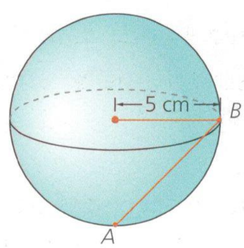


Figura 4.199

18 La galleta que enrolla un cono de helado tiene una altura de 30 cm y un radio de 10 cm. ¿Cuánto mide la generatriz? SOLUCIÓN DE PROBLEMAS


Figura 4.200

5 Medición

Ya sabemos

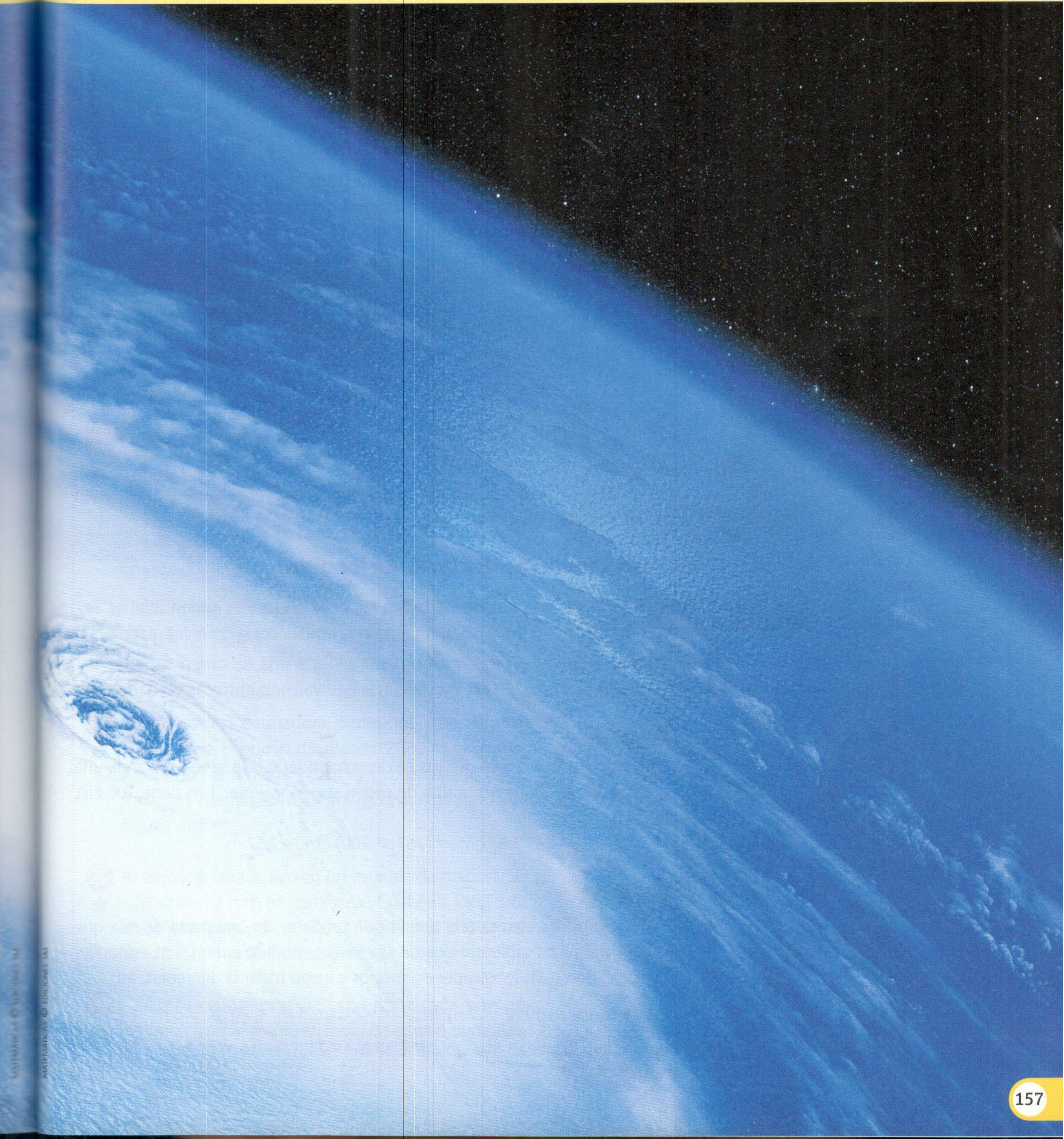
- Identificar los elementos que componen las figuras planas y los sólidos geométricos.

Vamos a aprender

- A calcular el perímetro y el área de figuras planas.
- A calcular el área total y el volumen de algunos poliedros.

Nos sirve para

- Solucionar situaciones de la vida cotidiana en las que se involucren el perímetro, el área, el volumen y la velocidad.



1 Unidades de longitud

Saberes previos

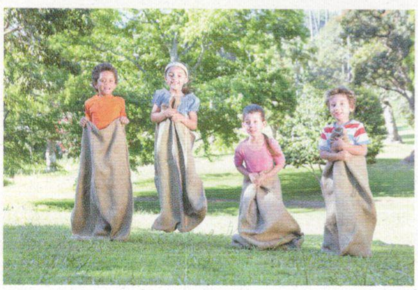
¿Cómo efectúas multiplicaciones abreviadas por 10, 100, 1 000...?

Multiplica abreviadamente.

- 57×100
- $0,68 \times 1\,000$
- $37,201 \times 10\,000$

Analiza

En la competencia de encostalados, Juan y Sebastián recorrieron la misma distancia. Un juez dijo que Juan había recorrido 1 km y otro juez afirmó que Sebastián había avanzado 1 000 m.



- ¿Qué se puede concluir de lo que dijeron los jueces?

Conoce

1.1 Múltiplos y submúltiplos del metro

Aunque cada juez usó una unidad de medida distinta, la longitud que midieron es igual puesto que Juan y Sebastián hicieron el mismo recorrido. Por lo tanto, se puede afirmar que 1 000 m = 1 km.

En el **sistema métrico decimal** el patrón de medida de la longitud es el **metro lineal**.

A partir del metro se definen unas unidades de medida mayores, llamadas **múltiplos del metro**, como kilómetro (km), hectómetro (hm) y decámetro (dam), y otras menores, denominadas **submúltiplos del metro**, como decímetro (dm), centímetro (cm) y milímetro (mm). (Tabla 5.1)

Unidades de longitud						
Múltiplos			Unidad básica	Submúltiplos		
kilómetro (km)	hectómetro (hm)	decámetro (dam)	metro (m)	decímetro (dm)	centímetro (cm)	milímetro (mm)
1 000 m	100 m	10 m	1 m	$\frac{1}{10}$ m	$\frac{1}{100}$ m	$\frac{1}{1\,000}$ m

Tabla 5.1

Cada unidad de un orden dado es equivalente a diez veces la unidad del orden inmediatamente inferior.

1.2 Conversión de unidades de longitud

- Para expresar una unidad de orden superior en una de orden inferior, se multiplica por 10, 100, 1 000, etc., según la equivalencia entre las unidades.
- Para convertir una unidad de orden inferior a una de orden superior, se divide entre 10, 100, 1 000, etc., según la equivalencia entre las unidades.

Ejemplo 1

Para expresar 267 cm en metros, se debe considerar que se va a pasar de una unidad de orden inferior a una de orden superior y que 1 m tiene 100 cm, así:

$$267 \text{ cm} = (267 \div 100) \text{ cm} = 2,67 \text{ m}$$

Ejemplo 2

Para determinar cuánta tela queda por venderse de una pieza de tela que mide 3 dam 7 m, sabiendo que de ella se han vendido 2 dam 3 m, es conveniente expresar las longitudes en metros y luego hallar la diferencia, así:

$$3 \text{ dam } 7 \text{ m} = 30 \text{ m} + 7 \text{ m} = 37 \text{ m y } 2 \text{ dam } 3 \text{ m} = 20 \text{ m} + 3 \text{ m} = 23 \text{ m}$$

Por lo tanto, quedan por venderse 37 m − 23 m = 14 m de tela.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Expresa en metros cada medida.

a. 34 hm = (34 · ☐) m = ☐ m

b. 8 km = (8 · ☐) m = ☐ m

c. 348,5 hm = (348,5 ; ☐) m = ☐ m

d. 45 dm = (45 ÷ ☐) m = ☐ m

e. 124 dm = (124 ÷ ☐) m = ☐ m

f. 2 452 cm = (2 452 ÷ ☐) m = ☐ m

2 Convierte cada medida a centímetros.

a. 6 dam = (6 · ☐) cm = ☐ cm

b. 124 dam = (124 · ☐) cm = ☐ cm

c. 1 km = (1 · ☐) cm = ☐ cm

d. 59 mm = (59 ÷ ☐) cm = ☐ cm

e. 1 654 mm = (1 654 ÷ ☐) cm = ☐ cm

f. 34,28 dm = (34,28 · ☐) cm = ☐ cm

3 Escribe 0,1; 0,01; 0,001, etc., según corresponda.

a. 1 cm equivale a ☐ m.

b. 1 dm equivale a ☐ hm.

c. 1 m equivale a ☐ km.

d. 1 hm equivale a ☐ km.

e. 1 mm equivale a ☐ m.

f. 1 cm equivale a ☐ dam.

Resolución de problemas

4 Magda es una patinadora profesional que entrena diariamente. El primer día recorre 2 300 m; el segundo, 24 hm; el tercero, 1,5 km y el cuarto, 150 dam. ¿Cuántos metros en total ha recorrido al cabo del cuarto día?

5 Al enroscar un tornillo en un mueble de madera, se introduce 1,2 mm en cada giro. ¿Cuál es la longitud, en centímetros, del tornillo si después de 80 vueltas queda totalmente incrustado en el mueble?

6 ¿Cuántos centímetros de largo mide cada uno de los cinco trozos iguales en los que se cortó una tabla de 5 m de largo?

7 En la Tabla 5.2 se registra la altura promedio de algunos animales.

Animal	Altura
Alce	1,75 m
Elefante africano	32,5 dm
Avestruz	2 400 mm
Jirafa	500 cm
Elefante asiático	0,25 dam

Tabla 5.2

a. ¿Cuál es el animal más alto?

b. ¿Cuál es la altura del animal más bajo?

c. ¿Cuántos centímetros más puede medir un elefante africano que un alce?

d. ¿Cuántos metros más alcanza a medir la jirafa que el avestruz?

8 En un circuito de carreras que mide 4 850 m, se deben dar 52 vueltas. ¿Cuántos kilómetros debe recorrer un piloto de automovilismo en tal circuito?

9 En una carretera recta se sembraron 251 árboles. ¿A cuántos metros de distancia se sembraron, unos de otros, si la carretera mide 85 km?

Evaluación del aprendizaje

i Relaciona cada medida de la izquierda con su medida equivalente de la columna de la derecha.

a. 24 dam	( ) 2,4 hm
b. 1 240 mm	( ) 12,4 km
c. 124 hm	( ) 1,24 m
d. 24 m	( ) 240 dm

ii Expresa cada medida en las unidades indicadas.

a. 3 km — m — hm — cm

b. 35 dam — hm — m — dm

2 Perímetro de figuras planas

Saberes previos

Si quieres construir un marco para una pintura, ¿cómo puedes calcular la cantidad de madera que necesitarás?

Analiza

Lucas debe delimitar la cancha de fútbol de la Figura 5.1 usando una cinta blanca.

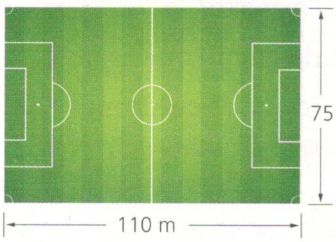


Figura 5.1

- ¿Cuántos metros de cinta debe comprar?

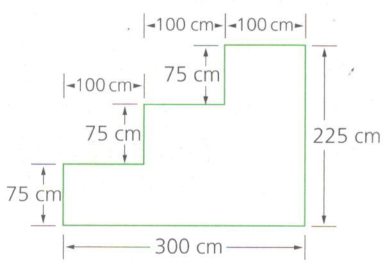


Figura 5.3

Conoce

Para determinar la cantidad de metros de cinta que Lucas debe comprar, es necesario sumar la longitud de todos los lados de la cancha, así:

$$110\text{ m} + 75\text{ m} + 110\text{ m} + 75\text{ m} = 370\text{ m}$$

Entonces, Lucas debe comprar 370 m de cinta.

El **perímetro de una figura plana** es la suma de las medidas de todos sus lados.

Ejemplo 1

Observa cómo se halla el perímetro del polígono de la Figura 5.2.

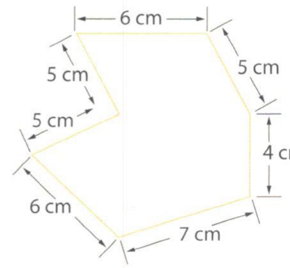
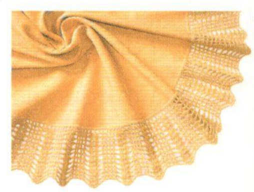


Figura 5.2

$$P = 6\text{ cm} + 5\text{ cm} + 4\text{ cm} + 7\text{ cm} + 6\text{ cm} + 5\text{ cm} + 5\text{ cm} = 38\text{ cm}$$

Ejemplo 2



Una costurera diseña manteles rectangulares de 25 cm de largo por 12 cm de ancho. Para saber cuántos metros de encaje necesita para bordear cada mantel, ella debe hallar su perímetro. Lo calcula así:

$$P = 25\text{ cm} + 12\text{ cm} + 25\text{ cm} + 12\text{ cm} = 74\text{ cm}$$

Por lo tanto, la costurera necesita 74 cm de encaje para bordear cada uno de los manteles.

Ejemplo 3

Para la celebración del Día de la Independencia, en el interior de cada uno de los salones de un colegio se va a poner una bandera por todo el contorno. Si cada salón de clase tiene forma cuadrada y uno de sus lados mide 6 m, en total se necesitarán 6 m + 6 m + 6 m + 6 m = 24 m de bandera por salón.

Ejemplo 4

Para hallar el perímetro de la Figura 5.3, se suman todas las longitudes dadas.

$$P = 75\text{ cm} + 100\text{ cm} + 75\text{ cm} + 100\text{ cm} + 75\text{ cm} + 100\text{ cm} + 225\text{ cm} + 300\text{ cm}$$

$$P = 1\,050\text{ cm}$$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Determina el perímetro de cada polígono.

a.

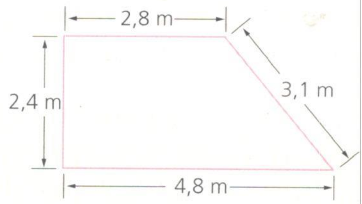


Figura 5.4

P =

P = cm

b.

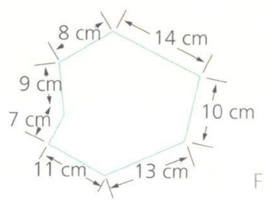


Figura 5.5

P =

P = cm

2 Expresa el perímetro de la Figura 5.6 en metros.

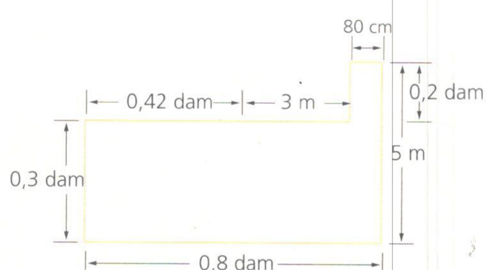


Figura 5.6

Resolución de problemas

3 El monasterio de El Escorial tiene una estructura rectangular de 2 070 dm de largo y de 16 100 cm de ancho. Si se deben ubicar banderas alrededor de él, una por cada metro de distancia incluyendo los vértices, ¿cuántas banderas se necesitan?

4 Alba le da cincuenta vueltas diarias al jardín que se muestra en la Figura 5.7.

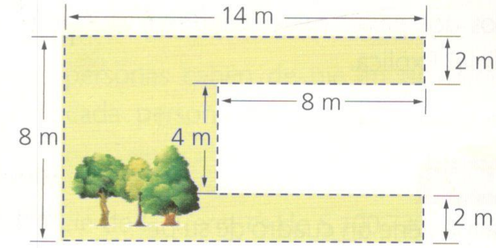


Figura 5.7

a. ¿Cuántos kilómetros recorre en dos días?

b. ¿Cuántos metros recorre de lunes a viernes?

c. Si mantiene su ritmo diario, ¿en cuántos días completará 9 kilómetros?

d. Si ella entrena durante cada uno de los días de junio, ¿cuántas vueltas completas y cuántos kilómetros recorre ese mes?

5 El largo de una cancha de fútbol mide 90 m y el ancho mide $\frac{3}{4}$ del largo. ¿Cuántas vueltas hay que dar al campo para recorrer 4 km?

Evaluación del aprendizaje

✓ Escribe el dato que falta en las figuras 5.8 y 5.9 para que tengan 92 m y 115 m de perímetro, respectivamente.

a.

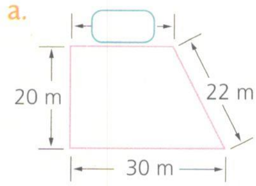


Figura 5.8

b.

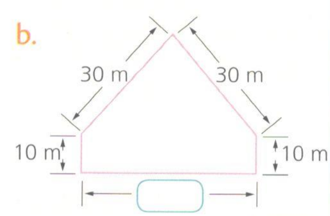


Figura 5.9

Estilos de vida saludable

Diana trota alrededor de una cancha rectangular de 45 m de ancho por 90 m de largo. ¿Cuántos kilómetros trota al dar seis vueltas a la cancha?, ¿qué beneficios trae la práctica de este ejercicio para su salud?

3 Unidades de superficie

Pensamiento métrico

Saberes previos

En un mapa de América del Sur, ubica a Colombia y a Brasil. ¿Cuál de los dos países tiene mayor superficie? Explica.

Analiza

Catalina tiene un cuadro de su perro y desea colgarlo en la pared de la sala.

- Si cada lado del cuadro mide un metro, ¿qué superficie necesitará Catalina para colgar su cuadro?

Conoce

3.1 Múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado

El cuadro de Catalina tiene forma de cuadrado. Como cada uno de sus lados mide 1 m de longitud, entonces cubre una superficie de 1 metro cuadrado.

La unidad de medida de la superficie es el metro cuadrado (m^2), a partir de la cual se definen unas unidades de medida mayores, llamadas **múltiplos del metro cuadrado**, y otras menores, denominadas **submúltiplos del metro cuadrado**.

En la Tabla 5.3 se muestran las equivalencias respecto al metro cuadrado.

Unidades de superficie						
Múltiplos			Unidad básica	Submúltiplos		
kilómetro cuadrado (km^2)	hectómetro cuadrado (hm^2)	decámetro cuadrado (dam^2)	metro cuadrado (m^2)	decímetro cuadrado (dm^2)	centímetro cuadrado (cm^2)	milímetro cuadrado (mm^2)
1 000 000 m^2	10 000 m^2	100 m^2	1 m^2	$\frac{1}{100}$ m^2	$\frac{1}{10\,000}$ m^2	$\frac{1}{1\,000\,000}$ m^2

Tabla 5.3

Cada unidad de superficie equivale a cien veces la unidad del orden inmediatamente inferior.

3.2 Conversión de unidades de superficie

Para expresar una unidad de orden inferior en una de orden superior, se divide entre 100, 10 000, 1 000 000, etc., según la equivalencia entre las unidades.

Para convertir una unidad de orden superior a una de orden inferior, se multiplica por 100, 10 000, 1 000 000, etc., según la equivalencia entre las unidades.

Ejemplo

El propietario de una finca cafetera de 1 350 000 m^2 de superficie destina para el cultivo del café cuatro quintas partes de dicha superficie y el 30 % de la superficie restante para una bodega en la que almacena los sacos de café. Para saber cuántos hm^2 se destinan para el cultivo del café y cuántos para su almacenamiento, se convierten los 1 350 000 m^2 a hm^2, así: 1 350 000 ÷ 10 000 = 135 hm^2.

El cultivo cubre una superficie de $\left(\frac{4}{5} \cdot 135\right) hm^2 = 108\ hm^2$. Como quedan disponibles $135\ hm^2 - 108\ hm^2 = 27\ hm^2$, se calcula el 30 % de esta superficie así: $\left(\frac{30}{100} \cdot 27\right) hm^2 = 8{,}1\ hm^2$, que corresponden al área de la bodega.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Realiza la conversión solicitada en cada caso.

a. 24 m^2 a cm^2

b. 24 mm^2 a cm^2

c. 24 dam^2 a cm^2

2 Selecciona la medida equivalente a la que se da en cada caso.

a. 92 dm^2

- 9 200 m^2
- 9 200 cm^2
- 920 cm^2

b. 101 hm^2

- 10 100 dm^2
- 101 000 cm^2
- 1 010 000 m^2

3 Expresa cada medida en las unidades de orden inferior que se indican.

a. 358 cm^2 en mm^2

b. 9 131 dm^2 en mm^2 y cm^2

c. 3 251 hm^2 en dm^2 y en cm^2

d. 25 328 m^2 en cm^2 y en dm^2

4 Expresa cada medida en las unidades de orden superior que se indican.

a. 429 dam^2 en hm^2 y en km^2

b. 937 mm^2 en dm^2 y en hm^2

c. 741 cm^2 en dm^2 y en dam^2

d. 15 345 dm^2 en m^2 y en hm^2

Resolución de problemas

5 Un campo de 15 000 m^2 se divide entre cuatro partes iguales. ¿Cuántos dam^2 mide cada parte?

6 El suelo de una habitación mide 24 m^2 y está cubierto completamente por 60 baldosas cuadradas. ¿Cuántos cm^2 mide cada baldosa?

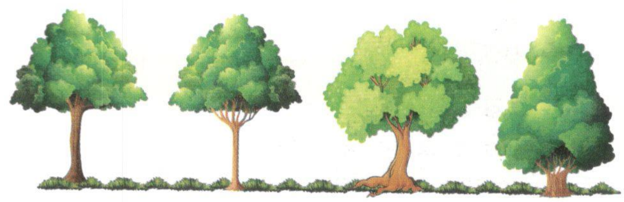
7 Angélica compró una finca que tiene un área de 45 hectáreas. Si una hectárea equivale a 1 hm^2, ¿cuántos metros cuadrados de área tiene la finca?

8 El área de una bodega de almacenamiento de electrodomésticos es de 4 dam^2 de superficie. ¿Cuántas baldosas de 1 m^2 y de 1 dm^2, respectivamente, se necesitan para adoquinarla?

9 ¿Cuántas personas caben de pie en un patio de 60 m^2 si cada persona ocupa una superficie de 20 dm^2?

10 La superficie de la Tierra es de 5 100 720 mam^2; $\frac{3}{4}$ partes de ella están cubiertas por los océanos, ríos y lagunas. ¿Cuántos km^2 corresponden a la superficie de tierra firme si 1 mam^2 = 100 km^2?

11 Calcula el número de árboles que pueden plantarse en un terreno rectangular de 32 m de largo y 30 m de ancho si cada planta necesita 4 m^2 para desarrollarse.



Evaluación del aprendizaje

Expresa cada área en la unidad indicada.

a. 35 dam^2 = ______ cm^2

b. 28 dm^2 = ______ mm^2

c. 345 m^2 = ______ dam^2

d. 5 245 dm^2 = ______ hm^2

Educación ambiental

Cierto relleno sanitario tiene una superficie de 41 hectáreas. ¿A cuántos kilómetros cuadrados y a cuántos decámetros cuadrados corresponde esta superficie? Investiga cuál es la importancia de los rellenos sanitarios para el sostenimiento ambiental.

4 Área de figuras planas

Saberes previos

Para cada actividad escribe en tu cuaderno, si se debe medir la longitud, el perímetro o el área.

- Pavimentar una carretera.
- Cercar un jardín.
- Construir una piscina.
- Medir la estatura de una persona.

Analiza

En la Figura 5.10 se representan tres rectángulos de 18 cm de perímetro que debía dibujar Laura como tarea.

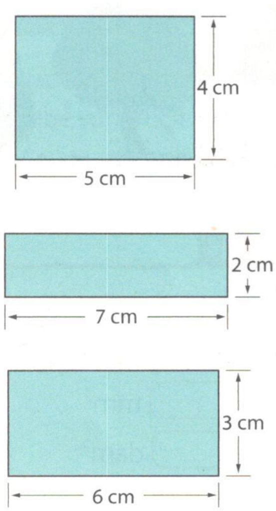


Figura 5.10

- ¿Cuál de los rectángulos que dibujó tiene la mayor área?

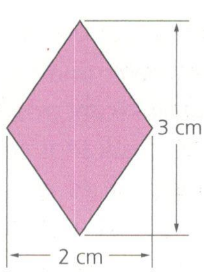


Figura 5.11

Conoce

Para determinar el área de los rectángulos se deben multiplicar sus dimensiones es decir, la base por la altura.

$A_1 = 5\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 20\text{ cm}^2$

$A_2 = 7\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} = 14\text{ cm}^2$

$A_3 = 6\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 18\text{ cm}^2$

Entonces, el rectángulo con base de 5 cm y altura de 4 cm es el de mayor área.

El **área de una región** o **figura** es la medida de su superficie. Se denota A.

En la Tabla 5.4 se muestra cómo determinar el área de algunas figuras planas mediante el uso de fórmulas.

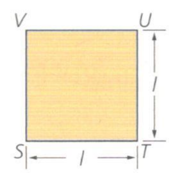
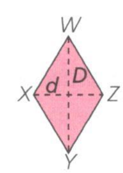
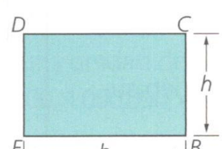
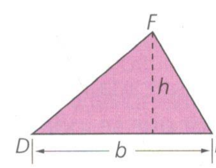
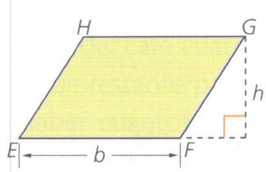
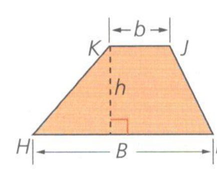
Área de algunas figuras planas	
Cuadrado $A = l \cdot l$ 	Rombo $A = \dfrac{d \cdot D}{2}$ 
Rectángulo $A = b \cdot h$ 	Triángulo $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$ 
Paralelogramo $A = b \cdot h$ 	Trapecio $A = \dfrac{(B + b) \cdot h}{2}$ 

Tabla 5.4

Ejemplo

La medida de la superficie del rombo de la Figura 5.11 se calcula así:

$$A = \frac{d \cdot D}{2}$$

$$A = \frac{2\text{ cm} \cdot 3\text{ cm}}{2} = 3\text{ cm}^2$$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Halla el área de cada figura.

a.

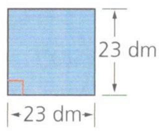


Figura 5.12

b.

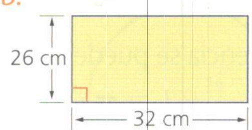


Figura 5.13

c.

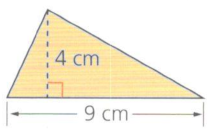


Figura 5.14

d.

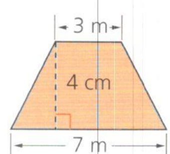


Figura 5.15

Comunicación

2 Determina cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

a. Una piscina de 6 m de largo por 5 m de ancho tiene un área de 300 000 cm^2.

b. El área de una azotea es de 600 dm^2 y es equivalente a la cuarta parte del terreno de una casa de 240 m^2.

c. El área de un cuadro de 10 m de largo por 0,05 cm de ancho es 500 m^2.

d. El área de un triángulo es igual al producto de su base por su altura.

Razonamiento

3 Sandra usó fichas cuadradas para construir un rectángulo. El perímetro del rectángulo que construyó era de 14 unidades. ¿Cuántas fichas cuadradas puede haber usado Sandra para todo el rectángulo?

4 Sebastián desea cultivar papa, para lo cual dispone de dos terrenos cuyas dimensiones se muestran en las figuras 5.16 y 5.17. Su esposa le dice que en cualquiera de los dos terrenos cultivaría la misma cantidad, porque los dos tienen igual perímetro. ¿Crees que ella tiene razón? Explica.

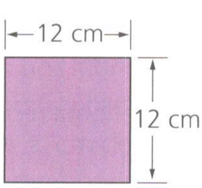


Figura 5.16

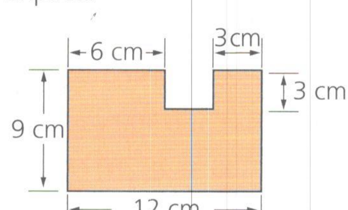


Figura 5.17

Resolución de problemas

5 Rosario quiere cercar su jardín cuadrado para evitar que entren los conejos. El área del jardín es de 9 m^2. ¿Cuántos metros de malla debe comprar para hacer el cerramiento?

6 Dibuja en la cuadrícula dos figuras más que tengan la misma área que la de la Figura 5.18.

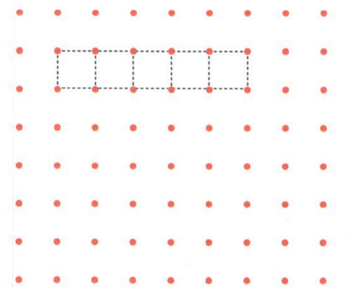


Figura 5.18

Halla el perímetro de las tres figuras. ¿Qué puedes concluir?

Evaluación del aprendizaje

✓ Halla el área de cada uno de los polígonos que forman el terreno de la Figura 5.19 y responde las preguntas.

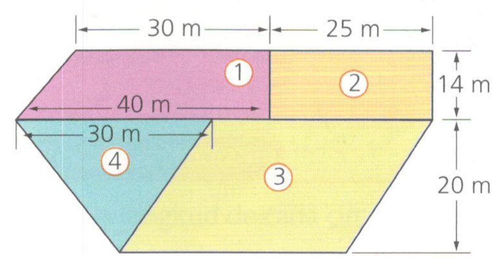


Figura 5.19

a. ¿Cuál es el área total del terreno en hectómetros cuadrados?

b. ¿Cuál de las cuatro partes tiene la mayor área?

c. ¿En cuántos metros cuadrados es mayor el área de la parte mayor que el área de la parte menor?

d. Si la mitad del terreno se dedica al cultivo de hortalizas y en la cuarta parte se construye un galpón, ¿cuántos decímetros cuadrados se dedican a cada actividad?

e. Si la parte de menor área entre las que se dividió el terreno se vende a razón de $ 1 000 000 el metro cuadrado, ¿cuánto se recibe por su venta?

5 Longitud de la circunferencia

Saberes previos

¿Cuál es la diferencia entre circunferencia y círculo? Apoya tu explicación con un dibujo en tu cuaderno.

Analiza

Se quiere fabricar una banda de plástico de forma circular para proteger los dientes de una sierra como la de la Figura 5.20.

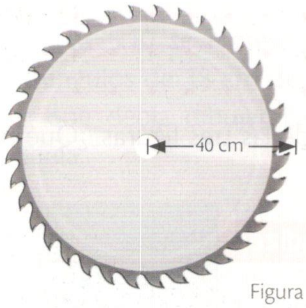


Figura 5.20

- ¿Qué medida debe tener esta protección?

Conoce

La medida de la banda de plástico que se requiere se halla calculando la longitud de una circunferencia de 40 cm de radio.

La longitud de la circunferencia se puede calcular con la expresión

$$L = \pi \cdot d,$$

donde d representa la longitud del diámetro de la circunferencia. Como la longitud del diámetro (d) es el doble de la del radio (r), se tiene que:

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r.$$

La constante π se aproxima a 3,14.

Para conocer la medida de la banda de plástico se reemplaza en la expresión el valor del radio y la aproximación de π.

$$\begin{aligned} L &= 2 \cdot \pi \cdot r \\ &= 2\,(3{,}14)\,(40 \text{ cm}) \\ &= 251{,}2 \text{ cm} \end{aligned}$$

Por lo anterior, la banda de plástico debe medir 251,2 cm.

Ejemplo 1

Para calcular la medida del radio de una circunferencia cuya longitud es de 9,2 cm, se despeja r en la fórmula de la longitud de la circunferencia, se reemplazan los datos conocidos y se realizan las operaciones necesarias.

Así, como $L = 2 \cdot \pi \cdot r$, entonces:

$$r = \frac{L}{2 \cdot \pi} = \frac{9{,}2 \text{ cm}}{2 \cdot 3{,}14} = 1{,}46 \text{ cm}.$$

Por lo tanto, la medida del radio de la circunferencia aproximadamente es 1,46 cm.

Ejemplo 2

El radio de la rueda de un camión mide 45 cm. Para saber qué distancia ha recorrido el camión cuando la rueda ha dado 100 vueltas, se halla primero lo que logra avanzar en una sola vuelta y luego se multiplica el valor obtenido por 100.

La rueda avanza en una vuelta:

$$L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 45 \text{ cm} = 282{,}6 \text{ cm}.$$

Entonces, cuando la rueda ha dado 100 vueltas, el camión habrá recorrido:

$$282{,}6 \text{ cm} \cdot 100 = 28\,260 \text{ cm} = 0{,}2826 \text{ km}.$$

Luego de 100 vueltas, el camión habrá recorrido 0,2826 km.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Calcula la longitud de cada circunferencia.

a.

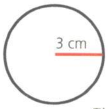


Figura 5.21

b.

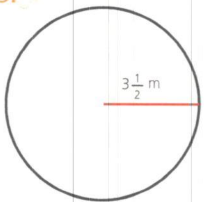


Figura 5.22

c.

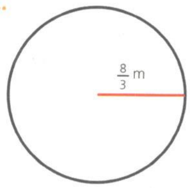


Figura 5.23

d.

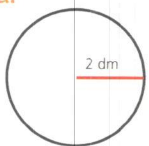


Figura 5.24

2 Halla la longitud de la circunferencia cuyo diámetro es 4 cm.

3 Halla la longitud de la circunferencia cuyo radio es $\frac{16}{3}$ m.

Razonamiento

4 Escribe falso (F) o verdadero (V). Justifica tus respuestas en cada caso.

a. El perímetro del círculo es igual a la longitud de la circunferencia. ( )

b. La longitud de la circunferencia es aproximadamente el doble del diámetro. ( )

c. La longitud de la circunferencia es la mitad del diámetro. ( )

d. La longitud de la circunferencia es aproximadamente el triple del diámetro. ( )

Resolución de problemas

5 En una fábrica de muebles se compró una cinta decorativa para colocar alrededor de un vidrio circular de 30 cm de radio. ¿Cuántos vidrios con las mismas dimensiones es posible decorar con una cinta de 90 m?

6 De una lámina como la que se muestra en la Figura 5.25, Adolfo quiere obtener un círculo de 7 cm de perímetro. ¿Es suficiente el material para trazar la circunferencia? Justifica.

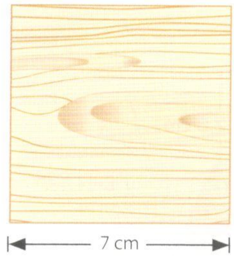


Figura 5.25

7 Mariana construye un aro de 15 dm de diámetro, para su clase de gimnasia. ¿Cuál es la longitud de la manguera que utiliza para el aro?

Evaluación del aprendizaje

i Encuentra la longitud de cada circunferencia.

a.

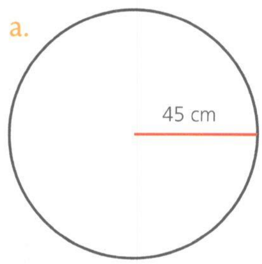


Figura 5.26

b.

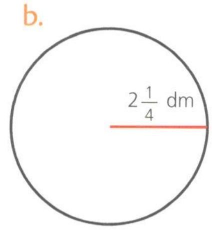


Figura 5.27

ii Dos amigos practican atletismo. Uno de ellos corre sobre dos bandas circulares concéntricas de 30 m de diámetro y el otro sobre una banda que está 2 m hacia fuera de la anterior. ¿Cuál es la longitud que recorre cada uno en una vuelta?

6 Área de prismas y pirámides

Saberes previos

Calcula el área del pentágono regular de la Figura 5.28.

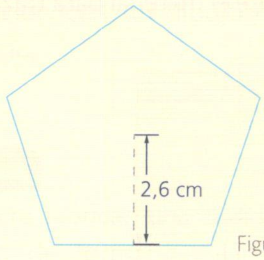


Figura 5.28

Analiza

Néstor debe construir el prisma regular de la Figura 5.29 con un trozo de cartulina de 35 cm de largo por 25 cm de ancho.

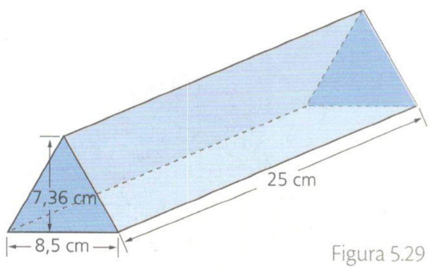


Figura 5.29

- ¿Le alcanza la cartulina a Néstor para construir el prisma? Justifica tu respuesta.

Conoce

6.1 Área de prismas regulares

Para establecer si la cartulina le alcanza a Néstor, se halla el área total del prisma y se compara con el área de la cartulina.

En este caso, el prisma tiene dos bases triángulares y tres caras laterales rectangulares. Luego el área total será la suma de todas las áreas de sus caras.

$$\begin{aligned} A_{\text{prisma}} &= 2 \cdot A_{\text{triángulo}} + 3 \cdot A_{\text{rectángulo}} \\ &= 2 \cdot \left(\frac{8{,}5\text{ cm} \cdot 7{,}36\text{ cm}}{2}\right) + 3 \cdot (25\text{ cm} \cdot 8{,}5\text{ cm}) \\ &= 2 \cdot (31{,}28\text{ cm}^2) + 3 \cdot (212{,}5\text{ cm}^2) \\ &= 700{,}06\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$A_{\text{cartulina}} = 35\text{ cm} \cdot 25\text{ cm} = 875\text{ cm}^2$$

Como $875\text{ cm}^2 > 700{,}06\text{ cm}^2$, entonces, la cartulina que tiene Néstor es suficiente para construir el prisma.

El **área lateral de un prisma regular** es igual a la suma de las áreas de sus caras laterales y su **área total** es igual al área lateral más el área de los polígonos de las dos bases.

$$A_{\text{lateral}} = A_1 + A_2 + \ldots + A_n \qquad A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + 2A_{\text{base}}$$

A_n = área de una cara lateral

Recuerda que el **área de un polígono regular** se calcula con la expresión:

$$A = \frac{p \cdot a}{2}.$$

p: perímetro del polígono

a: apotema

Ejemplo 1

Observa cómo se calcula el área del prisma pentagonal de la Figura 5.30.

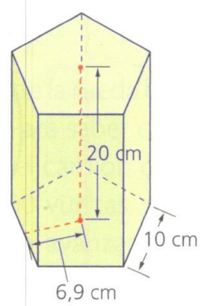


Figura 5.30

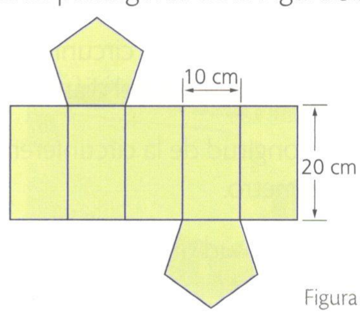


Figura 5.31

En la Figura 5.31 se observa el desarrollo del prisma. Las caras laterales son cinco rectángulos de área $20 \cdot 10 = 200\text{ cm}^2$, cada uno. Entonces

$A_{\text{lateral}} = 5 \cdot 200\text{ cm}^2 = 1\,000\text{ cm}^2$

Las bases del prisma son pentágonos regulares, así que se calcula su área.

$$A_{\text{base}} = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{50\text{ cm} \cdot 6{,}9\text{ cm}}{2} = 172{,}5\text{ cm}^2$$

Por tanto, el área total es: $A_{\text{total}} = 1\,000\text{ cm}^2 + 2 \cdot 172{,}5\text{ cm}^2 = 1\,345\text{ cm}^2$.

6.2 Área de pirámides regulares

El **área lateral de una pirámide regular** es igual a la suma de las áreas de las caras triangulares, y su **área total** es igual al área lateral más el área del polígono de la base.

$$A_{\text{lateral}} = A_1 + A_2 + \dots + A_n \qquad A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + A_{\text{base}}$$

A_n = área de una cara lateral

Ejemplo 2

Observa cómo se calcula el área lateral y el área total de las pirámides regulares de las figuras 5.32 y 5.33.

La pirámide de la Figura 5.32 tiene base cuadrada, por tanto tiene cuatro caras laterales triangulares.

El área de cada cara de la pirámide es $A = \dfrac{5\text{ cm} \cdot 8\text{ cm}}{2} = 20\text{ cm}^2$

Luego el área lateral corresponde a

$$A_{\text{lateral}} = 4 \cdot 20\text{ cm}^2 = 80\text{ cm}^2$$

$$\begin{aligned} A_{\text{total}} &= 80\text{ cm}^2 + (5\text{ cm})^2 \\ &= 80\text{ cm}^2 + 25\text{ cm}^2 \\ &= 105\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

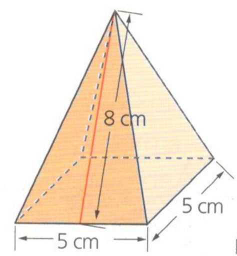


Figura 5.32

La Figura 5.33, corresponde a un tetraedro regular. Si es un tetraedro regular, las caras y la base son triángulos equiláteros, es decir, una pirámide con su base y sus caras laterales congruentes.

El área de una cara lateral es igual a $A = \dfrac{14\text{ cm} \cdot 12\text{ cm}}{2} = 84\text{ cm}^2$

$$A_{\text{lateral}} = 3 \cdot 84\text{ cm}^2 = 252\text{ cm}^2$$

$$\begin{aligned} A_{\text{total}} &= 252\text{ cm}^2 + \frac{14\text{ cm} \cdot 12\text{ cm}}{2} \\ &= 252\text{ cm}^2 + 84\text{ cm}^2 = 336\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

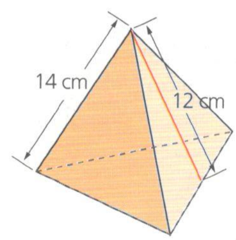


Figura 5.33

Ejemplo 3

Para calcular el área total de la pirámide regular hexagonal de la Figura 5.34, se puede utilizar el desarrollo de la pirámide (Figura 5.35) y reemplazar los valores correspondientes en la expresión.

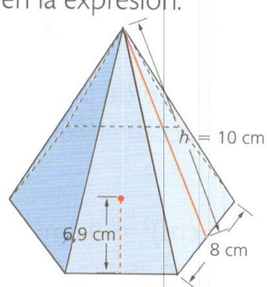


Figura 5.34

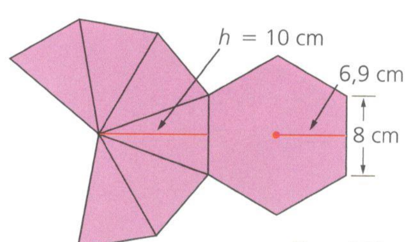


Figura 5.35

$$A_{\text{lateral}} = 6 \cdot \left(\frac{8\text{ cm} \cdot 10\text{ cm}}{2}\right) = 240\text{ cm}^2$$

$$A_{\text{base}} = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{48\text{ cm} \cdot 6{,}9\text{ cm}}{2} = 165{,}6\text{ cm}^2$$

Por lo tanto, el área total es: $A_{\text{total}} = 240\text{ cm}^2 + 165{,}6\text{ cm}^2 = 405{,}6\text{ cm}^2$.

6.3 Área del tronco de pirámide regular

El **área lateral de un tronco de pirámide regular** es la suma de las áreas de los trapecios congruentes de sus caras.

El **área total** se obtiene adicionando el área de las dos bases al área lateral.

$$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + A_{\text{base1}} + A_{\text{base2}}$$

Recuerda

$A_{\text{trapecio}} = \dfrac{(B + b)\,h}{2}$ donde B es la longitud de la base menor, b es la longitud de la base mayor y h es la altura del trapecio.

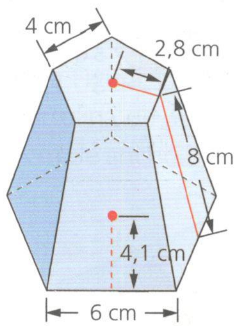


Figura 5.36

Ejemplo 4

Observa cómo se calcula el área lateral y el área total del tronco de pirámide de la Figura 5.36.

1. Se halla el área de una de las caras laterales.

$$A_{\text{trapecio}} = \frac{(6\text{ cm} + 4\text{ cm})\,8\text{cm}}{2} = 40\text{ cm}^2$$

2. Se halla el área lateral del tronco de pirámide.

$$A_{\text{lateral}} = 40\text{ cm}^2 \cdot 5 = 200\text{ cm}^2$$

3. Se calcula el área de cada una de las bases y luego el área total del tronco.

El área de cada una de estas bases es igual al semiperímetro de cada pentágono por la apotema correspondiente.

Área de la base menor: $A_1 = \dfrac{1}{2} \cdot 20\text{ cm} \cdot 2{,}8\text{ cm} = 28\text{ cm}^2$.

Área de la base mayor: $A_2 = \dfrac{1}{2} \cdot 30\text{ cm} \cdot 4{,}1\text{ cm} = 61{,}5\text{ cm}^2$.

$$\begin{aligned}\text{Luego, } A_{\text{total}} &= A_{\text{lateral}} + A_1 + A_2\\ &= 200\text{ cm}^2 + 28\text{ cm}^2 + 61{,}5\text{ cm}^2\\ &= 289{,}5\text{ cm}^2\end{aligned}$$

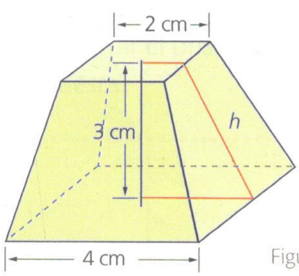


Figura 5.37

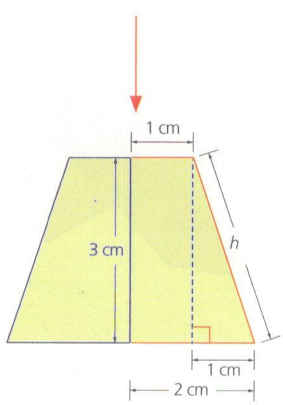


Figura 5.38

Ejemplo 5

Para hallar el área lateral del tronco de pirámide recta con bases cuadradas de la Figura 5.37, es necesario calcular el valor de h empleando el teorema de Pitágoras (Figura 5.38).

$$h^2 = (3\text{ cm})^2 + (1\text{ cm})^2 = 9\text{ cm}^2 + 1\text{ cm}^2 = 10\text{ cm}^2$$

$$h = \sqrt{10\text{ cm}^2} \Rightarrow h = 3{,}2\text{ cm}$$

Por lo tanto, $A_{\text{lateral}} = 4 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot (4\text{ cm} + 2\text{ cm}) \cdot 3{,}2\text{ cm} = 38{,}4\text{ cm}^2$.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Calcula el área total de cada uno de los prismas representados en las figuras 5.39 a 5.42.

a.

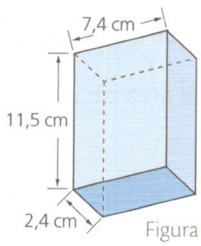


Figura 5.39

b.

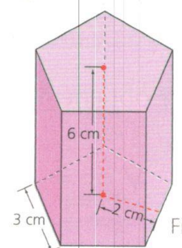


Figura 5.40

c.

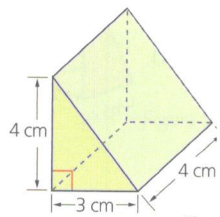


Figura 5.41

d.

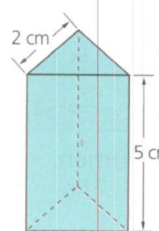


Figura 5.42

2 Calcula el área total de las siguientes pirámides.

a.

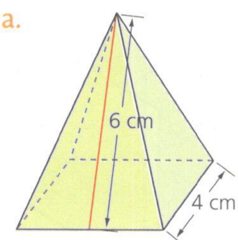


Figura 5.43

b.

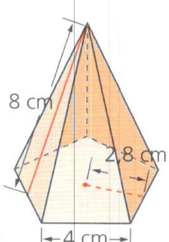


Figura 5.44

3 Halla el área total del tronco de pirámide regular representado en la Figura 5.45.

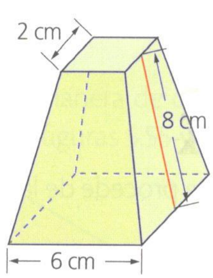


Figura 5.45

Resolución de problemas

4 Ricardo desea cambiar las baldosas que cubren las paredes y el piso de su piscina, que tiene la forma de un prisma rectangular de 11 m de largo, 5 m de ancho y 1 m de profundidad. Si cada metro cuadrado cuesta $ 28 000, ¿cuánto debe invertir Ricardo en la compra de las baldosas?

5 Carolina compra una caja de cartón cuya forma es la de un prisma rectangular de 15 cm de largo, 10 cm de ancho y 4 cm de altura. Si ella la desarma y halla su área lateral y su área total, ¿qué valores encuentra?

6 ¿Cuál es el precio del embalaje plástico para una caja de 0,8 m · 0,7 m · 0,6 m, si el valor de cada metro cuadrado de plástico es de $ 15 000?

Evaluación del aprendizaje

✓ El tejado de una casa tiene forma de pirámide cuadrangular, sin base. Un lado de su base mide 16 m y su altura es de 4 m (Figura 5.46). Se sabe que el tamaño de cada teja para cubrir el techo es de 2 m^2 y su precio es de $ 18 000.

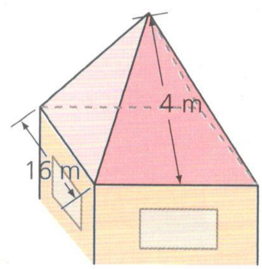


Figura 5.46

Supón que se compran diez tejas más de las necesarias para reemplazar las que se rompan.

a. ¿Cuántas tejas se necesitan para cubrir el techo?

b. ¿Cuántas tejas se compraron en total?

c. ¿Cuál es el costo total de las tejas que se compraron?

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

El cuerpo humano se puede modelar matemáticamente; por ejemplo, se puede representar en el sistema de coordenadas, hacer un modelo a escala, de manera proporcional, relacionar formas del cuerpo con cuerpos geométricos, etc. Describe de qué manera podrías "matematizar" tu cuerpo.

7 Volumen de poliedros

Saberes previos

Dibuja un prisma en tu cuaderno y señala sus elementos: caras, aristas y vértices, entre otros.

Analiza

Se planea la construcción de una edificación cuya forma se representa en la Figura 5.47.

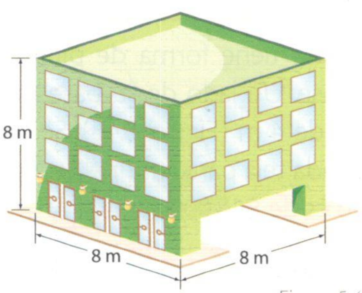


Figura 5.47

- ¿Cuál es el volumen de la edificación?

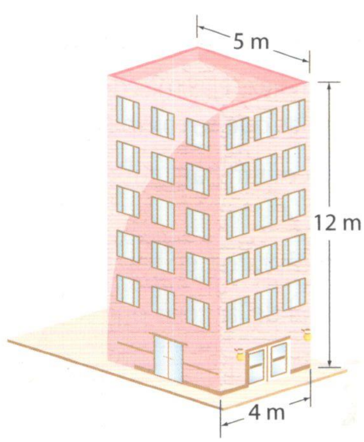


Figura 5.48

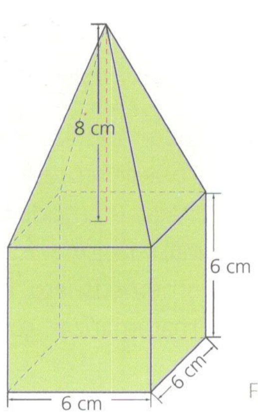


Figura 5.49

Conoce

7.1 Volumen de prismas

La construcción tiene forma de cubo. Para calcular el volumen de este prisma basta con determinar el número de unidades cúbicas que contiene.

El **volumen de un prisma** se obtiene multiplicando el área de la base (A_{base}) por la altura del mismo (h).

$$V_{prisma} = A_{base} \cdot h$$

Por lo tanto, el volumen del cubo que representa la construcción se calcula así:

$$\begin{aligned} V_{cubo} &= A_{base} \cdot h \\ &= (8 \text{ m} \cdot 8 \text{ m}) \cdot 8\text{m} \\ &= 512 \text{ m}^3. \end{aligned}$$

La edificación tiene 512 m^3 de volumen.

Ejemplo 1

Para calcular el volumen del edificio de la Figura 5.48, se reemplazan los valores correspondientes en la expresión $V_{prisma} = A_{base} \cdot h$.

$$\begin{aligned} V_{prisma} &= A_{base} \cdot h \\ &= (4 \text{ m} \cdot 5 \text{ m}) \cdot 12 \text{ m} \\ &= 240 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el volumen del edificio es 240 m^3.

7.2 Volumen de pirámides

El **volumen de una pirámide** es igual a la tercera parte del producto del área de su base (A_{base}) por su altura (h).

$$V_{pirámide} = \frac{(A_{base} \cdot h)}{3}$$

Ejemplo 2

Para calcular el volumen de la Figura 5.49, se procede de la siguiente manera.

1. Se calcula el volumen de la pirámide.

$$V_{pirámide} = \frac{(A_{base} \cdot h)}{3} = \frac{(6 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm}) \cdot 8 \text{ cm}}{3} = \frac{288 \text{ cm}^3}{3} = 96 \text{ cm}^3$$

2. Se calcula el volumen del cubo.

$$V_{cubo} = A_{base} \cdot h = (6 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm}) \cdot 6 \text{ cm} = 216 \text{ cm}^3$$

3. Se adicionan los volúmenes.

$$V_{total} = 96 \text{ cm}^3 + 216 \text{ cm}^3 = 312 \text{ cm}^3$$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Halla el volumen de los siguientes sólidos.

a.

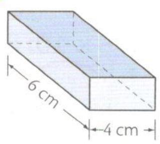


Figura 5.50

b.

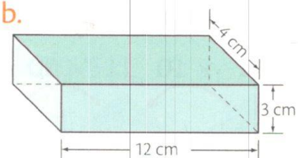


Figura 5.51

c.

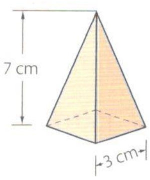


Figura 5.52

d.

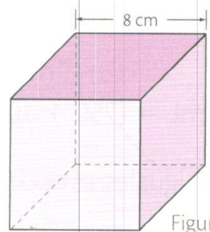


Figura 5.53

Ejercitación

2 Observa los cubos de la Figura 5.54 y contesta.

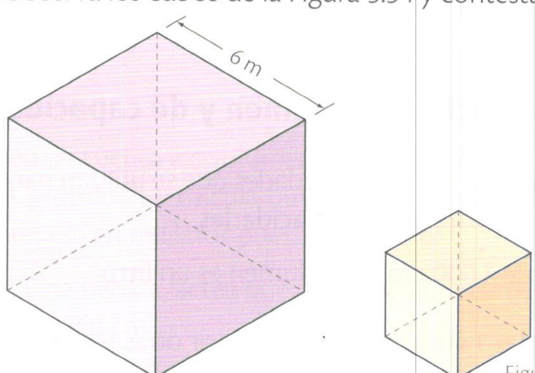


Figura 5.54

a. ¿Cuál es el volumen del cubo grande?

b. Si la arista del cubo pequeño es la mitad de la arista del grande, ¿cuál es el volumen del cubo pequeño?

3 Encuentra la manera de calcular el volumen de los sólidos de las figuras 5.55 y 5.56.

a.

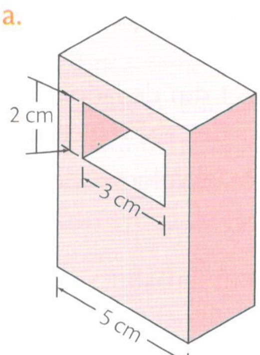


Figura 5.55

b.

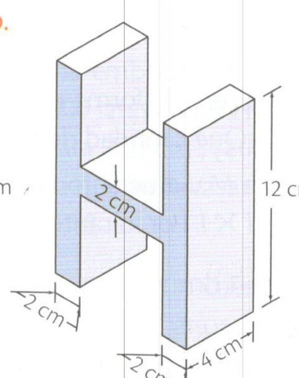


Figura 5.56

Resolución de problemas

4 Se van a empacar en una caja 40 estuches en forma de prisma rectangular de 10 cm de ancho,15 cm de largo y 4 cm de alto. ¿Cuáles pueden ser las dimensiones de la caja?

5 Una fábrica produce velas de parafina con la forma y las dimensiones que aparecen en la Figura 5.57.

Para fabricar las velas se derriten barras de parafina de 30 cm de alto, 15 cm de ancho y 60 cm de largo.

a. ¿Cuál es el volumen de cada vela?

b. ¿Cuál es el volumen de una barra de parafina?

c. ¿Cuántas velas igualan el volumen de una barra de parafina?

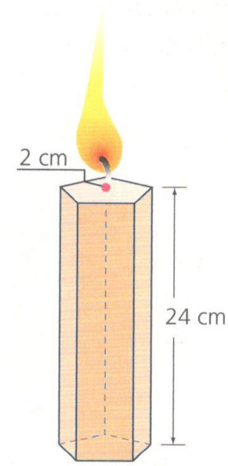


Figura 5.57

Evaluación del aprendizaje

Calcula el volumen de los siguientes prismas.

a.

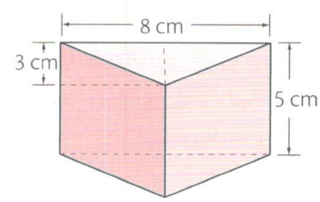


Figura 5.58

b.

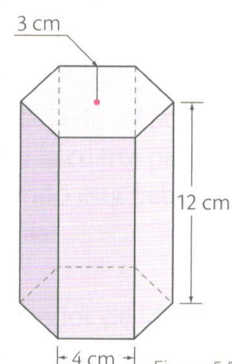


Figura 5.59

c.

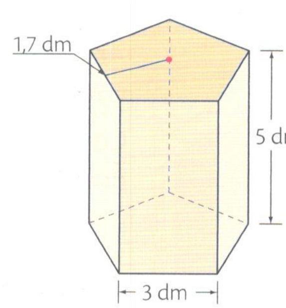


Figura 5.60

d.

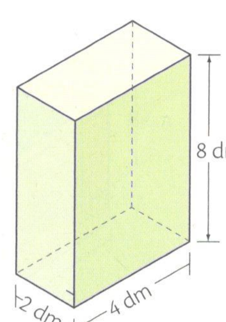


Figura 5.61

8 Unidades de capacidad

Saberes previos

Supón que dispones de los baldes que ves en la Figura 5.62 para medir cierta cantidad de agua.

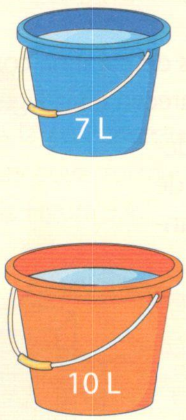


Figura 5.62

¿Cómo puedes medir 4 L de agua?

Analiza

Una jarra de agua tiene una capacidad de 750 mL y se van a llenar vasos de 3 cL. ¿Cuántos vasos se llenarán con dos jarras iguales?

Conoce

Antes de resolver la situación, es importante recordar las unidades de capacidad y sus equivalencias. Observa la Figura 5.63.

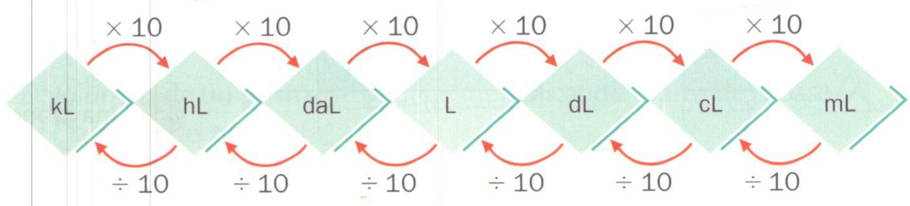


Figura 5.63

Según lo anterior:

$$750 \text{ mL} = (750 \div 10) \text{ cL} = 75 \text{ cL}$$

De modo que con dos jarras iguales, es decir con $75 \text{ cL} \times 2 = 150 \text{ cL}$ se llenarán:

$$150 \text{ cL} \div 3 \text{ cL} = 50 \text{ vasos}$$

Para **transformar unidades de capacidad** en unidades inferiores o superiores, se multiplica o se divide sucesivamente por 10.

8.1 Relación entre unidades de volumen y de capacidad

Se puede establecer una relación entre las unidades que se utilizan para medir **volúmenes** y las unidades para medir **capacidades**.

La capacidad de un cubo de **1 000 cm³** de volumen es un **litro**.

A partir de la relación $1 \text{ dm}^3 = 1$ litro, se pueden deducir otras relaciones entre unidades de volumen y de capacidad.

Observa el Figura 5.64.

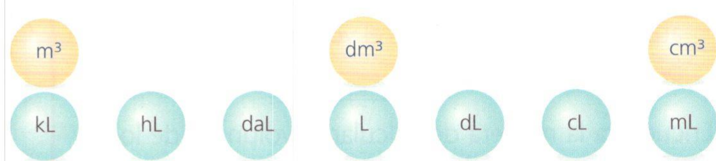


Figura 5.64

Ejemplo

Ana María tiene una pecera de forma cúbica de 1 dm de lado. ¿Cuál es el volumen de la pecera? ¿Qué cantidad de agua puede caber en ella?

Como la pecera de Ana María tiene forma cúbica, el volumen se halla mediante el producto $l \times l \times l$. Por lo tanto,

$$V = 1 \text{ dm} \times 1 \text{ dm} \times 1 \text{ dm} = 1 \text{ dm}^3$$

La pecera tiene un volumen de 1 dm^3.

Por lo tanto, en la pecera de Ana María cabe un litro de agua.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Pasa las siguientes medidas a centímetros cúbicos.

a. 5 L
b. 0,05 L
c. 8 cL
d. 0,0075 kL
e. 1 L
f. 1 cL
g. 1 mL
h. 500 dL

2 Expresa en litros las medidas de volumen.

a. 2 000 cm^3
b. 3,5 dm^3
c. 1 500 mm^3
d. 58 m^3
e. 10 dm^3
f. 1 000 cm^3

3 Expresa estas medidas de capacidad en decímetros cúbicos.

a. 1 L
b. 1 kL
c. 500 cL
d. 1 000 mL

Modelación

4 Ten en cuenta los volúmenes de los recipientes que se proponen y calcula qué cantidad de líquido expresada en mililitros pueden contener.

a. Una bebida láctea que contiene un volumen de 260 cm^3.

b. Un garrafón de agua que tiene capacidad para 12 botellas, cada una de 0,8 dm^3.

c. Una tina de baño que cuando se llena de agua ocupa un volumen de 45 dm^3.

d. Una pecera que tiene 80 cm de largo, por 60 cm de ancho y una altura de 25 cm.

Resolución de problemas

5 Una fábrica tiene una máquina embotelladora de gaseosa que puede envasar 1 200 latas en una hora. Si cada lata tiene capacidad para 330 cm^3, ¿cuál es la cantidad de litros de gaseosa que se envasan por hora con ayuda de esta máquina?

6 En una ciudad el metro cúbico de agua cuesta $ 2 250,75. Una familia gasta unos 400 L diarios. ¿Cuál es el precio aproximado que paga cada bimestre esta familia por el consumo de agua?

7 El tanque de una motocicleta que tiene una capacidad de 5 L se llena completamente. Si en un viaje se consumen $\frac{3}{4}$ partes del combustible, ¿cuántos centímetros cúbicos quedan en el tanque?

8 Un barco transporta 275 000 m^3 de petróleo. ¿A cuántos camiones cisterna puede abastecer si cada uno de ellos tiene una capacidad de 150 hL?

Evaluación del aprendizaje

i Observa la Figura 5.65.

Por 100 mL	
Proteínas	3,3 g
Azúcares	2,8 g
Grasas	1,9 g
Fibra	0,6 g
Sodio	50 mg
Calcio	120 mg
Vitaminas	0,25 mg

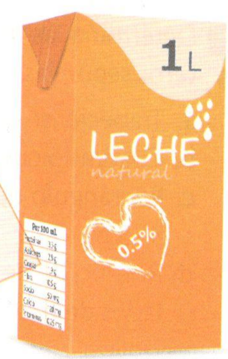


Figura 5.65

a. Indica la cantidad de cada nutriente que hay en un vaso de 250 mL y en una botella de un litro de esta bebida.

b. La cantidad diaria recomendada de calcio es de 800 mg. Si se quiere cubrir la cuarta parte de dicha cantidad consumiendo esta bebida, ¿cuánto se deberá tomar al día?

ii Calcula la capacidad del contenedor de la Figura 5.66 en mililitros y el volumen que ocupa la parte material con que está fabricado.

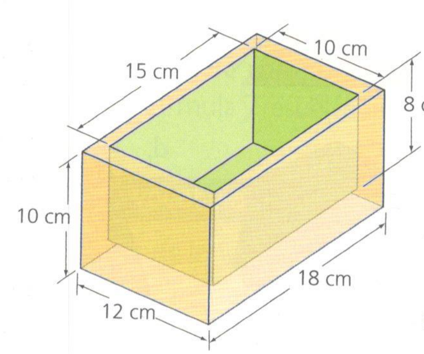


Figura 5.66

Practica más

Unidades de longitud y perímetro de figuras

Ejercitación

1 Halla el perímetro de las Figuras 5.67 y 5.68. Escribe cada respuesta en metros y en centímetros.

a.

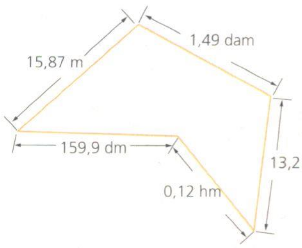


Figura 5.67

b.

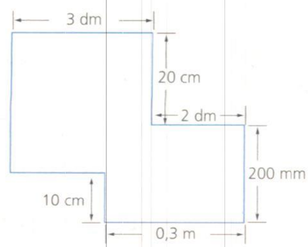


Figura 5.68

Razonamiento

2 Determina las medidas de los lados de los cuadriláteros según las condiciones dadas.

a. Trapecio isósceles de perímetro 216 m.
b. Cuadrado cuyo perímetro es 16,8 dm.
c. Rectángulo de 1,2 dam de largo y perímetro de 45,5 m.
d. Romboide de perímetro 230 dm y dos de sus lados de medida 8,4 cm.

Unidades de superficie y área de figuras planas

Ejercitación

3 Completa la Tabla 5.5

km²	hm²	m²	dm²	cm²
0,00146			1 460	

Tabla 5.5

4 Calcula el área de las figuras 5.69 a 5.72.

a.

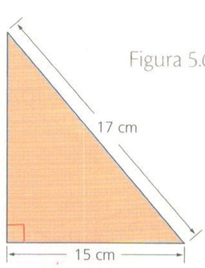


Figura 5.69

b.

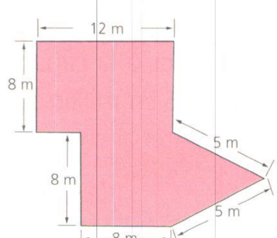


Figura 5.70

c.

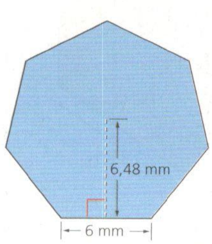


Figura 5.71

d.

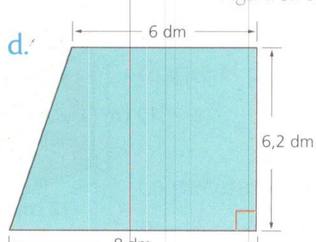


Figura 5.72

Longitud de la circunferencia

Ejercitación

5 Calcula la longitud de cada circunferencia teniendo en cuenta el radio o el diámetro dado.

a. $r = 18$ cm
b. $r = 0{,}5$ m
c. $d = 18{,}2$ km
d. $d = 29{,}4$ m

Área de prismas y pirámides

Ejercitación

6 Calcula el área lateral y el área total de cada sólido.

a.

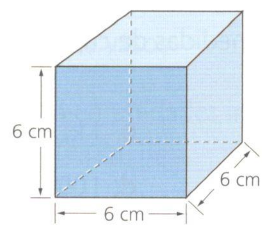


Figura 5.73

b.

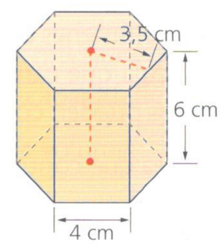


Figura 5.74

c.

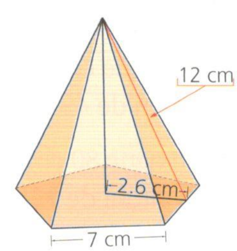


Figura 5.75

Volumen de poliedros

Ejercitación

7 Determina el volumen del sólido de la Figura 5.76.

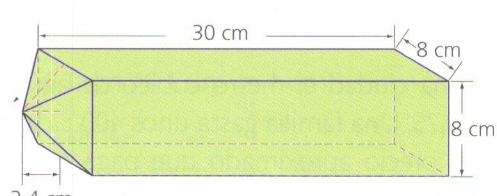


Figura 5.76

Resolución de problemas

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Estrategia: Unificar unidades de medida

Problema

Un centro comercial ha dispuesto un espacio rectangular de 72 m^2 para poner un salón de juegos. Si se quiere cubrir el piso con baldosas cuadradas de 50 cm de lado, ¿cuántas baldosas se requieren?

1. Comprende el problema

- ¿En qué unidades están expresadas las medidas que proporciona el problema?

  R: El área del salón está expresada en m^2 y el lado de cada baldosa está expresado en cm.

- ¿Qué se pide encontrar?

  R: El número de baldosas necesarias para cubrir el piso del salón de juegos.

2. Crea un plan

- Halla el área de cada baldosa; luego, expresa esta medida y el área del salón de juegos en la misma unidad de medida. Finalmente, realiza las operaciones necesarias para resolver el problema.

3. Ejecuta el plan

- Calcula el área de una baldosa.

$$50 \text{ cm} \cdot 50 \text{ cm} = 2\,500 \text{ cm}^2$$

- Expresa el área del salón en cm^2.

$$72 \text{ m}^2 = 72 \cdot 100 \cdot 100 = 720\,000 \text{ cm}^2$$

- Divide el área del salón entre el área de cada baldosa.

$$720\,000 \text{ cm}^2 \div 2\,500 \text{ cm}^2 = 288$$

R: Se necesitan 288 baldosas para embaldosar por completo el piso del salón de juegos.

4. Comprueba la respuesta

- Expresa el área de una baldosa en metros cuadrados y comprueba que se obtiene la misma cantidad de baldosas.

Aplica la estrategia

1 En una bodega rectangular de área 120 m^2 se almacenan 25 mesas de ping-pong de las dimensiones que se muestran en la Figura 5.77.

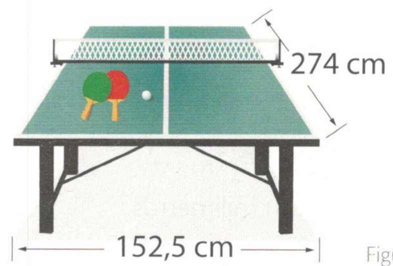


Figura 5.77

Si las mesas están organizadas una al lado de la otra sin dejar espacio entre ellas, ¿qué área de la bodega está libre de las mesas de ping-pong?

a. Comprende el problema

b. Crea un plan

c. Ejecuta el plan

d. Comprueba la respuesta

Resuelve otros problemas

2 Las mesas de un restaurante tienen forma de hexágono regular de 80 cm de lado. ¿Cuántos metros cuadrados de tela se requieren para confeccionar cinco manteles semejantes a la forma de las mesas y cuyo lado mida 40 cm más?

Formula problemas

3 Representa una figura compuesta por diversas figuras planas, formula y resuelve un problema a partir de ella.

Enriquece tu vocabulario

- Hay unidades de longitud que empiezan por:

  deci- centi- kilo-

¿Qué significan? ¿Qué diferencia hay entre ellas?

Evaluación del aprendizaje

Unidades de longitud

Ejercitación

1 Expresa cada medida en la unidad indicada.

ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

a. 2,3 km en metros
b. 200 cm en hectómetros
c. 48,32 dam en milímetros
d. 2 cm en metros
e. 68,123 hm en milímetros
f. 15,3 dm en milímetros
g. 28,58 m en decámetros

Resolución de problemas

2 Las torres gemelas de Kuala Lumpur tienen una altura de 4,52 hm cada una.

ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

a. ¿Cuál es la altura de estas torres en metros?
b. ¿Cuánto suma la altura de las dos torres en decámetros?

Perímetro de figuras planas

Ejercitación

3 Expresa el perímetro de las siguientes figuras en metros.

ACTIVIDAD DE REFUERZO

a.

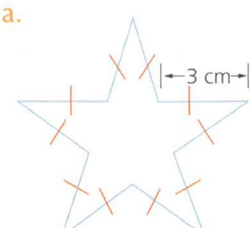


Figura 5.78

b.

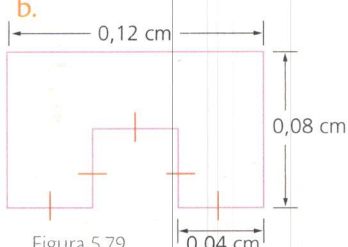


Figura 5.79

c.

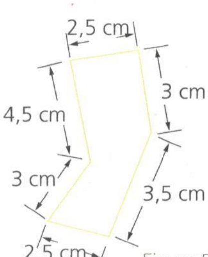


Figura 5.80

d.

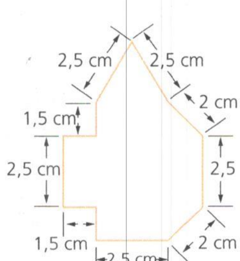


Figura 5.81

Resolución de problemas

4 Observa las dimensiones de la cancha de baloncesto de un colegio en la siguiente figura.

ACTIVIDAD DE REFUERZO

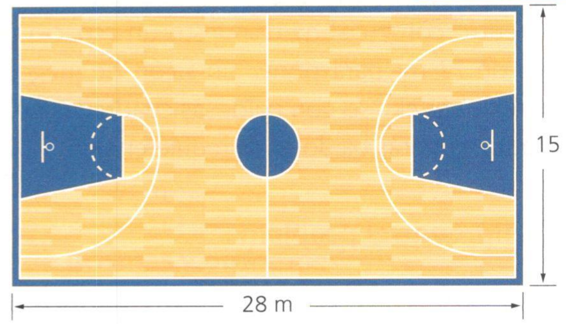


Figura 5.82

¿Cuál es el perímetro de la cancha de baloncesto en metros y en centímetros?

Unidades de superficie

Ejercitación

ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

5 Completa las siguientes igualdades.

a. $180\ cm^2 =$ ____ m^2
b. $32\ hm^2 =$ ____ dm^2
c. $12{,}4\ km^2 =$ ____ dam^2
d. $78{,}65\ mm^2 =$ ____ cm^2
e. $3\,216\ m^2 =$ ____ hm^2
f. $158{,}2\ dm^2 =$ ____ dam^2

Área de figuras planas

Ejercitación

6 Calcula el área de un heptágono regular que tiene 10 cm de lado.

ACTIVIDAD DE REFUERZO

7 Calcula el área de un octágono regular que tiene 30 cm de lado.

ACTIVIDAD DE REFUERZO

Resolución de problemas

8 ¿Cuál es el área de un parque rectangular que tiene 10,5 m de largo por 800 cm de ancho?

ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

9 La ventana de una casa tiene forma de romboide, como se muestra en la figura. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

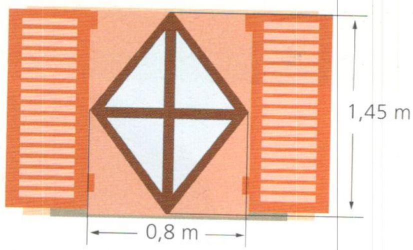


Figura 5.83

¿Cuál es el área de la ventana?

Longitud de la circunferencia

Ejercitación

10 Calcula la longitud de la circunferencia de acuerdo con el dato dado. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $r = 8{,}4$ cm

b. $d = 25{,}9$ m

Comunicación

11 Encuentra el perímetro de las siguientes figuras. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a.

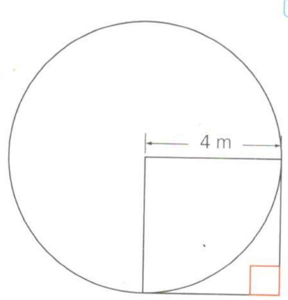


Figura 5.84

b.

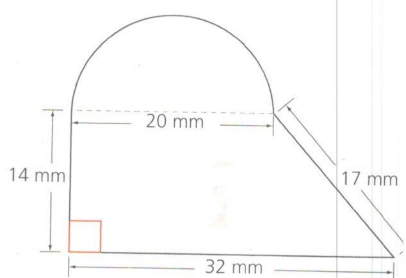


Figura 5.85

c.

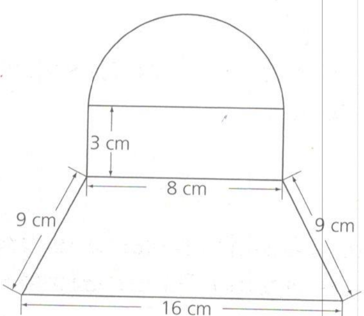


Figura 5.86

Área de prismas y pirámides

Ejercitación

12 Calcula el área total del tronco de pirámide cuadrada de la Figura 5.87. ACTIVIDAD DE REFUERZO

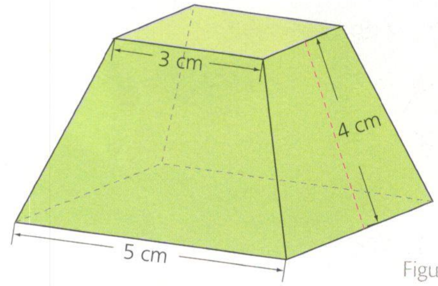


Figura 5.87

Volumen de poliedros

Ejercitación

13 Halla cada volumen y completa. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

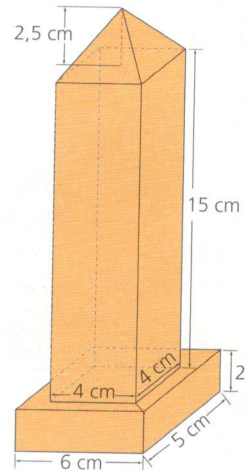


Figura 5.88

a. Volumen de la pirámide = ☐

b. Volumen del prisma cuadrado = ☐

c. Volumen del prisma rectangular = ☐

d. Volumen total = ☐

Unidades de capacidad

Resolución de problemas

14 Se dispone de un recipiente como el de la Figura 5.89. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

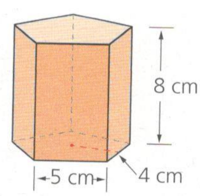


Figura 5.89

¿Cuántos litros de agua caben en el recipiente?

6 Estadística y probabilidad

Ya sabemos

- Aplicar los conceptos básicos de estadística y probabilidad en situaciones cotidianas.

Vamos a aprender

- A analizar, interpretar y representar las medidas de tendencia central.

Nos sirve para

- Analizar la información a la que se accede por distintos medios.

1 Población, muestra y variables

Saberes previos

¿En qué situaciones has escuchado que las personas utilizan la expresión "estudio estadístico"? Describe tres ejemplos.

Analiza

Se quiere saber cuál es el deporte favorito de los estudiantes de un colegio. Para ello se escogió un grupo de estudiantes y se hizo una encuesta

- ¿Qué aspectos se deben tener en cuenta para llevar a cabo el estudio?

Conoce

Situaciones como esta constituyen el campo de estudio de la estadística. La *estadística* es la ciencia que permite recoger, ordenar, analizar e interpretar un conjunto de datos para obtener conclusiones a partir de ellos. Cuando se lleva a cabo un estudio estadístico, se deben tener en cuenta aspectos tales como la población, la muestra y las variables, entre otros.

Población. Conjunto de elementos sobre el se quiere conocer un aspecto, característica o comportamiento.

Muestra. Es una parte representativa de la población sobre la que se realiza el estudio estadístico.

Variables. Son cada uno de los aspectos susceptibles de ser estudiados.

En el caso presentado, los estudiantes del colegio conforman la población, el grupo escogido para la encuesta se denomina muestra, y el deporte elegido por cada uno es la variable. El trabajo estadístico permite conocer el comportamiento y las características de una población para obtener conclusiones y tomar decisiones.

1.1 Variables estadísticas

Las variables que se analizan en un estudio estadístico se clasifican como se observa en la Figura 6.1.

Tipos de variables

- **Cuantitativas**
  Aquellas que se pueden medir o expresar numéricamente.
  - **Discretas**
    Se expresan con un número entero. Por ejemplo, el número de hermanos.
  - **Continuas**
    Cuando la variable toma cualquier valor en un intervalo numérico de manera continua. Ejemplo: la estatura y el peso de una persona.
- **Cualitativas**
  Son características o que miden los gustos o las preferencias de una población. Por ejemplo, el género, el color de la piel, etc.

Figura 6.1

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Identifica la población, la muestra y la variable en cada uno de los siguientes casos.

a. Se quiere averiguar el número de habitantes de todos los municipios de Cundinamarca.

b. Se desea analizar el peso de los bebés que nacen en un hospital del sur de la ciudad.

c. Se quiere conocer el color preferido de los estudiantes de un colegio.

d. Se desea analizar el porcentaje de trabajadores que ganan un salario mínimo en la ciudad de Pasto.

e. Se quiere averiguar el número de niños y de niñas en edad escolar que hay en una ciudad.

f. Se desea averiguar la edad de los estudiantes de la jornada nocturna que hay en un barrio.

g. Se quiere averiguar cuál es la fruta preferida de los niños de un jardín infantil.

Ejercitación

2 Clasifica cada variable.

a. El género de un número de personas de un colegio.

b. La estatura de los estudiantes de séptimo grado.

c. El estado civil de los habitantes de un edificio.

d. Los kilómetros recorridos por dos atletas en una competencia.

e. El color preferido por las niñas de un colegio.

f. La talla del uniforme de los estudiantes de noveno grado.

g. El programa de televisión preferido.

3 Clasifica las variables cuantitativas en continuas o discretas, según corresponda.

a. Edad

b. Peso

c. Número de hijos

d. Número de mascotas

e. Estatura

f. Puntaje en una competencia

Modelación

4 Completa los elementos que faltan. Redacta una situación estadística para cada caso.

a.

Variable:	Color del cabello
Muestra:	35 niños de primero de primaria
Población:	

b.

Variable:	
Muestra:	200 personas mayores de edad
Población:	habitantes de Bogotá

Evaluación del aprendizaje

✓ Federico quiere hacer un estudio estadístico para determinar la cantidad de dinero del que disponen los estudiantes de un colegio para comprar en la hora de descanso. Para ello, elabora una encuesta y la aplica a seis estudiantes de cada salón.

a. ¿Cuál es la población de este estudio?

b. ¿Cuál es la muestra?

c. ¿Cuál es la variable?

d. ¿Qué tipo de variable es?

e. Escribe algunos de los datos que pudo haber recolectado Federico.

f. ¿En qué se podrían utilizar los resultados de este estudio?

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Los proyectos de vida son construcciones que se hacen con otras personas, ya sean familiares, amigos o personas cercanas. Su objetivo es alcanzar un bienestar propio y de la población a la que se pertenece. ¿Quiénes forman parte de tu proyecto de vida?, ¿cómo te beneficias y cómo se benefician los demás con tu proyecto? ¿Qué variables cualitativas hacen parte de tu proyecto?

2 Distribución de frecuencias

Saberes previos

Llevar registros sobre la variación de la temperatura es una tarea que permite predecir y analizar el comportamiento de este factor. ¿Cómo ayuda la recolección, organización y análisis de datos en el estudio del comportamiento de la temperatura?

Analiza

Durante el mes de febrero de 2015, se registraron las siguientes temperaturas máximas (en grados centígrados):

19, 19, 18, 16, 22, 18, 18, 17, 18, 17, 19, 18, 20, 20, 20, 24, 22, 21, 20, 29, 29, 21, 22, 19, 18, 11, 20, 20.

- ¿Cuántas veces se repitió cada temperatura durante ese mes?

Conoce

2.1 Frecuencia absoluta

Para saber cuántas veces se repitió la temperatura en el mes de febrero conviene hacer una tabla.

Temperatura	Conteo	Total de días
11	/	1
16	/	1
17	//	2
18	///// /	6
19	////	4
20	///// /	6
21	//	2
22	///	3
24	/	1
29	//	2

Tabla 6.1

La **frecuencia absoluta** de un dato es el número de veces que este se repite dentro del conjunto de valores de la variable estadística.

Ejemplo 1

En la Tabla 6.1 las frecuencias absolutas de cada temperatura se muestran en la tercera columna.

Por ejemplo, la frecuencia absoluta de las temperaturas 11 °C, 19 °C, 24 °C y 29 °C son, en forma respectiva, 1, 4, 1 y 2.

Ejemplo 2

Se preguntó a un grupo de 25 personas acerca de su mascota preferida y se obtuvieron las siguientes respuestas.

Pez	Perro	Pez	Perro	Gato
Gato	Pez	Perro	Pez	Pez
Perro	Pájaro	Pez	Gato	Perro
Pájaro	Perro	Gato	Pájaro	Pájaro
Gato	Gato	Pez	Perro	Pez

Para analizar la variable "mascota preferida" es conveniente construir una **tabla de frecuencias** y determinar la frecuencia absoluta de cada dato. (Tabla 6.2)

Mascota	Frecuencia absoluta
Gato	6
Pez	8
Perro	7
Pájaro	4

Tabla 6.2

2.2 Frecuencia relativa

La **frecuencia relativa** de un dato es aquella que se obtiene como el cociente entre su frecuencia absoluta y el número total de datos.

La frecuencia relativa se puede expresar en forma de fracción, como un número decimal o como un porcentaje.

Ejemplo 3

En la Tabla 6.3 se observan las frecuencias relativas de los datos obtenidos en el Ejemplo 2 acerca de la "mascota preferida".

Mascota	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa		
		Fracción	Número decimal	Porcentaje
Gato	6	$\frac{6}{25}$	0,24	24%
Pez	8	$\frac{8}{25}$	0,32	32%
Perro	7	$\frac{7}{25}$	0,28	28%
Pájaro	4	$\frac{4}{25}$	0,16	16%

Tabla 6.3

Ejemplo 4

De una urna con bolas numeradas del 1 al 6 (Figura 6.2) se extrae una, se anota el número que muestra y se deposita de nuevo en la urna.

Luego de haber realizado el experimento 50 veces, se obtuvo la Tabla 6.4.

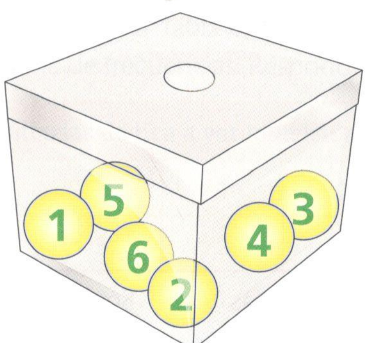


Figura 6.2

Número	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa		
		Fracción	Número decimal	Porcentaje
1	8	$\frac{8}{50}$	0,16	16%
2	9	$\frac{9}{50}$	0,18	18%
3	7	$\frac{7}{50}$	0,14	14%
4	10	$\frac{10}{50}$	0,20	20%
5	7	$\frac{7}{50}$	0,14	14%
6	9	$\frac{9}{50}$	0,18	18%

Tabla 6.4

Por un lado, la suma de las frecuencias absolutas es 50, la suma de las fracciones de las frecuencias relativas es $\frac{50}{50}$, la de los números decimales es 1,00 y la de los porcentajes es 100%.

Por otro lado, la mayor frecuencia absoluta es 10 y corresponde al número 4, en tanto que la menor frecuencia (7) corresponde a los números 3 y 5.

La mayor frecuencia relativa es 0,20 o 20%, que corresponde al número 4.

2.3 Frecuencia acumulada

La **frecuencia acumulada** es la suma de la frecuencia absoluta de un dato con todas las frecuencias absolutas de los datos que le preceden.

Ejemplo 5

En la Tabla 6.5 se representan las frecuencias acumuladas de los datos obtenidos en el caso de la "mascota preferida".

Mascota	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada
Gato	6	6
Pez	8	14
Perro	7	21
Pájaro	4	25

Tabla 6.5

Ejemplo 6

Los datos de la izquierda corresponden a la cantidad de horas diarias que un grupo de personas practica deporte.

4	5	3	4	4	5	4
4	4	5	5	3	5	3
3	5	5	3	3	2	4
	1	2	2	1		

La Tabla 6.6 organiza la información de acuerdo con las frecuencias de los datos.

Horas que practican deporte	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa			Frecuencia acumulada
		Fracción	Número decimal	Porcentaje	
1	2	$\frac{2}{25}$	0,08	8%	2
2	3	$\frac{3}{25}$	0,12	12%	5
3	6	$\frac{6}{25}$	0,24	24%	11
4	7	$\frac{7}{25}$	0,28	28%	18
5	7	$\frac{7}{25}$	0,28	28%	25

Tabla 6.6

Ejemplo 7

Los datos de la izquierda corresponden a las respuestas de un grupo de estudiantes al que se le preguntó por su materia preferida.

Ciencias	Sociales
Ciencias	Ciencias
Matemáticas	Matemáticas
Inglés	Matemáticas
Sociales	Inglés
Ética	Ciencias
Ética	Matemáticas
Sociales	Sociales
Matemáticas	Ciencias
Inglés	Ciencias

En la Tabla 6.7 se presentan la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa de cada dato, así como la frecuencia acumulada.

Asignatura	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa			Frecuencia acumulada
		Fracción	Número decimal	Porcentaje	
Matemáticas	5	$\frac{5}{20}$	0,25	25%	5
Sociales	4	$\frac{4}{20}$	0,20	20%	9
Ciencias	6	$\frac{6}{20}$	0,30	30%	15
Inglés	3	$\frac{3}{20}$	0,15	15%	18
Ética	2	$\frac{2}{20}$	0,10	10%	20

Tabla 6.7

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Construye, a partir de los datos, una tabla con las frecuencias absolutas, relativas y acumuladas.

El número de veces al mes que Ana asistió al teatro en un año fue:

4 2 1 2 4 1 3 2 1 3 3 4

Razonamiento

2 Lanza 18 veces una moneda al aire y halla la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa teniendo en cuenta que los resultados pueden ser cara o sello.

3 Organiza en una tabla de frecuencias los siguientes datos acerca del género de cine preferido.

Drama	Acción	Suspenso	Comedia
Acción	Drama	Acción	Drama
Acción	Comedia	Drama	Drama
Comedia	Drama	Drama	Acción
Acción	Acción	Comedia	Acción

Modelación

4 Copia en tu cuaderno la Tabla 6.8. Complétala.

Color favorito	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa
Amarillo	5		
Azul	8		
Rojo	6		
Verde	7		
Morado	2		

Tabla 6.8

Razonamiento

5 Organiza los siguientes datos en una tabla de frecuencias. Responde las preguntas.

Número de goles anotados por cada equipo participante en un torneo de fútbol

28	25	25	24	23	22
26	27	26	28	22	23
22	25	26	27	28	22
23	24	22	26	28	27

a. ¿Qué tipo de variable se observó?

b. ¿Cuántos equipos anotaron 24 goles o menos?

c. ¿Cuántos goles de diferencia hay entre el equipo más goleador y el menos efectivo?

6 Completa la Tabla 6.9 escribiendo la frecuencia relativa como porcentaje. Finalmente, responde las preguntas.

Valoraciones finales de matemáticas del segundo periodo			
Valoración	Frecuencia	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa
50	2		
60	6		
70	15		
80	12		
90	5		

Tabla 6.9

a. ¿Cuántos estudiantes tiene el grupo?

b. ¿Qué porcentaje de estudiantes obtuvo una valoración igual o inferior a 70?

c. ¿Qué porcentaje de estudiantes obtuvo una valoración exactamente igual a 80?

Resolución de problemas

7 Observa la información de la Tabla 6.10. Elabora la correspondiente tabla de frecuencias. Responde.

¿Cuántas horas diarias dedica a ver televisión?				
2	2	3	1	2
6	3	5	2	3
1	4	3	1	3
3	2	3	4	2
5	6	1	3	4

Tabla 6.10

a. ¿Qué tipo de variable hay en este ejercicio?

b. Escribe tres conclusiones de esta información.

Evaluación del aprendizaje

Realiza un estudio entre tus compañeros acerca del deporte de su preferencia.

Construye la correspondiente tabla de frecuencias. Expresa la frecuencia relativa en forma de porcentaje. ¿Qué porcentaje representa el deporte que prefieren tus compañeros?

3 Gráficas estadísticas

Saberes previos

Supón que se quiere obtener información acerca de los géneros musicales preferidos por los estudiantes de séptimo grado. ¿Qué podrías hacer para recoger esta información? ¿De qué forma podrías representar los datos?

Analiza

En grado undécimo se realizó una encuesta sobre el destino preferido para realizar la excursión de fin de año. En la Tabla 6.11 se presentan los resultados obtenidos.

Posibles destinos de excursión	Votos
San Andrés	5
Amazonas	9
Eje Cafetero	7
Costa Atlántica	10

Tabla 6.11

- ¿Representa gráficamente la información.

Conoce

La información que se recogió en la encuesta puede representarse con una gráfica de barras, cuyas alturas son proporcionales a las frecuencias absolutas.

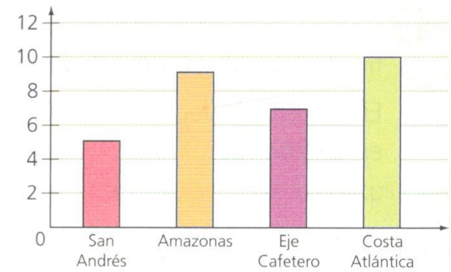


Figura 6.3

Una gráfica o un **diagrama de barras** se utiliza para presentar datos cualitativos o datos cuantitativos de tipo discreto. En el eje horizontal se ubican las variables. En el eje vertical, las frecuencias.

Para representar datos de variables cualitativas o cuantitativas discretas también es útil el uso de **gráficas** o **diagramas circulares**. Este tipo de diagramas distribuye la superficie de un círculo en sectores de amplitud proporcional a la **frecuencia relativa** de cada dato.

Ejemplo 1

En la Tabla 6.12 se muestran los datos obtenidos sobre las preferencias deportivas de un grupo de 127 estudiantes. Para calcular la amplitud del ángulo central que le corresponde a cada dato en un diagrama circular, se multiplica cada frecuencia relativa (h_i) por 360°. La Figura 6.4 presenta el diagrama circular correspondiente al estudio.

Deporte	f_i	h_i	Medida del ángulo central
Fútbol	43	0,339	$0{,}339 \cdot 360° = 122°$
Atletismo	27	0,212	$0{,}212 \cdot 360° = 76°$
Baloncesto	14	0,110	$0{,}110 \cdot 360° = 40°$
Natación	31	0,244	$0{,}244 \cdot 360° = 88°$
Ciclismo	12	0,094	$0{,}094 \cdot 360° = 34°$

Tabla 6.12

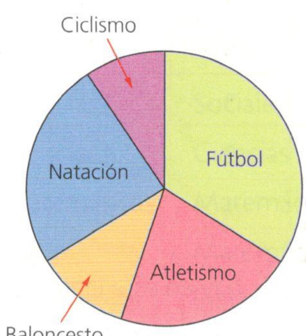


Figura 6.4

Los **gráficos** o **diagramas de líneas** muestran un conjunto de puntos conectados mediante una sola línea. Estos gráficos se usan principalmente para mostrar las variaciones de una o más variables estadísticas con respecto al cambio de otra variable, que usualmente es el tiempo.

Ejemplo 2

La Tabla 6.13 presenta la variación del número de estudiantes matriculados en los primeros grados de los colegios de cierta localidad desde 1995 hasta 2011, y la Figura 6.5 muestra el diagrama de líneas correspondiente.

	1.°	2.°	3.°
1995	25	75	140
1999	35	85	90
2003	35	155	250
2007	70	105	65
2011	120	125	175

Tabla 6.13

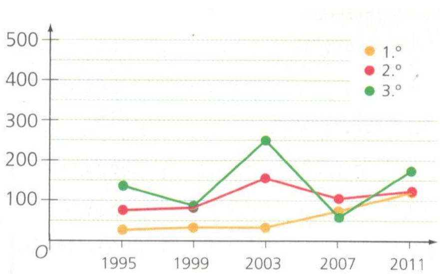


Figura 6.5

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Escribe tres conclusiones que puedas obtener a partir de los gráficos de las figuras 6.6 y 6.7.

a.

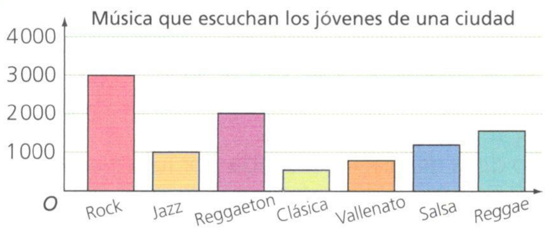


Figura 6.6

b.

Figura 6.7

Comunicación

2 Representa en un diagrama circular los datos que se muestran en la Tabla 6.14, correspondientes al número de órganos donados en un país durante el año 2010.

Órgano	Número de órganos donados
Riñón	2 794
Hígado	1 302
Corazón	324
Pulmón	157

Tabla 6.14

3 Elabora un diagrama de líneas con las temperaturas promedio de los últimos seis meses del año 2014 en Cali, Medellín y Bogotá que se registran en la Tabla 6.15.

	Cali	Medellín	Bogotá
Julio	28° C	25° C	16° C
Agosto	23° C	22° C	14° C
Septiembre	26° C	22° C	14° C
Octubre	25° C	24° C	12° C
Noviembre	23° C	21° C	10° C
Diciembre	28° C	26° C	13° C

Tabla 6.15

Razonamiento

4 Construye una gráfica circular para mostrar la siguiente información.

Nuestro sistema solar tiene ocho planetas, de los cuales cuatro son de tipo rocoso, es decir, están formados por roca y metal: Mercurio, Venus, Tierra y Marte. Los otros cuatro planetas son de tipo gaseoso, lo que significa que están compuestos por gases muy densos en su atmósfera. A este último tipo corresponden: Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno.

Evaluación del aprendizaje

✓ Construye una tabla en la que se represente el número de personas, el porcentaje y el ángulo correspondiente a cada deporte a partir de los datos del diagrama circular de la Figura 6.8. Ten en cuenta que el total de las personas encuestadas es 200.

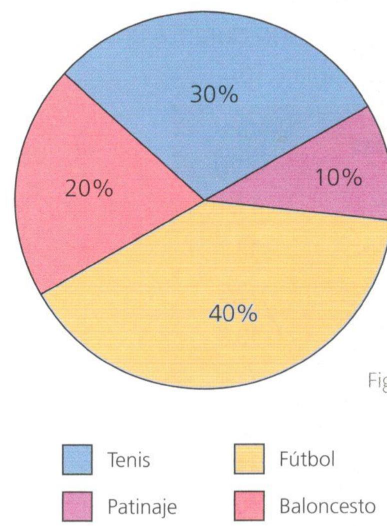


Figura 6.8

Estilos de vida saludable

Pregunta a tus compañeros por el número de veces a la semana que practican deporte. Las opciones de respuesta pueden ser: "Regularmente", "A veces" y "Nunca". Elabora un diagrama de barras para representar los resultados. Según las respuestas, ¿podrías afirmar que tus compañeros practican deporte como un estilo de vida saludable? ¿Por que?

4 Medidas de tendencia central

Saberes previos

En uno de los periódicos del país se publicó la siguiente nota: "No podemos contentarnos con un pobre Internet. En Colombia, a pesar de los notables avances en la penetración de este servicio, la velocidad está lejos de alcanzar siquiera la media internacional..."

- ¿Qué significa o como se interpreta la palabra media en este contexto?

Analiza

Julián hizo un recorrido diario durante su preparación para participar en una carrera. Él registró la distancia que recorrió durante una semana en la Tabla 6.16.

Días	Distancia (km)
Lunes	11,4
Martes	12,1
Miércoles	12,5
Jueves	10,8
Viernes	11,3
Sábado	12,4
Domingo	11,5

- Si la distancia promedio de la semana anterior fue de 12,3 km, ¿se puede afirmar que esta semana obtuvo un mejor promedio?

Conoce

4.1 Media aritmética

Para determinar el promedio de la distancia recorrida por Julián durante la semana, se suman las distancias y el resultado se divide entre el número de días.

$$\frac{11{,}4 + 12{,}1 + 12{,}5 + 10{,}8 + 11{,}3 + 12{,}4 + 11{,}5}{7} = \frac{82}{7} = 11{,}71 \text{ km}$$

Al comparar el promedio de la distancia recorrida por Julián la semana anterior con el obtenido esta semana, se puede concluir que su promedio bajó, pues $11{,}71 < 12{,}3$.

La **media aritmética** o **promedio** de un conjunto de datos es el cociente entre la suma de todos los datos y el número total de estos.

Ejemplo 1

A continuación se presentan los datos correspondientes al tiempo (en horas) que un grupo de estudiantes dedica a navegar en internet.

3	5	5	5	8	5	7
4	5	7	4	8	5	7
5	5	5	4	6	6	6
5	5	7	5	6	5	5
3	6	4	6	5	4	3

Los datos anteriores se registraron de manera ordenada en la Tabla 6.17 para hacer más fácil el cálculo del promedio.

Tiempo en horas	Frecuencia absoluta	Dato · frecuencia
3	3	$3 \cdot 3 = 9$
4	5	$4 \cdot 5 = 20$
5	15	$5 \cdot 15 = 75$
6	6	$6 \cdot 6 = 36$
7	4	$7 \cdot 4 = 28$
8	2	$8 \cdot 2 = 16$
Total	35	184

Tabla 6.17

La primera columna, muestra el tiempo semanal en horas que dedican a navegar en Internet; la segunda columna indica la frecuencia absoluta de cada tiempo, y en la tercera se calcula el producto de cada tiempo por su frecuencia.

Por tanto, en promedio los estudiantes navegan por internet $\frac{184}{35} = 5{,}26$ horas semanales.

Ejemplo 2

Si se sabe que la media aritmética de los datos 10, 13, 8, x y 1 es 8, es posible determinar el valor de x a partir del siguiente procedimiento.

$$\frac{10 + 13 + 8 + x + 1}{5} = 8$$

$$\frac{32 + x}{5} = 8$$

$$32 + x = 8 \cdot 5$$

$$x = 40 - 32$$

$$x = 8$$

En conclusión, el valor de x que permite que el promedio entre los números dados sea 8 es el número 8.

Ejemplo 3

En un concurso se asigna un puntaje a un ejercicio de salto y otro al tiempo de ejecución, dándole una importancia de siete al primero y de tres al segundo. Clara obtuvo 9 en salto y 6 en tiempo de ejecución. ¿Cuál fue su puntuación final?

$$\frac{9 \cdot 7 + 6 \cdot 3}{7 + 3} = \frac{81}{10} = 8{,}1$$

La puntuación de Clara fue 8,1.

4.2 Moda

En un estudio estadístico, el dato con mayor frecuencia absoluta se denomina **moda** del grupo de datos.

Ejemplo 4

Una empresa de transporte terrestre selecciona los sitios de Boyacá con mayor demanda de pasajes. Para cada uno registró el número de pasajes vendidos durante una semana. (Tabla 6.18)

Ciudad	Número de pasajes
Chiquinquirá	516
Duitama	750
Sogamoso	682
Paipa	650
Villa de Leyva	676
Valle de Tenza	704

Tabla 6.18

A partir de la información se puede afirmar que la moda de los datos es Duitama (por tener la mayor frecuencia).

Medidas de tendencia central

Ejemplo 5

A partir del estudio de los pasajes vendidos durante una semana, la empresa de transporte quiso averiguar la cantidad de pasajes vendidos cierto periodo de tiempo para llegar a esa ciudad. En el diagrama de barras de la Figura 6.9 se representa la información obtenida.

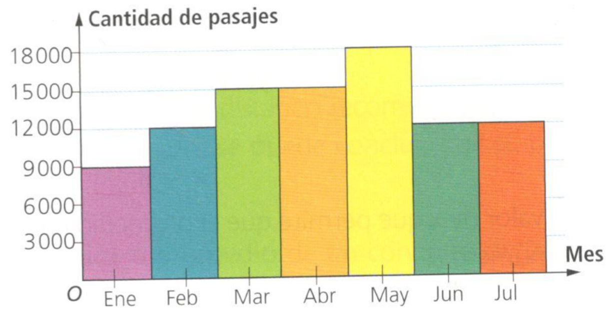


Figura 6.9

El dato con mayor frecuencia es el mes de mayo. La moda del conjunto de datos es mayo que corresponde a la barra con mayor altura. Esto significa que mayo es el mes de mayor venta de pasajes para Duitama.

4.3 Mediana

El valor central de un grupo ordenado de datos se denomina **mediana**. La mediana divide los datos en dos partes porcentualmente iguales y en algunos casos no es el valor de ninguno de los datos dados

Para hallar la mediana se elabora una lista ordenada de los datos y se establece la posición de cada uno.

Si la lista tiene un número impar de datos, la mediana corresponde al dato que ocupa la posición central.

Cuando la lista tiene un número par de datos, la mediana corresponde al promedio de los dos datos que ocupan las posiciones centrales.

Ejemplo 6

Para hallar la mediana del siguiente grupo de datos:

15, 18, 19, 15, 13, 18, 19, 19, 15, 14, 13, 17,

se ordenan los datos de menor a mayor. Como el grupo tiene un número par de datos, la mediana corresponde al promedio de los datos centrales.

$$13, 13, 14, 15, 15, \underbrace{15, 17}_{\text{datos centrales}}, 18, 18, 19, 19, 19$$

$$\text{Promedio} = \frac{15 + 17}{2} = 16$$

La mediana del grupo de datos es 16.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Halla la media aritmética en los casos que sea posible hacerlo. En el conjunto que no se pueda calcular, explica la razón.

a. Azul, rojo, rojo, verde, azul, rojo, rojo

b. 1 000, 1 000, 1 000, 1 500, 1 000, 1 500, 1 000, 1 000

c. 5, 6, 7, 8, 4, 5, 6, 7, 6

d. Masculino, femenino, femenino, femenino

2 Halla la media aritmética de los siguientes conjuntos de datos.

a. 2, 1, 4, 6, 3

b. 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5

c. 7, 8, 4, 3, 6, 7

d. 6, 5, 4, 3, 7, 6, 5, 4, 3, 0, 7, 5

Ejercitación

3 A partir de una encuesta a los estudiantes de séptimo grado sobre la zona de la ciudad en la cual viven, se obtuvieron los datos de la siguiente gráfica:

Zona en la que viven los estudiantes

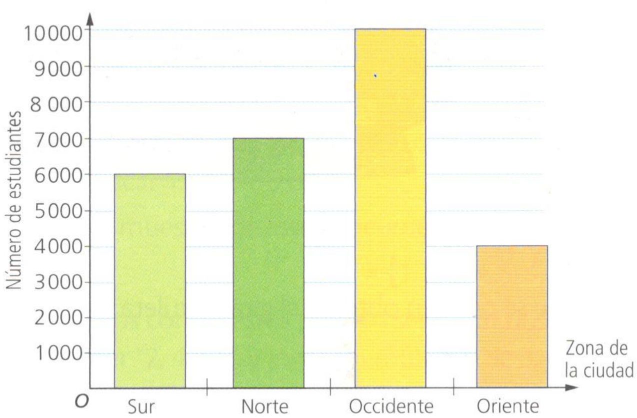


Figura 6.10

a. ¿Cuál es la variable que se está estudiando en este caso?

b. ¿Qué tipo de variable es?

c. ¿Cuál es el dato con mayor frecuencia?

d. ¿Cuál es el dato que se presenta con menor frecuencia?

e. ¿Cuál es la moda del conjunto de datos?

Comunicación

4 El psicólogo de un colegio hizo un sondeo entre los estudiantes de un curso para determinar la cantidad de tiempo del día que utilizan en actividades de ocio y esparcimiento.

En minutos						
30	40	50	45	30	30	60
30	45	55	70	45	120	

Tabla 6.19

a. ¿Cuál es el objetivo del estudio?

b. ¿A cuántos estudiantes se les preguntó?

c. ¿Cuál es el promedio de tiempo que los estudiantes tienen para realizar las actividades de esparcimiento?

d. ¿Cuál es la mediana de los tiempos de ocio?

Evaluación del aprendizaje

Realiza una encuesta a tus compañeros de salón para poder dar respuesta a las siguientes preguntas. Después determina la media, la moda y la mediana de los datos obtenidos.

a. ¿Cuál es la estatura promedio de los estudiantes de tu curso?

b. ¿Cuál es la edad promedio de los estudiantes de tu curso?

c. ¿Cuál es el tiempo promedio que los estudiantes de tu curso dedican para practicar deporte semanalmente?

d. ¿Qué tiempo promedio dedican los estudiantes a navegar por internet semanalmente?

Educación ambiental

Utiliza la información de la tabla para determinar la cantidad de basura promedio que diariamente se produce en un salón. ¿Cómo se puede contribuir para reducir dicha cantidad?

Día	L	M	M	J	V
Cantidad de basura (g)	2 650	2 890	2 560	2 950	3 200

5 Experimentos y sucesos aleatorios

Pensamiento aleatorio

Saberes previos

Si compras un billete de lotería, ¿estás seguro de que vas a ganar? Explica tu respuesta. ¿Porqué crees que la gente participa en este tipo de sorteos?

Analiza

Uno de los juegos de dados más populares es el *craps*. Sus reglas son:

- El jugador lanza dos dados simultáneamente para observar la suma de las caras.
- Si la suma es 7 u 11, el jugador gana.
- Si la suma es 2, 3 o 12 , pierde.
- Si la suma es una cantidad diferente, el jugador repite el lanzamiento.

• ¿Cuáles son los posibles resultados al lanzar los dos dados al aire?

Conoce

5.1 Experimentos aleatorios

Al lanzar dos dados al aire no es posible predecir el resultado que se obtendrá, pero sí es posible conocer todos los resultados posibles. Este tipo de experiencias se denominan *experimentos aleatorios*.

Para el caso del juego de *craps* hay 36 resultados posibles que se muestran a continuación.

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3),
(2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),
(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3),
(5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)

Un **experimento aleatorio** es un experimento que puede repetirse varias veces. Es posible conocer todos los resultados que se pueden obtener, pero aun así no es posible determinar cuál de ellos saldrá cada vez que se lleva a cabo el experimento.

Ejemplo 1

Para elegir al ganador de un sorteo, se utiliza una ruleta que tiene diez compartimentos numerados del 0 al 9. (Figura 6.11)

Aunque se repita muchas veces la experiencia, jamás se podrá predecir el resultado que se va a obtener al hacer girar la ruleta; es un experimento aleatorio.

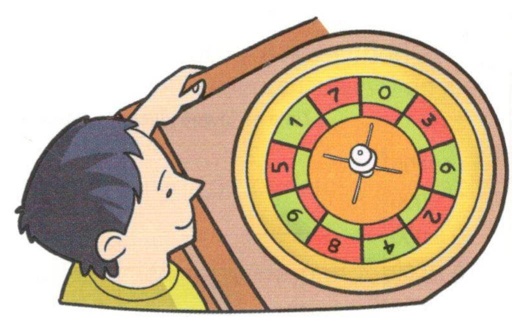


Figura 6.11

Los resultados posibles que se pueden obtener al girar la ruleta son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Ejemplo 2

Al lanzar al aire dos monedas simultáneamente los resultados que se pueden obtener son:

(cara, cara)	(cara, sello)
(sello, cara)	(sello, sello)

5.2 Espacio muestral

El **espacio muestral** es el conjunto de todos los resultados posibles que se pueden obtener al realizar un experimento aleatorio. Cada subconjunto de un espacio muestral se denomina **suceso**.

Ejemplo 3

Un suceso relacionado con el espacio muestral del juego de *craps* puede ser: A: "Sacar números iguales". En este caso, los resultados serían:

$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

Ejemplo 4

En relación con la información del Ejemplo 1, el espacio muestral E está conformado por todos los resultados posibles, es decir:

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Ejemplo 5

Se lanza un dado cuyas seis caras se distribuyen así: dos caras de color azul, dos caras de color rojo y dos caras de color verde. Se espera que caiga sobre una cara y se anota el resultado de la cara superior.

El espacio muestral E de este experimento es:

$$E = \{\text{azul, azul, rojo, rojo, verde, verde}\}$$

5.3 Sucesos aleatorios

Un **suceso elemental** es cada uno de los resultados posibles que se pueden obtener en un experimento aleatorio.

Un **suceso compuesto** corresponde a cualquier suceso que esté formado por dos o más sucesos elementales.

Ejemplo 6

Al realizar el experimento de lanzar un dado hay seis sucesos elementales, que son sacar 1, 2, 3, 4, 5 o 6.

El espacio muestral de este experimento es el siguiente conjunto:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Dos sucesos compuestos pueden ser: sacar un número par, cuyos resultados pueden ser "2, 4 o 6", y sacar un múltiplo de 3, que tendría como resultados posibles "3 o 6".

Ejemplo 7

Al realizar el experimento de lanzar un dado tetraédrico regular, cuyas caras están numeradas del 1 al 4, y anotar el resultado de la cara oculta hay cuatro sucesos elementales, que son sacar 1, 2, 3 o 4.

El espacio muestral es el conjunto

$$E = \{1, 2, 3, 4\}$$

Dos sucesos compuestos pueden ser: sacar un número menor que 3, cuyos resultados pueden ser "1 o 2", y sacar un número impar, que tendría como resultados posibles "1 o 3".

5.4 Operaciones con sucesos

Al igual que con los conjuntos, con los sucesos aleatorios también es posible realizar las operaciones de unión e intersección.

Unión de sucesos. El suceso $A \cup B$ se da cuando se realiza A o se realiza B.

Intersección de sucesos. El suceso $A \cap B$ se da cuando se realizan simultáneamente los sucesos A y B.

Sucesos incompatibles. Dos sucesos A y B son incompatibles si no pueden realizarse simultáneamente, es decir, si $A \cap B = \varnothing$.

Ejemplo 8

Un experimento consiste en extraer una balota de una urna en la que hay 20 balotas, numeradas del 1 al 20. Se consideran los siguientes sucesos:

A: "Extraer un número primo"

B: "Extraer un número par"

C: "Extraer un múltiplo de 5"

D: "Extraer un divisor de 18"

Algunos sucesos escritos en palabras y como conjuntos son:

- $A \cup B$: "Extraer un número primo o un número par"
  $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20\}$
- $A \cap B$: "Extraer un número primo y número par"
  $A \cap B = \{2\}$
- $C \cap D$: "Extraer un múltiplo de 5 y divisor de 18"
  Así, $C \cap D = \varnothing$
- $C - A$: "Extraer un múltiplo de 5 que no sea primo"
  $C - A = \{10, 15, 20\}$

De lo anterior se puede concluir que C y D son sucesos incompatibles, porque $C \cap D = \varnothing$.

Ejemplo 9

Al lanzar una moneda se consideran los siguientes sucesos:

A: "Salir cara"

B: "Salir sello"

$A \cup B$ es el espacio muestral, ya que:

$A \cup B = \{\text{cara, sello}\}$

$A - B = \{\text{cara}\}$

A y B son sucesos compatibles, porque $A \cap B = \varnothing$.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Indica si estos experimentos son aleatorios y, en caso afirmativo, determina el espacio muestral.

a. Extraer, sin mirar, una carta de una baraja española.

b. Lanzar un dado tetraédrico regular, cuyas caras tienen las letras A, B, C, D, y anotar el resultado de la cara oculta.

c. Medir la longitud del perímetro de un cuadrado de 4 cm de lado.

d. Anotar el número de personas que se suben a un bus en uno de los paraderos.

e. Aplicar el teorema de Pitágoras en un triángulo rectángulo e isósceles.

f. Calcular la raíz cuadrada de un número.

g. Lanzar un dado que tiene sus caras marcadas así: tres caras con una O, tres caras con una X. Al caer, anotar el resultado que queda en la cara superior.

2 Se lanza un dado cúbico. Indica los sucesos elementales que forman cada uno de estos sucesos.

Figura 6.12

a. Sacar un múltiplo de 3.

b. Sacar un número menor que 4.

c. Sacar un número mayor que 5.

d. Sacar un número primo mayor que 3.

e. Sacar un número menor que 7.

f. Sacar un número diferente de 6.

3 Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas y se consideran los siguientes sucesos:

A: "Sacar una copa"

B: "Sacar un rey"

C: "Sacar una carta menor que 5"

Determina estos sucesos:

a. $A \cup B$, $A \cup C$ y $B \cup C$

b. $A \cap B$, $A \cap C$ y $B \cap C$

c. $A \cup B \cup C$ y $A \cap B \cap C$

Comunicación

4 Se realiza un experimento que consiste en lanzar un dado con las caras numeradas del 1 al 6 y se anota el número de la cara superior. Considera estos sucesos:

$$A = \{1, 2, 3\};\ B = \{2, 5, 6\} \text{ y } C = \{3\}$$

a. Halla los sucesos: $A \cup B$ $\quad A \cap B$
$B \cup C$ $\quad B \cap C$

b. Representa los sucesos del literal anterior utilizando diagramas de Venn.

5 Un experimento consiste en extraer una balota de una urna en la que hay diez balotas: cinco son rojas, tres son blancas y dos son azules. Se consideran los siguientes sucesos:

A: "Extraer una balota roja"

B: "Extraer una balota blanca"

C: "Extraer una balota azul"

a. Describe en palabras y determina estos sucesos:

$A \cup B$ $\qquad C \cup A$ $\qquad B \cup C$

b. Determina dos sucesos incompatibles.

Resolución de problemas

6 Para determinar los ganadores de una rifa se utiliza una urna como la de la Figura 6.13.

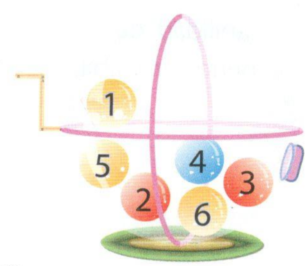


Figura 6.13

Si se elige una balota al azar:

a. ¿Cuál es el espacio muestral de este experimento?

b. ¿Cuáles son los elementos del siguiente evento?

$$A = \{\text{números pares}\}$$

c. Determina los elementos del siguiente evento:

$$B = \{\text{números impares menores que } 5\}$$

d. ¿El conjunto $A \cup B$ es igual al espacio muestral?

Evaluación del aprendizaje

En un experimento para dos sucesos A y B, se cumple que $A \cup B = A$. ¿Es cierto que $A = B$? Justifica tu respuesta utilizando un ejemplo.

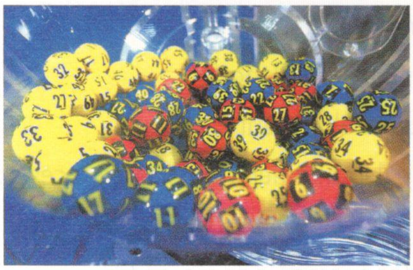
6 Probabilidad

Saberes previos

Explica qué significa la expresión "es muy probable que la selección Colombia de fútbol vaya al próximo mundial".

Analiza

Para participar en una rifa en la que juegan 100 números, la familia Ramírez compró tres boletas, la familia Suárez compró quince boletas y la familia Pérez compró nueve boletas.



- ¿Cuál familia tiene mayor probabilidad de ganar? ¿Cuál tiene menor probabilidad de ganar?

Conoce

La familia que adquirió la mayor cantidad de boletas es la que tiene mayor probabilidad de ganar; en este caso, es la familia Suárez porque compró quince boletas. De otro lado, la familia Ramírez tiene menos probabilidad de ganar, pues adquirió menos boletas que las otras dos familias.

La **probabilidad de un suceso** indica las posibilidades que tiene de ser verificado un experimento aleatorio.

6.1 Asignación de probabilidades. Regla de Laplace

En 1812, el matemático francés Pierre Simon, marqués de Laplace, dio la primera definición de *probabilidad*.

Regla de Laplace. Si todos los resultados de un experimento aleatorio son equiprobables, se verifica la probabilidad de un suceso así:

$$\text{Probabilidad del suceso } A = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } A}{\text{número de casos posibles}}$$

Ejemplo 1

Para determinar la probabilidad de que cada familia mencionada gane la rifa, se halla el cociente entre la cantidad de boletas compradas por cada una y el total de boletas de la rifa. (Tabla 6.20)

Familia Ramírez	Familia Suárez	Familia Pérez
$\frac{3}{100} = 0{,}03 = 3\%$	$\frac{15}{100} = 0{,}15 = 15\%$	$\frac{9}{100} = 0{,}09 = 9\%$

Tabla 6.20

Ejemplo 2

Para el viaje de fin de curso, los estudiantes organizaron una tómbola con 500 papeletas numeradas del 1 al 500. Juan compró una papeleta y Marta, cuatro. ¿Qué oportunidades de ganar tiene cada uno?

Como todos los números son equiprobables y Juan tiene una papeleta de las 500 vendidas, entonces se dirá que tiene una oportunidad entre 500 o que la probabilidad de que Juan gane viene dada por la fracción $\frac{1}{500}$. Como Marta tiene cuatro papeletas, tendrá cuatro oportunidades entre 500 de ganar; o sea que la probabilidad de que gane Marta viene dada por la fracción $\frac{4}{500}$.

Ejemplo 3

En una bolsa se depositan diez tarjetas numeradas del 0 al 9. Observa la probabilidad de algunos sucesos al extraer una tarjeta al azar.

a. A: "salir 3" $\frac{1}{10}$

b. B: "salir múltiplo de 4" $\frac{2}{10}$

c. C: "salir 13" $\frac{0}{10} = 0$

d. D: "salir número compuesto" $\frac{4}{10}$

Ejemplo 4

En un salón de clases hay 18 niñas y 22 niños. Si se realiza una rifa, la probabilidad de que gane una niña es:

$$\frac{18}{40} = 0{,}45 = 45\%$$

6.2 Escala de probabilidades

La **probabilidad de que un suceso** ocurra se mide con un número comprendido entre 0 y 1.

Si es seguro que un hecho ocurra, su probabilidad de ocurrencia es 1. Si es imposible que ocurra, su probabilidad de ocurrencia es 0.

Ejemplo 5

Al lanzar una moneda al aire se pueden establecer los sucesos que se muestran en la Tabla 6.21, junto con su respectiva probabilidad.

Suceso		Tipo de suceso	Probabilidad
Caer cara o sello	$A = \{C, S\}$	Seguro	$\frac{2}{2} = 1 = 100\%$
Caer sello	$A = \{S\}$	Elemental	$\frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$
Caer cara	$A = \{C\}$	Elemental	$\frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$
No caer ni cara ni sello	$\varnothing$	Imposible	$\frac{0}{2} = 0 = 0\%$

Tabla 6.21

Ejemplo 6

Si se extrae sin mirar una bola de las siguientes bolsas, ¿cuál es la probabilidad de que sea verde?

Bolsa A	Bolsa B	Bolsa C	Bolsa D	Bolsa E
				
Es imposible extraer una bola verde. Hay cero oportunidades entre cuatro.	Hay una oportunidad entre cuatro de extraer una bola verde.	Hay dos oportunidades entre cuatro de extraer una bola verde.	Hay tres oportunidades entre cuatro de extraer una bola verde.	Es seguro extraer una bola verde. Hay cuatro oportunidades entre cuatro.
$P = \frac{0}{4} = 0$	$P = \frac{1}{4} = 0{,}25$	$P = \frac{2}{4} = 0{,}5$	$P = \frac{3}{4} = 0{,}75$	$P = \frac{4}{4} = 1$

Tabla 6.22

6 Probabilidad

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Halla la probabilidad de cada suceso si el experimento aleatorio consiste en el lanzamiento de un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6.

a. *A*: "salir par"

b. *B*: "salir impar"

c. *C*: "salir múltiplo de 3"

d. *D*: "salir múltiplo de 5"

2 Calcula la probabilidad de cada suceso si el experimento consiste en sacar una bola de una bolsa que contiene cinco bolas rojas, tres azules y una amarilla.

a. Que sea roja. b. Que sea azul.

c. Que sea amarilla. d. Que no sea roja.

3 Lee y resuelve.

Se escoge al azar un dulce de una caja donde hay diez dulces de menta, seis de fresa y cinco de caramelo. Halla las siguientes probabilidades.

a. Que sea de menta. b. Que sea de caramelo.

4 Analiza y resuelve.

Se lanza un dado que tiene dos caras con el número 1, dos caras con el número 2 y dos caras con el número 3. Halla la probabilidad de que al lanzarlo, la cara superior muestre las siguientes opciones.

a. El número 1. b. El número 2.

c. El número 3. d. El número 6.

Razonamiento

5 Halla la probabilidad del evento que se indica en cada caso si el experimento consiste en extraer de forma aleatoria una bola identificada con algún número entre 1 y 9.

a. Que la bola tenga el número 5.

b. Que la bola muestre un número menor que 4.

c. Que la bola esté identificada con un número mayor que 6.

d. Que la bola muestre un número mayor que 2 pero menor que 6.

6 Resuelve.

Lucía escribe cada uno de estos números en un papel. Después los dobla y selecciona uno de ellos al azar.

1 2 2 3 3 4 5 8 8 9

Calcula la probabilidad de que el papel que elija Lucía muestre el número o números que cumplan cada condición.

a. El 5 b. Mayor que 4

c. Divisible entre 3 d. Múltiplo de 4

e. Par f. Menor que 6

7 Lee y resuelve.

Óscar le pide a Alberto que elija un número cualquiera del conjunto $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

a. Escribe los elementos de los siguientes sucesos y calcula sus probabilidades.

A: "elegir un número mayor que 3"

B: "elegir un número par"

C: "elegir un número distinto de 7"

b. Escribe los elementos de los sucesos contrarios. Calcula sus probabilidades.

c. ¿Hay algún suceso imposible?

8 Calcula la probabilidad de sacar al azar una carta con la figura que se indica en cada caso, sabiendo que se toma de una baraja española que consta de 40 cartas.

a. Una copa

b. Una sota

c. La sota de copas

Resolución de problemas

9 Una fábrica de bombillas tiene dos máquinas. La máquina *A* produce cuatro bombillas defectuosas por cada 250 bombillas fabricadas. El número de bombillas defectuosas que produce la máquina *B* es de seis por cada 400 fabricadas.

Nubia tiene una bombilla que funciona. ¿Con cuál máquina es más probable que se haya fabricado?

10 Una pareja espera mellizos. Calcula las probabilidades de todos los sucesos relativos al género de los recién nacidos.

11 Tres atletas, *A*, *B* y *C*, participan en una carrera. Considerando que no llegan a la meta al mismo tiempo, halla la probabilidad de los siguientes sucesos.

a. Que gane *A*.

b. Que *C* llegue de último.

c. Que gane *A* o *B*.

d. Que gane *C*.

12 La probabilidad de que un estudiante cualquiera llegue tarde a clase es $\frac{1}{15}$. ¿Cuál es la probabilidad de que llegue temprano?

13 Juan y Pilar juegan con unos dados cúbicos especiales: sus caras están numeradas con los seis primeros números primos.

a. Escribe todos los resultados que pueden obtener si lanzan los dos dados. Calcula el producto de las puntuaciones de cada uno.

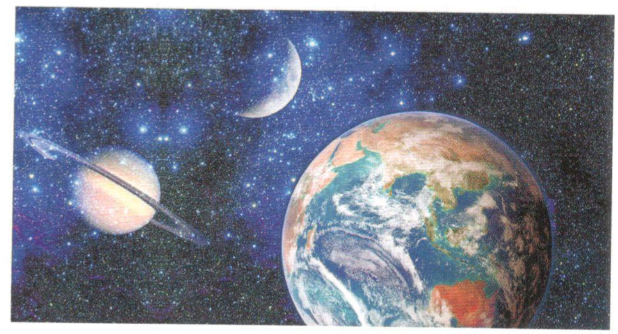
b. Analiza el juego que propone Juan y explica de forma razonada por qué Pilar no acepta las condiciones.

14 Calcula la probabilidad de las siguientes situaciones.

a. Descubrir un número mayor que 10 pero menor que 50, cuyas cifras sean todas diferentes.

b. Adivinar un número de cuatro cifras si lo único que sabes es que tiene seis unidades de mil.

15 Jorge debe hacer una exposición sobre el cosmos y puede escoger al azar dos elementos entre dos grupos diferentes. El primer grupo tiene como opciones planetas y satélites, y el segundo tiene como opciones nebulosas, estrellas y asteroides.



¿Cuál es la probabilidad de que Jorge exponga sobre estrellas y satélites? Como pista puedes completar la Tabla 6.23.

	Planetas	Satélites
Nebulosas		
Estrellas		
Asteroides		

Tabla 6.23

Evaluación del aprendizaje

Una baraja de 52 cartas está compuesta por trece cartas de corazones rojos, trece cartas de diamantes rojos, trece cartas de tréboles negros y trece cartas de picas negras. De las trece cartas de cada grupo una es as, nueve están numeradas del 2 al 10 y las restantes son las letras J, Q y K. Se mezclan muy bien y se saca una carta. Calcula la probabilidad de sacar la carta que se indica en cada caso.

a. Carta roja

b. Carta con una letra

c. Carta con un número

d. Carta 7 negro

e. Carta con un as

f. Carta con un número par rojo

Practica más

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Población, muestra y variables

Comunicación

1 Determina la población y la muestra en cada una de las siguientes situaciones.

a. La administración del conjunto residencial ha decidido establecer una multa a los residentes que no clasifiquen las basuras cuando las llevan al contenedor de basura. Para esto, inicialmente decide preguntar a los residentes de los bloques 1, 3, 5, 7 y 9 sobre la forma en la que llevan la basura al contenedor.

b. El profesor de deportes va a seleccionar a las integrantes del equipo de fútbol femenino del colegio. Antes de la elección hace una convocatoria a las estudiantes interesadas de los cursos 8.º, 9.º y 10.º.

Ejercitación

2 En cada caso, escribe si la variable es cualitativa o cuantitativa.

a. Altura de los árboles de un bosque

b. Estrato social en una ciudad

c. Talla de calzado

d. Galones de gasolina gastados

Distribución de frecuencias

Resolución de problemas

3 En la Tabla 6.24 se presenta la información relacionada con el número de medallas de oro que se otorgaron por día en unos juegos olímpicos. Completa la tabla. Responde.

Día	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia acumulada
1	4		
2	19		
3	28		
4	8		

Tabla 6.24

a. ¿Cuántas medallas de oro se entregaron durante los tres primeros días?

b. ¿Qué porcentaje de medallas se entregó el cuarto día?

Gráficas estadísticas

Comunicación

4 Lee y resuelve.

Se realizó una encuesta en un jardín infantil para conocer el tipo de postre preferido por los niños y las niñas. En la Tabla 6.25 se registraron los datos.

Postres	Número de niños
Chocolatina	20
Gelatina	15
Arroz de leche	12
Galletas rellenas	18
Helado	25
Donas	10

Tabla 6.25

Representa en un diagrama circular y en un diagrama de barras la anterior información.

Medidas de tendencia central

Ejercitación

5 Una encuesta preguntó a diez buenos lectores por la cantidad de libros que leen en seis meses. Los resultados se muestran a continuación:

12, 13, 11, 23, 14, 15, 20, 23, 14, 14

Calcula la media, la mediana y la moda.

Experimentos y sucesos aleatorios

Razonamiento

6 ¿Son incompatibles dos sucesos contrarios?, ¿son contrarios dos sucesos incompatibles? Explica tus respuestas.

7 ¿Es un suceso imposible el de intersección de dos sucesos contrarios? Explica tu respuesta.

Probabilidad

Resolución de problemas

8 Camila juega a los dados y ganará si la suma de los puntos es mayor que 8.

a. ¿Cuál es el espacio muestral en este caso?

b. ¿Qué probabilidad tiene Camila de ganar?

Resolución de **problemas**

Estrategia: **Utilizar datos de una gráfica**

Problema

En el diagrama de barras de la Figura 6.14 se representa el tiempo, en meses, que tardan los estudiantes universitarios en visitar a sus familias que viven en otras poblaciones.

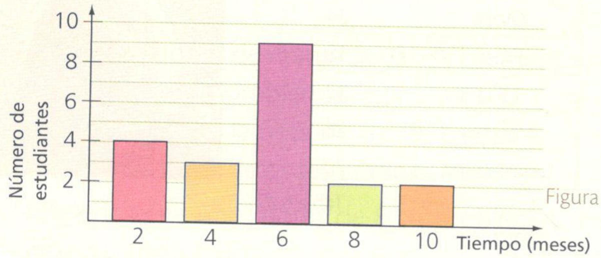


Figura 6.14

¿Cuál es el promedio de este grupo de datos?

1. Comprende el problema

- ¿Cuál es la frecuencia de cada dato?

  R: 2 meses: 4; 4 meses: 3; 6 meses: 9; 8 meses: 2 y 10 meses: 2
- ¿Cuántos estudiantes se encuestaron?

  R: 20 estudiantes.

2. Crea un plan

- Interpreta la información que se presenta en el diagrama de barras, organiza los datos en una tabla y halla el promedio.

3. Ejecuta el plan

- Organiza la información del diagrama de barras en una tabla. Calcula el producto de cada dato por su frecuencia.

Tiempo	Frecuencia absoluta	Dato · frecuencia
2	4	$2 \cdot 4 = 8$
4	3	$4 \cdot 3 = 12$
6	9	$6 \cdot 9 = 54$
8	2	$8 \cdot 2 = 16$
10	2	$10 \cdot 2 = 20$
Total	20	110

Tabla 6.26

Calcula el promedio.

$$\frac{110}{20} = 5,5$$

R: El promedio es los estudiantes visitan a sus familias aproximadamente cada 6 meses..

4. Comprueba la respuesta

- El promedio está entre 5 y 6 meses..

Aplica la estrategia

1. En la Figura 6.15 se representa la edad de un grupo de estudiantes de grado séptimo.

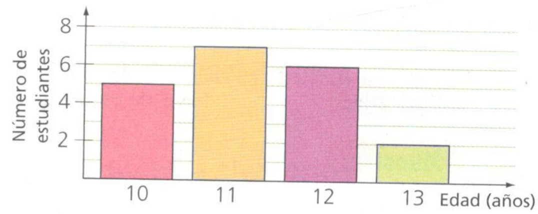


Figura 6.15

¿Cuál es la edad promedio del grupo, la moda y la mediana?

a. Comprende el problema

....

b. Crea un plan

....

c. Ejecuta el plan

....

d. Comprueba la respuesta

....

Resuelve otros problemas

2. Dos estudiantes han obtenido las siguientes valoraciones en la asignatura de matemáticas.

   Pedro: 75, 76, 85, 93 y 65

   José: 65, 67, 85, 65 y 93

   ¿Cuál de los dos tiene mejor promedio?

3. Un estudiante sacó estas notas en Matemáticas.

   75, 60, 85, 65, 80

   ¿Al estudiante le conviene más calcular su nota definitiva empleando la mediana o el promedio?

Formula problemas

4. Inventa y resuelve un problema que involucre los siguientes grupos de datos:

   Grupo *A*: 450, 460, 380, 430, 420

   Grupo *B*: 430, 450, 460, 370, 410

Enriquece tu vocabulario

- Investiga sobre la estadística descriptiva y la estadística inferencial, luego escribe en tu cuaderno sobre las similitudes y las diferencias entre ellas.

Evaluación del aprendizaje

Población, muestra y variables

Razonamiento

1 Completa los elementos que faltan y redacta una situación estadística para cada caso. PREGUNTA ABIERTA

a.

Variable:	Nivel de escolaridad
Muestra:	
Población:	Todos los empleados de una empresa

b.

Variable:	
Muestra:	100 perros callejeros
Población:	

Distribución de frecuencias

Ejercitación

2 Completa la Tabla 6.27 a partir de los siguientes datos, obtenidos al preguntar la edad a un grupo de niños. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

12	12	12	12	13	14	13	14	15	12
13	15	13	14	15	12	14	15	15	12
12	14	13	13	13	12	14	12	13	13

Edad	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa

Tabla 6.27

3 Completa la siguiente tabla de frecuencias. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

Ciudad	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa
Medellín			25%
Bogotá	30		
Cali		120	
Armenia	80		

Tabla 6.28

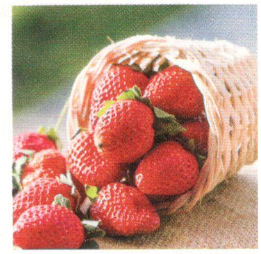
Gráficas estadísticas

Ejercitación

4 Elabora el diagrama de barras correspondiente a la información registrada en la Tabla 6.29. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

Jugo favorito	Frecuencia absoluta
Mora	24
Fresa	18
Lulo	32
Naranja	26
Guanábana	20

Tabla 6.29



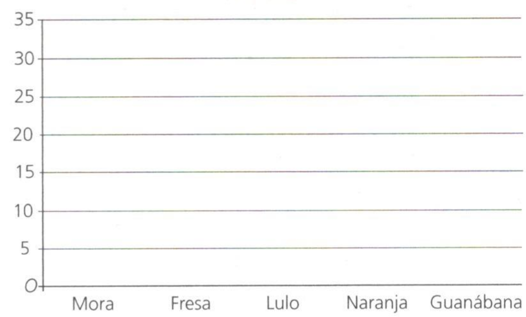


Figura 6.16

Razonamiento

5 Observa el diagrama de barras. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

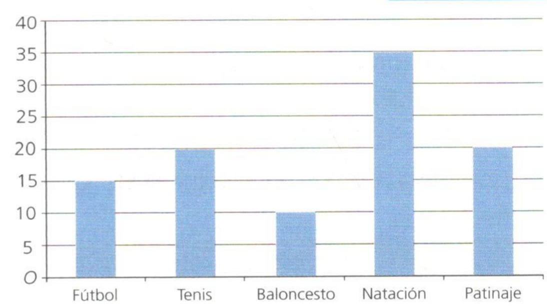


Figura 6.17

a. Elabora en tu cuaderno la tabla de frecuencias correspondiente.

b. Escribe tres conclusiones sobre la información representada en el diagrama de barras.

Comunicación

6 Representa mediante un diagrama de barras y un diagrama circular la información registrada en la siguiente tabla sobre el deporte preferido de un grupo de estudiantes. ACTIVIDAD DE REFUERZO

Deporte	Fútbol	Baloncesto	Natación
Alumnos	305	215	80

Tabla 6.30

Medidas de tendencia central

Ejercitación

7 Determina el valor de x para que la media del conjunto de datos sea la que se indica. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. La media de 5, 6 y x es 6.

b. La media de 3, 8, x, 2 y 7 es 7.

8 Para hallar la nota de matemáticas, se multiplica por cinco la nota de problemas, por cuatro la nota de cálculo y por uno la nota de teoría. Luego, se divide por 10 la suma de estos resultados.

Si Beatriz tiene unas notas de 8 en problemas, 7 en cálculo y 10 en teoría, ¿cuál es su calificación final? ACTIVIDAD DE REFUERZO

Razonamiento

9 Encuentra el dato que falta en cada conjunto de datos para que se cumpla la condición. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. 5 7 6 5 4 3 7 6 5 x. La moda es 5.

b. 21 10 16 18 x 23 12 14. La mediana es 16.

10 Propón un conjunto de datos en el que se cumpla cada condición. PREGUNTA ABIERTA

a. La moda es menor que la mediana.

b. La moda es mayor que la mediana.

c. La media es igual que la mediana.

d. La media, la moda y la mediana son iguales.

Resolución de problemas

11 Se preguntó a 40 estudiantes de una universidad por el número de personas con las que vive en su hogar actualmente. Los datos obtenidos son: ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

3	4	8	10	4	4	4	5
2	4	5	5	5	3	3	3
2	2	7	6	8	5	3	2
9	4	3	3	7	4	2	3
4	5	6	3	2	4	5	3

a. ¿La variable estudiada es cualitativa o cuantitativa?

b. ¿Con cuántas personas en promedio vive un estudiante?

c. Calcula la mediana y la moda.

12 En la nota definitiva de la asignatura de Inglés, cada estudiante tiene cinco valoraciones. Las valoraciones de Andrés fueron: 7, 8, 9, 10 y 6. Se sabe que Mariana sacó la misma definitiva, pero no tuvo las mismas notas. Escribe dos posibles grupos de valoraciones de Mariana. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

Experimentos y sucesos aleatorios

13 Considera el experimento aleatorio de sacar una balota de una urna en donde hay nueve balotas numeradas del 1 al 9. Determina lo siguiente. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. El espacio muestral

b. El suceso B: "Sacar un número mayor que 3"

c. El suceso contrario de B

Razonamiento

14 Halla lo que se pide en cada caso si se efectúa el experimento de lanzar dos dados cúbicos y esperar que cada una de sus caras muestre un número entre 1 y 6. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. El espacio muestral

b. Un suceso seguro y su probabilidad

c. Tres sucesos equiprobables

d. Tres sucesos compuestos

Probabilidad

Resolución de problemas

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

15 Una bolsa de la Figura 6.18 contiene cinco bolas negras, nueve bolas blancas y doce amarillas. De esta bolsa se extrae una bola sin mirar.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que sea amarilla?

Figura 6.18

16 Cristian le preguntó al profesor lo siguiente: "¿Es más probable ganarse el Baloto o una lotería de cuatro números?". ¿Cuál debe ser la respuesta del profesor? Explica tu respuesta. PREGUNTA ABIERTA

17 ¿Cuál es la probabilidad de obtener 7 al lanzar un par de dados? ¿Cuál es la de obtener 12? ACTIVIDAD DE REFUERZO

Glosario

A

Aleatorio. Experimento cuyos resultados no se pueden predecir.

Algoritmo. Descripción paso a paso del procedimiento para efectuar una operación.

Altura. Perpendicular trazada desde la base de una figura al vértice opuesto.

Ángulo. Unión de dos semirrectas con un origen común.

Ángulo agudo. Ángulo cuya medida es menor que 90°.

Ángulo llano. Ángulo que mide 180°.

Ángulo obtuso. Ángulo cuya medida es mayor que 90°.

Ángulo recto. Ángulo cuya medida es 90°.

Ángulos congruentes. Ángulos que tienen la misma medida.

Aproximar. Obtener un resultado tan cercano al exacto como sea necesario para un propósito determinado.

Área. Medida de la superficie de una figura plana.

Aritmética. Rama de las matemáticas que se dedica al estudio de los números, sus operaciones y sus propiedades.

B

Binario. Sistema de numeración que únicamente utiliza los dígitos 1 y 0.

Bisectriz. Semirrecta que divide un ángulo en dos ángulos congruentes.

C

Cifras decimales. Cifras que se encuentran a la derecha de la coma en un número decimal.

Circunferencia. Conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.

Criterio de divisibilidad. Regla mediante la cual se determina si un número es divisible por otro, sin hacer la división.

Cuadrado. Polígono regular de cuatro lados.

Cuadrilátero. Polígono de cuatro lados.

D

Dato. Cantidad o medida obtenida de la observación, comparación y aplicación de encuestas.

Decimal. Sistema de numeración que únicamente utiliza los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Descomposición factorial. Expresión de un número como el producto de sus factores primos.

Diagonal de un polígono. Segmento de recta que une dos vértices no consecutivos.

Diagrama de barras. Representación gráfica en forma de barras rectangulares o columnas que facilita el análisis de un conjunto de datos.

E

Ecuación. Igualdad entre dos expresiones que contienen uno o varios términos desconocidos.

Eje. Línea recta que sirve de referencia para construir un sistema de coordenadas.

Eje de simetría. Recta que divide una figura en dos partes iguales.

Estadística. Rama de las matemáticas que se encarga de la recolección, representación, análisis, interpretación y aplicaciones de datos numéricos a través de un conjunto de técnicas con rigor científico.

Evento (o suceso). Resultado posible en un experimento aleatorio.

F

Factor primo. Un número primo es factor de un número natural si el número natural es divisible por dicho número primo.

Fracción impropia. Fracción en la que el numerador es mayor que el denominador.

Fracción propia. Fracción en la que el numerador es menor que el denominador.

Fracciones equivalentes. Fracciones que representan la misma parte de la unidad.

Frecuencia absoluta. Número de veces que se repite determinado valor en la variable estadística que se estudia.

G

Gráfica circular (diagrama de sectores). Gráfica que ilustra proporciones como sectores de un círculo cuyas áreas relativas representan las distintas proporciones.

Gramo. Unidad de masa del Sistema Internacional de Unidades.

H

Heptágono. Polígono de siete lados.

Hexágono. Polígono de seis lados.

I

Igualdad. Relación entre dos expresiones idénticas.

L

Lado de un polígono. Segmento que une dos vértices consecutivos.

Longitud. Magnitud de las líneas.

M

Máximo común divisor. Mayor de los divisores comunes de dos o más números.

Media aritmética. Promedio de un grupo de datos que se obtiene al calcular la suma de todos los valores y dividirla por el número de datos.

Medida de tendencia central. Valor alrededor del cual se concentran los valores de un conjunto de datos.

Mínimo común múltiplo. Menor de los múltiplos comunes de dos o más números.

Moda. Valor que aparece con mayor frecuencia en un conjunto de datos.

Muestra. Parte de una población que la representa en un estudio estadístico.

Múltiplo. Número que se obtiene al multiplicar un número natural dado por 1, 2, 3, 4...

N

Numerador. Es el número superior en una fracción. Indica las partes que se toman de la unidad.

Número compuesto. Número que puede expresarse como el producto de números primos.

Número decimal. Expresión numérica formada por una parte entera y una parte decimal separadas por una coma.

Número decimal exacto. Decimal con un número finito de cifras.

Números primos. Números que tienen solo dos divisores: la unidad y el mismo número.

O

Octágono. Polígono de ocho lados y ocho ángulos.

Orden de las operaciones. Conjunto de reglas que indican el orden en que se deben realizar operaciones en una expresión con operaciones combinadas.

Origen de coordenadas. Punto de intersección de los ejes de coordenadas.

P

Pareja ordenada. Dupla formada por dos elementos en la que el orden es determinante. Las coordenadas de un punto se representan mediante una pareja ordenada.

Perímetro. Medida del contorno de una figura poligonal cerrada.

Población. Conjunto de individuos, objetos o fenómenos de los cuales se desea estudiar una o varias características.

Polígono. Línea poligonal cerrada.

Polígono regular. Polígono en el cual son iguales las longitudes de sus lados y la medida de sus ángulos interiores.

R

Radio. Distancia del centro de un círculo a un punto de su circunferencia o del centro de una esfera a un punto de su superficie.

Rectas paralelas. Líneas rectas que no se cortan en ningún punto.

Rectas perpendiculares. Líneas rectas que, al cortarse, forman cuatro ángulos rectos.

Rectas secantes. Líneas rectas que se cortan en un punto único.

S

Segmento. Es la parte de la recta que está delimitada por dos puntos (los cuales son los extremos del segmento).

Sistema de numeración. Conjunto de símbolos, con reglas bien definidas de combinación, usados para representar cantidades y realizar operaciones con ellas.

Bibliografía

- Abdón Montenegro, Ignacio. *Evaluemos competencias matemáticas*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio, 1999.
- Alem, Jean-Pierre. *Nuevos juegos de ingenio y entretenimiento matemático*. Barcelona: Gedisa, 1990.
- Alsina Catalá, Claudi; Burgués F., Carme; Fortuny A. Josep María. *Materiales para construir la geometría*. Madrid: Síntesis, 1995.
- Andonegui, Martín. *El sistema numérico decimal*. Caracas: Federación Internacional Fe y Alegría, 2004.
- Boyer, Carl B. *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza, 2007.
- Castro, Encarnación; Rico, Luis, y Castro, Enrique. *Números y operaciones*. Madrid: Síntesis, 1996.
- Centeno Pérez, Julia. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 5*. Madrid: Síntesis, 1997.
- Clemens *et al*. *Geometría* Serie Awli. México: Pearson, 1998.
- De Prada V., María Dolores. *Cómo enseñar las magnitudes, la medida y la proporcionalidad*. Málaga: Ágora, 1990.
- Dickson, Linda; Brown Margaret; Gibson Olwen. *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Labor, 1991.
- Doran, Jody L.; Hernández, Eugenio. *Las matemáticas en la vida cotidiana*. Madrid: Pearson-Addison Wesley V. A. M, 1994.
- Fournier, Jean-Louis. *Aritmética aplicada e impertinente*. Barcelona: Gedisa, 1995.
- Jouette, André. *El secreto de los números*. Bogotá: Intermedio, 2002.
- Küchemann, D. "The meaning children give to the letters in generalised arithmetic." En: Cognitive Development Research in Sci. and Math. 1980. The University of Leeds (2002): 28-33.
- Leithold, Louis. *El cálculo con geometría analítica*. México: Harla, S. A. de C.V., 1972.
- Mason, J.; Burton, L., y Stacey, K. *Pensar matemáticamente*. Barcelona/Madrid: Labor/MEC, 1992.
- Ministerio de Educación Nacional. *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá, 2006.
- Ministerio de Educación Nacional. *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá, 1998.
- Moise, Edwin, y Downs, Floyd. *Geometría moderna*. Addison Wesley, 1966.
- Perelman, Yakov. *Aritmética recreativa*. Moscú: Mir, 1986.
- Polya, George. *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas, 1989.
- Resnick, Robert. *Física volúmenes I y II*. México: Compañía Editorial Continental S. A., 1996.
- Rich, Barnett. *Geometría*. México: McGraw-Hill, 1991.
- Socas, Martín M.; Camacho, Matías; Palarea, Mercedes, y Hernández, Josefa. *Iniciación al álgebra*. México: Síntesis, 1991.
- Spiegel, Murray R. *Probabilidad y estadística*. México: McGraw-Hill, 1975.
- Suppes, Patrick, y Hill, Shirley. *Introducción a la lógica matemática*. Bogotá: Reverté, 1976.
- Swokowski, Earl; Cole, Jeffery. *Álgebra y Trigonometría con geometría analítica*. México: Thomson Editores, 1998.
- Tahan, Malba. *El hombre que calculaba*. México: Limusa, 1988.
- Zill, Dennis, y Dewar, Jacqueline. *Álgebra y trigonometría*. México: McGraw-Hill, 2000.